

## ЗАВИСИМОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ МОД БАРОТРОПНОГО УРАВНЕНИЯ ВИХРЯ ОТ СТРУКТУРЫ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### DEPENDENCE OF NORMAL MODES OF THE BAROTROPIC VORTEX EQUATION ON THE MEAN FLOW STRUCTURE AND NUMERICAL SIMULATION PARAMETERS

**В.И. Мордвинов**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, v\_mordv@iszf.irk.ru*

**Е.В. Девятова** 

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, devyatova@iszf.irk.ru*

**В.М. Томозов**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, tom@iszf.irk.ru*

**V.I. Mordvinov**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, v\_mordv@iszf.irk.ru*

**E.V. Devyatova**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, devyatova@iszf.irk.ru*

**V.M. Tomozov**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, tom@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** В работе представлены результаты расчетов нормальных мод среднего течения, обусловленного суперпозицией циклонического и антициклонического вихрей в высоких широтах. Подобная структура потока часто наблюдается зимой в верхней тропосфере — нижней стратосфере. Мы надеялись выделить в спектре колебаний нормальные моды, напоминающие крутильные колебания. Задача решалась численно в рамках баротропной квазигеострофической модели. Дополнительно оценивалась зависимость нормальных мод от параметров эксперимента — количества сферических гармоник в разложении полей функции тока, параметризации вязкости и гипервязкости.

Результаты расчетов показали, что неустойчивость течения практически всегда возрастала с увеличением амплитуды антициклонического вихря, в разной степени при разных вязкостях и количестве гармоник в разложении. Более хаотично при изменении параметров эксперимента и среднего потока менялась пространственная структура наиболее неустойчивых нормальных мод. Это существенно осложняет интерпретацию реальных колебаний в терминах нормальных мод, в том числе интерпретацию крутильных колебаний. Осесимметричные нормальные моды часто присутствовали в спектре, однако они не обладали всеми свойствами крутильных колебаний и не доминировали в спектре.

**Ключевые слова:** гидродинамика, атмосфера, нормальные моды, крутильные колебания.

**Abstract.** We present the results of numerical simulations of normal modes of the mean flow due to the superposition of cyclonic and anticyclonic vortices at high latitudes. Such a flow structure is often observed in the upper troposphere — the lower stratosphere in winter. Our aim is to identify normal modes in the oscillation spectrum that resemble torsional oscillations. We solve the problem numerically, using a barotropic quasi-geostrophic model. Additionally, we estimate the dependence of the normal modes on experimental parameters (the number of spherical harmonics in the stream function field expansion, the parameterization of viscosity and hyperviscosity).

The simulation results show that flow instability almost always increases with increasing amplitude of the anticyclonic vortex to varying degrees at different viscosities and different numbers of harmonics in the field expansion. The spatial structure of the most unstable normal modes changes most chaotically when the experiment parameters and the mean flow change. This significantly complicates the interpretation of real oscillations in terms of normal modes, including the interpretation of torsional oscillations. Axisymmetric normal modes are often present in the spectrum, but they do not have all the properties of torsional oscillations and do not dominate the spectrum.

**Keywords:** hydrodynamics, atmosphere, normal modes, torsional oscillations.

## ВВЕДЕНИЕ

Большое внимание в физике атмосферы уделяется исследованию низкочастотных колебаний с периодами от нескольких суток до нескольких десятков суток, имеющих крупномасштабную структуру вдоль широтных кругов. Особый интерес вызывали бегущие в зональном направлении возмущения с периодами

4, 5, 10, 16, 25 сут [Kasahara, 1980; Branstator, 1987; Branstator, Held, 1995; Madden, 2007; Pogoreltsev et al., 2009; Koval et al., 2018], а также квазистационарные колебания — так называемые дальние связи (teleconnections) [Simmons et al., 1983; Blackmon et al., 1984a, b]. Для интерпретации колебаний в верхней атмосфере была разработана теория собственных колебаний атмосферы, находящейся в состоя-

нии покоя. При таком допущении собственные колебания атмосферы, названные нормальными модами, являются решениями приливного уравнения Лапласа [Яглом, 1953; Longuet-Higgins, 1964, 1968; Дикий, 1969]. Однако в нижних слоях атмосферы подобное предположение некорректно, поскольку атмосфера не находится в состоянии покоя, а среднее течение не является зонально симметричным. В этом случае вместо приливного уравнения Лапласа мы получаем задачу на собственные значения и собственные функции дифференциального оператора, зависящего от среднего потока [Дымников, Скиба, 1986; Дымников, 2007; Дымников, Филатов, 1988]. Эти колебания также были названы нормальными модами, что вызывает иногда путаницу в трактовке результатов исследований. В данной работе мы используем определение нормальных мод из работы [Дымников, Филатов, 1988] и называем их новыми нормальными модами (НМ).

В спектре НМ появляются неустойчивые компоненты, амплитуда которых растет со временем, поэтому метод нормальных мод широко используется для анализа устойчивости средних потоков. Теоретические и практические исследования в этой области можно найти в работах отечественных и зарубежных авторов [Simmons et al., 1983; Дымников, Филатов, 1988; Branstator et al., 1995; Дымников, 2007]. Мы предположили, что этими модами можно объяснить и крутильные колебания.

Крутильные колебания представляют собой распространяющиеся в меридиональном направлении возмущения, выделяемые с помощью низкочастотной фильтрации и зонального усреднения [Zorkaltseva et al., 2019]. Эти возмущения могут быть собственными колебаниями атмосферы (как мы предположили) или результатом нелинейных процессов, например, взаимодействия бегущих и стационарных волн Россби. В работе [Мордвинов, Латышева, 2013] была рассчитана меридиональная компонента групповой скорости волн Россби и сопоставлена с данными реанализа. В приближении  $\beta$ -плоскости выражение для меридиональной компоненты групповой скорости имеет вид

$$c_{gv} = 2\beta km / (k^2 + m^2 + l^2 / gh)^2, \quad (1)$$

где  $\beta$  — параметр Россби;  $k, m$  — меридиональное и зональное волновые числа;  $l$  — параметр Кориолиса;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — высота однородной атмосферы ( $\sim 8000$  м).

Рассчитанные по этой формуле для волн Россби с зональными волновыми числами  $m=1, 2, 3$  траектории возмущений были нанесены на диаграммы крутильных колебаний и показали неплохое согласие. Одним из возражений против подобной интерпретации является то, что крутильные колебания одинаково возникают и в Северном, и в Южном полушарии, однако в Южном полушарии стационарные волны имеют намного меньшую амплитуду и, следовательно, при взаимодействии с бегущими волнами Россби должны производить более слабые вторичные возмущения. Поэтому предположение, что крутильные колебания могут быть собственными колебаниями атмосферы, остается в силе. В таком

случае они должны иметь осесимметричную составляющую и меридиональную компоненту скорости  $\sim 6^\circ/\text{сут}$ . Можно предположить, что большое значение при их формировании имеют полярные вихри, поскольку источники крутильных колебаний фиксируются в полярной области.

Зависимости НМ от среднего течения были исследованы нами ранее в простой баротропной модели дифференциального вращения солнечной атмосферы в области тахоклина [Мордвинов и др., 2013]. Однако основное внимание в статье было обращено на скорости роста НМ, а не на их пространственную структуру, поскольку слой, в котором развиваются неустойчивости, имеет толстую конвективную оболочку, маскирующую структуру течений под ней. В земной атмосфере наблюдения дают более полную информацию, что позволяет анализировать не только скорости роста и периоды собственных колебаний, но и их пространственную структуру.

В статье [Мордвинов, Зоркальцева, 2022] нормальные моды, похожие по структуре на крутильные колебания, действительно были получены, однако все свойства колебаний воспроизвести не удалось. Главной проблемой является параметризация среднего потока. Течения в атмосфере постоянно меняются, поэтому сложно выбрать какие-то конкретные синоптические конфигурации в качестве возможного источника интересующих нас колебаний. Особенно трудно это сделать в стратосфере. В стратосфере течения имеют более простую конфигурацию, и такая задача становится возможной. В данной работе мы используем в расчетах наиболее часто встречающуюся в нижней стратосфере конфигурацию полярный циклон + антициклон для изучения на этом уровне НМ и попытки интерпретации крутильных колебаний.

## МОДЕЛЬ

Математическая модель течения была принята такой же, как в работе [Мордвинов и др., 2023]. Метод решения задачи был изложен в работе [Мордвинов и др., 2013]. Для описания течения используем баротропное уравнение квазигеострофического потенциального вихря [Dikpati, Gilman, 2001; Дымников, Филатов, 1988]:

$$\frac{\partial(\Delta - L_0^2)\psi}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mu} \right] - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - r\Delta\psi - K\Delta^N(\Delta\psi), \quad (2)$$

где  $\psi$  — функция тока, связанная с вектором горизонтальной скорости соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi = \left( -\mathbf{i} \frac{\partial\psi}{\partial y}, j \frac{\partial\psi}{\partial x} \right); \quad \lambda — \text{долгота}; \quad \mu = \cos\theta;$$

$\theta$  — полярный угол (коширота);  $a$  — радиус Земли;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $L_0 \equiv \sqrt{gh}/l \approx \sqrt{gh}/2\Omega \sin 45^\circ$  — радиус Россби — Обухова;  $r$  — коэффициент рэлеевского трения, принят равным  $10 \text{ сут}^{-1}$ ;  $K$  — коэффициент турбулентной вязкости;  $N$  — параметр, определяющий принятую

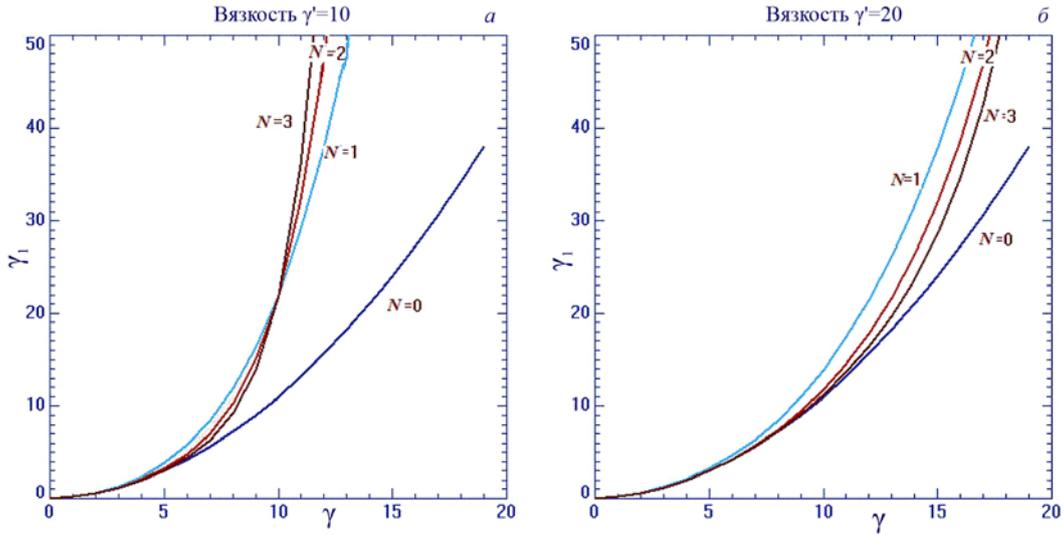


Рис. 1. Графики зависимости вязкости от степени сферической функции для  $\gamma'=10$  (а) и  $\gamma'=20$  (б): синий — рэлеевское трение при  $N=0$ , голубой — обычная турбулентная вязкость при  $N=1$ , красный и коричневый — гипервязкость при  $N=2$  и  $N=3$  соответственно

модель параметризации вязкости. При обычной турбулентной вязкости  $N=1$ , а коэффициент  $K$  равен коэффициенту эффективной турбулентной кинематической вязкости  $\nu$ . Параметризации  $N>1$  соответствуют гипервязкости. Мы рассмотрели два варианта гипервязкости —  $N=2$  и  $N=3$ . Задача решалась в сферической геометрии с разложением возмущений функции тока по сферическим функциям. При аппроксимации полей использовалось треугольное усечение.

После линеаризации подставим решение уравнения для возмущений в виде нормальной моды

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = e^{\sigma' t} \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda). \quad (3)$$

В этом выражении величина  $\sigma'$  определяет скорость роста (или затухания) амплитуды нормальной моды (инкремент/декремент), а суперпозиция сферических функций  $Y_{\gamma}(\mu, \lambda)$  характеризует пространственную структуру нормальной моды. И та и другая величина являются комплексными. После подстановки мы приходим к задаче на собственные значения и собственные функции оператора  $D$ :

$$D\psi'_0 = \sigma'\psi'_0, \quad (4)$$

$$D_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{k_n \Omega} \left\{ \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} \int_S Y_{\gamma}^* J(Y_{\gamma}, G'_n) dS \right\} - \delta_{\gamma\gamma'} \left[ i \frac{2m'}{k_n} + r_1 \right], \quad (5)$$

где  $J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ ;  $G'_n = \Delta \bar{\psi} + k_n \bar{\psi}$ ;

$\sigma' = \sigma/\Omega$ ;  $\gamma = (m, n) = (m_{\gamma}, n_{\gamma})$  — волновой вектор;  $m$  — порядок сферической функции в разложении (зональное волновое число);  $n$  — степень сферической функции  $Y_{\gamma}(\mu, \lambda)$ ,  $r_1 = r/\Omega + Kn^N(n+1)^N/\Omega a^4$ ,  $k_n = n(n+1)$ .

Элементы матрицы  $D$  зависят от среднего потока  $\bar{\psi}(\mu, \lambda)$ . Количество сферических функций в разложении полей  $\psi'$  определяет размер матрицы  $D$ , а параметризация вязкости — диагональные члены матрицы  $r_1$ . Вязкостный член удобно записать в виде  $r_1 = \gamma(\gamma+1)(r_1 + g_N \gamma^N (\gamma+1)^N)$ . При отсутствии турбулентной вязкости  $g_0=0$ . Для обычной турбулентной вязкости  $N=1$ . Для гипервязкостей  $N=2$  и  $N=3$  коэффициенты  $g_1, g_2$  и  $g_3$  рассчитывались из условия равенства гипервязкости обычной турбулентной вязкости для выбранной гармоники. Например, если выбрана гармоника, имеющая степень  $\gamma'$ , то уравнение для нахождения коэффициента  $g_N$  будет иметь вид  $r_1 = g_N \gamma'^N (\gamma'+1)^N$ . На рис. 1 приведены графики зависимостей вязкостного члена от степени сферической функции для  $\gamma' = 10$  (а) и  $\gamma' = 20$  (б).

Мы используем упрощенную параметризацию вязкости. Это связано, в первую очередь, с двумерностью задачи [Данилов, Гурарий, 2000]. Для баротропных процессов, имеющих горизонтальный масштаб, намного превышающий характерную высоту атмосферы, само понятие вязкости становится менее определенным. Кроме эффектов затухания возмущений необходимо учитывать их усиление за счет суммарного воздействия на баротропную составляющую бароклинических волн и вихрей — так называемую отрицательную вязкость. Рассчитать, и даже оценить, эту вынуждающую силу очень сложно. В некоторых случаях, в частности при блокировках в тропосфере, эта вынуждающая сила полностью компенсируется обычной вязкостью и турбулентный вязкостный член можно не учитывать [Дымников, Филатов, 1988; Дымников, 2007]. В линеаризованной задаче на собственные функции и собственные значения, подобные усложнения вообще не имеют смысла и вязкость параметризуют в той

форме, которую мы использовали. Платой за упрощения является невозможность привязать результаты расчетов к конкретным синоптическим ситуациям. Их приходится рассматривать только как статистическую тенденцию. Это, однако, вполне соответствует самому понятию крутильных колебаний, которые выделяются тоже статистически после процедур усреднения и фильтрации [Zorkaltseva et al., 2019].

Упрощенной является и процедура задания среднего потока  $\bar{\psi}(\mu, \lambda)$ , для которого рассчитываются нормальные моды. Мы выбрали в качестве объекта исследования одну из наиболее часто возникающих конфигураций — полярный циклон + среднеширотный антициклон, аппроксимировав функцию тока каждого из вихрей простой гауссианой. В известном смысле эту конфигурацию можно рассматривать как результат усреднения зимних течений в верхней тропосфере — нижней стратосфере. Альтернативным вариантом может быть использование климатического среднего потока, как это часто делается, однако нас интересуют не столько сами нормальные моды, сколько их зависимость от параметров среднего потока, а потому гораздо удобнее задать функцию тока в упрощенном виде. Однако и в таком простом варианте различными могут быть положение центров гауссиан, их размер и амплитуда. Все эти переменные влияют на результаты расчетов, поэтому задача становится многопараметрической. Поскольку решать подобную задачу можно только численными методами, возникает необходимость оценки зависимости ННМ не только от структуры среднего потока, но и от параметров численных экспериментов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Как мы уже отмечали, в зимней стратосфере Северного полушария основными структурными образованиями являются циклонический вихрь над полюсом и антициклонический вихрь в умеренных широтах [Крупномасштабные..., 1988]. Известно, что при небольших меридиональных градиентах скорости зонально симметричное течение полярного вихря устойчиво, причем наименее затухающими являются крупномасштабные нормальные моды. С усилением антициклонического вихря и увеличением градиентов функции тока появляются неустойчивые нормальные моды. Особенно быстро неустойчивость растет при возрастании зональной неоднородности среднего потока. Проверим эти предварительные выводы с помощью численного эксперимента.

Зададим функцию тока среднего течения в виде суммы двух гауссиан  $\bar{\psi} = a_1 \exp\{-k_1 p^2\} + a_2 \exp\{-k_2 p^2\}$ , соответствующих циклоническому вихрю над полюсом и антициклоническому вихрю над средними широтами. Здесь  $p$  — ортодромия (угловое расстояние между центром вихря и произвольной точкой на сфере);  $k_{1,2}$  — коэффициенты, характеризующие ширину гауссианы,  $k_1=1$ ,  $k_2=1$ ,

...6;  $a_1=0.5$ ,  $a_2=0.5$ . В радианах ширина гауссианы связана с коэффициентом  $k$  соотношением  $\Delta = 1/\sqrt{2k}$ . Центр антициклона расположим на широте  $60^\circ$  N. В процессе численного эксперимента мы будем менять амплитуду антициклонического вихря и его ширину. Собственные функции уравнения (4) рассчитываются с точностью до постоянного множителя, поэтому ННМ зависят не от амплитуд вихрей, а от их отношения. Следовательно, решать задачу можно не в абсолютных, а в относительных единицах. Поскольку циклонический вихрь центрирован относительно полюса, соотношение амплитуд вихрей определяет степень отклонения потока жидкости от зонально симметричного, что имеет определяющее значение для развития неустойчивостей. Рассмотрим, как зависят от амплитуды вихрей и параметров численного эксперимента инкременты и пространственная структура наиболее неустойчивых ННМ.

### 1. Скорости роста ННМ

На рис. 2 приведены графики зависимостей характерных времен роста амплитуд наиболее неустойчивых ННМ  $t = 1/\sigma'$  (сут) от амплитуды антициклона  $a_2$  для разного количества гармоник в разложении функции тока, при разных параметризациях вязкости и выбранных гармониках  $l = \gamma' = 10$  и  $l = \gamma' = 20$ . Графики темно-синего цвета соответствуют количеству  $n_{\max}$  гармоник в разложении 13, голубого — 15, красного — 17, коричневого — 19.

Сразу заметим, что для гармоники  $l = \gamma' = 20$  результаты расчетов инкрементов практически совпадают с результатами расчетов для обычной турбулентной вязкости. Для гармоники  $l = \gamma' = 10$  расчеты с более высокими порядками гипервязкости  $N$  показывают увеличение характерного времени роста амплитуд наиболее неустойчивых нормальных мод, т. е. увеличение порядка гипервязкости уменьшает скорость роста неустойчивостей. Однако при самой большой амплитуде антициклона инкременты роста амплитуд практически не зависят от порядка гипервязкости и зависят только от количества гармоник в разложении функции тока.

Необычную зависимость от амплитуды антициклона демонстрируют графики, соответствующие  $n_{\max}=15$  (голубые). При осесимметричном циклоническом среднем потоке течение оказывается более неустойчивым, чем при суперпозиции циклонического вихря и антициклона с небольшой амплитудой. При дальнейшем увеличении амплитуды антициклона неустойчивость усиливается, а характерное время возрастания амплитуды ННМ сокращается. Для количества гармоник в разложении  $n_{\max}=17$  (красные) и  $n_{\max}=19$  (коричневые) такой особенности на графиках нет, степень неустойчивости плавно возрастает с увеличением количества гармоник и амплитуды антициклона. Мы пока не можем объяснить особенности графиков при  $n_{\max}=15$ .

За исключением особенности при  $n_{\max}=15$ , зависимости инкрементов неустойчивостей от амплитуды антициклонического вихря оказались вполне ожидаемыми — темпы роста амплитуды наиболее неустой-

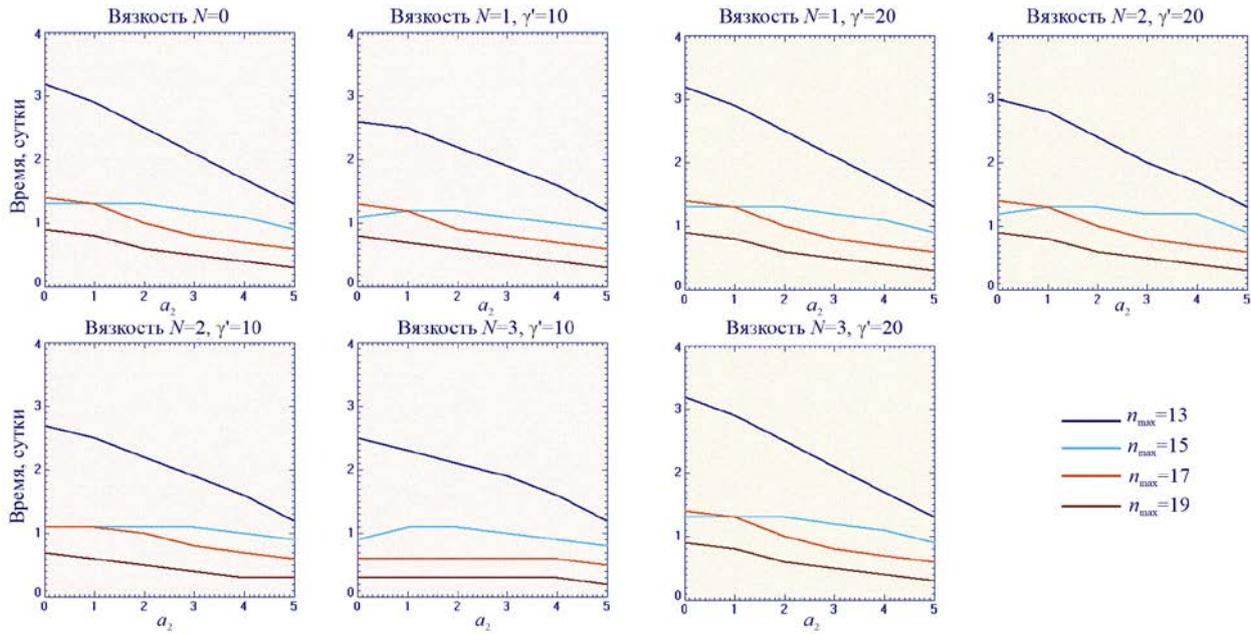


Рис. 2. Графики зависимостей характерных времен роста амплитуд наиболее неустойчивых ННМ от амплитуды антициклона для разного количества гармоник в разложении: темно-синий —  $n_{\max}=13$ , голубой —  $n_{\max}=15$ , красный —  $n_{\max}=17$ , коричневый —  $n_{\max}=19$

чивых мод возрастали с увеличением амплитуды антициклонического вихря. Однако они зависели также от количества гармоник в разложении — при изменении  $n_{\max}$  от 15 до 19 характерное время развития неустойчивости изменяется на 50–100 %. Несколько в меньшей степени, но примерно в тех же пределах результаты расчетов зависят от параметризации гипервязкости. При дальнейшем увеличении количества гармоник в разложении эти различия, видимо, должны уменьшаться. Об этом говорят теоретические оценки сходимости результатов расчетов собственных значений матриц  $D$  и их оценки [Дымников, Скиба, 1986].

## 2. Пространственная структура ННМ

Более сложной задачей является оценка изменений пространственной структуры ННМ в зависимости от изменений среднего потока и параметров численного эксперимента. Для анализа мы использовали два варианта представления пространственной структуры ННМ — карты распределений функции тока ННМ и спектры ННМ в разложении по сферическим функциям. Первый способ удобен для визуального анализа и качественного сравнения. Второй способ менее нагляден, зато позволяет количественно оценить некоторые характеристики структуры ННМ.

На рис. 3, *a, б* в столбцах 1, 2 показаны распределения функции тока наиболее быстро растущих ННМ при разных конфигурациях среднего течения, изображенных в полярной проекции в столбцах 4. Распределения функции тока нормальных мод представлены в горизонтальной (столбцы 1) и полярной (столбцы 2) проекциях. Средний поток во всех случаях представляет собой суперпозицию полярного циклонического вихря и антициклонического вихря в средних широтах. Амплитуда антициклонического

вихря возрастает на рисунках сверху вниз. ННМ построены для 13 (*a*) и 15 (*б*) гармоник в разложении полей при обычной турбулентной вязкости. Над каждой панелью в столбцах 1 указаны характерные времена роста амплитуды ННМ ( $T$ ) и период колебаний ( $T_1$ ). В столбцах 3 построены в изолиниях спектры ННМ в координатах  $n$  (ось X) и  $n+m$  (ось Y). Осесимметричные гармоники располагаются на диагональной синей линии  $y=x$ . На спектры ННМ нанесены графики зависимости энергии сферических функций от степени  $n$  в разложении ННМ по гармоникам. Под энергией сферической гармоники мы понимаем сумму квадратов действительного и мнимого коэффициентов в разложении. Видно, например, что в спектре наиболее неустойчивой моды при осесимметричном среднем течении и 13 гармониках в разложении преобладает всего одна сферическая функция (осесимметричная), для которой  $n=5, m=0$ , время возрастания амплитуды в  $e$  раз составляет 2.64 сут, а период колебаний 7916 сут, т. е. эта ННМ стационарна.

На рис. 4 приведены наиболее неустойчивые ННМ для тех же конфигураций среднего течения, что и на рис. 3, но для 17 (*a*) и 19 (*б*) гармоник в разложении полей функции тока.

Видно, что при числе гармоник в разложениях  $n_{\max}=13$  (*a*) и  $n_{\max}=15$  (*б*) преобладают моды, имеющие осесимметричную структуру (7 случаев из 12). Они имеют разное количество смен знака вдоль меридиана, разные периоды колебаний и разные инкременты роста. При  $n_{\max}=17$  и  $n_{\max}=19$  осесимметричные моды, по крайней мере, не являются самыми неустойчивыми. В 8 случаях из 24 структура наиболее неустойчивых мод почти не изменялась при изменении амплитуды антициклона (6 случаев при  $n_{\max}=17$  и  $n_{\max}=19$  и 2 случая при  $n_{\max}=15$ ), однако в осталь-

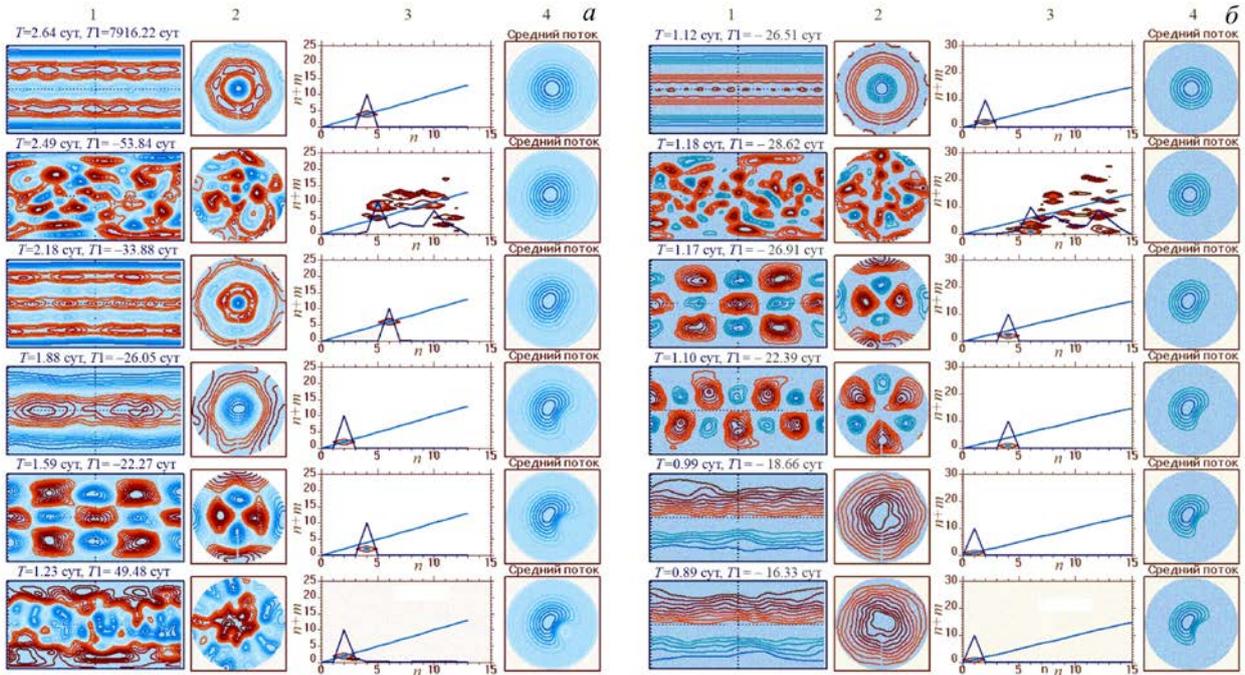


Рис. 3. Наиболее неустойчивые ННМ при разных конфигурациях среднего течения для 13 (а) и 15 (б) гармоник в разложении полей при обычной турбулентной вязкости. На рисунках а и б слева направо приведены функции тока ННМ в горизонтальной и полярных проекциях, спектры ННМ в координатах  $n$  (ось X) и  $n+m$  (ось Y) и распределения функции тока среднего течения в полярной проекции в относительных единицах

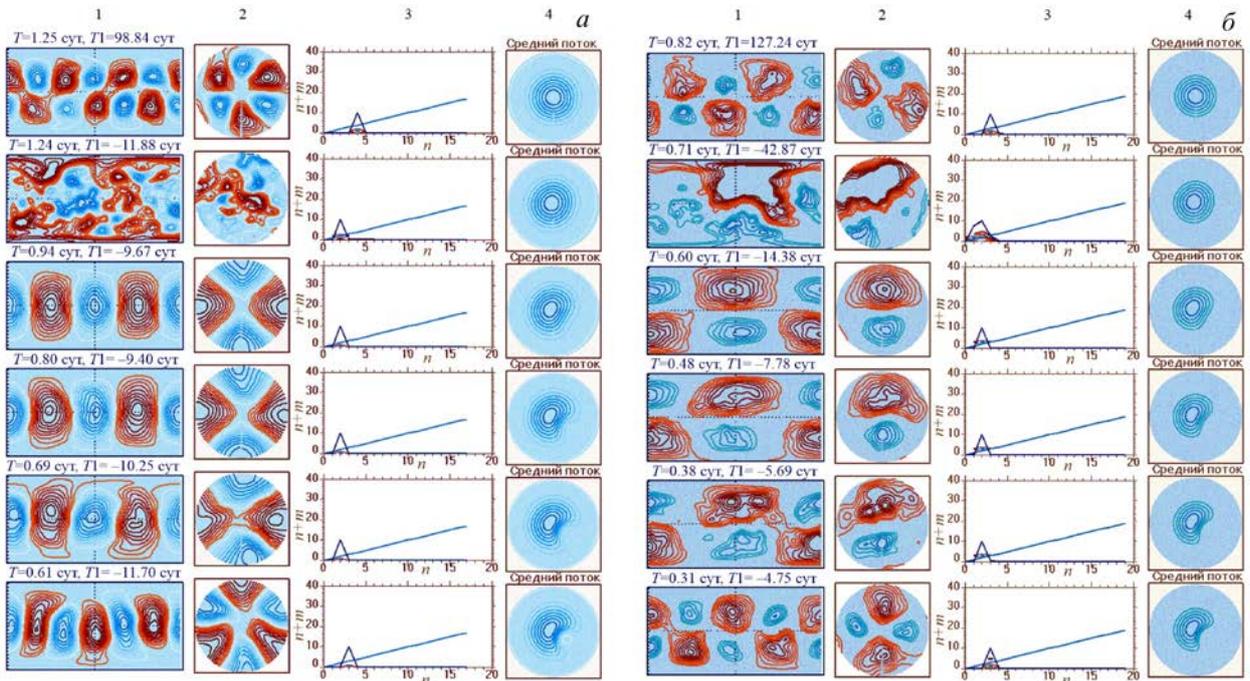


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но для 17 (а) и 19 (б) гармоник в разложении полей

ных случаях изменения структуры неустойчивых мод были большими. Для наглядности мы построили на рис. 5 композитные спектры наиболее неустойчивых мод в координатах  $n, n+m$  при разных параметризациях вязкости (сверху вниз:  $N=0, 1, 2, 3$ ), количестве сферических гармоник в разложении (слева направо:  $n_{\max}=13, 15, 17$  и  $19$ ) и амплитудах ( $a_2=0 \dots 5$ ) антициклонического вихря. Темно-синий цвет соответствует нулевой амплитуде антициклона

(зонально-симметричное течение), синий — 1, светло-синий — 2, бирюзовый — 3, бежевый — 4, оранжевый — 5. При  $N=0$  турбулентная вязкость отсутствует,  $N=1$  — обычная турбулентная вязкость,  $N=2, 3$  соответствуют гипervязкостям степеней 2 и 3.

Результаты расчетов спектров показывают, что структура наиболее неустойчивых ННМ сильно зависит от количества гармоник в разложении, это видно и на рис. 3, 4, и на рис. 5. Зависимость спектров

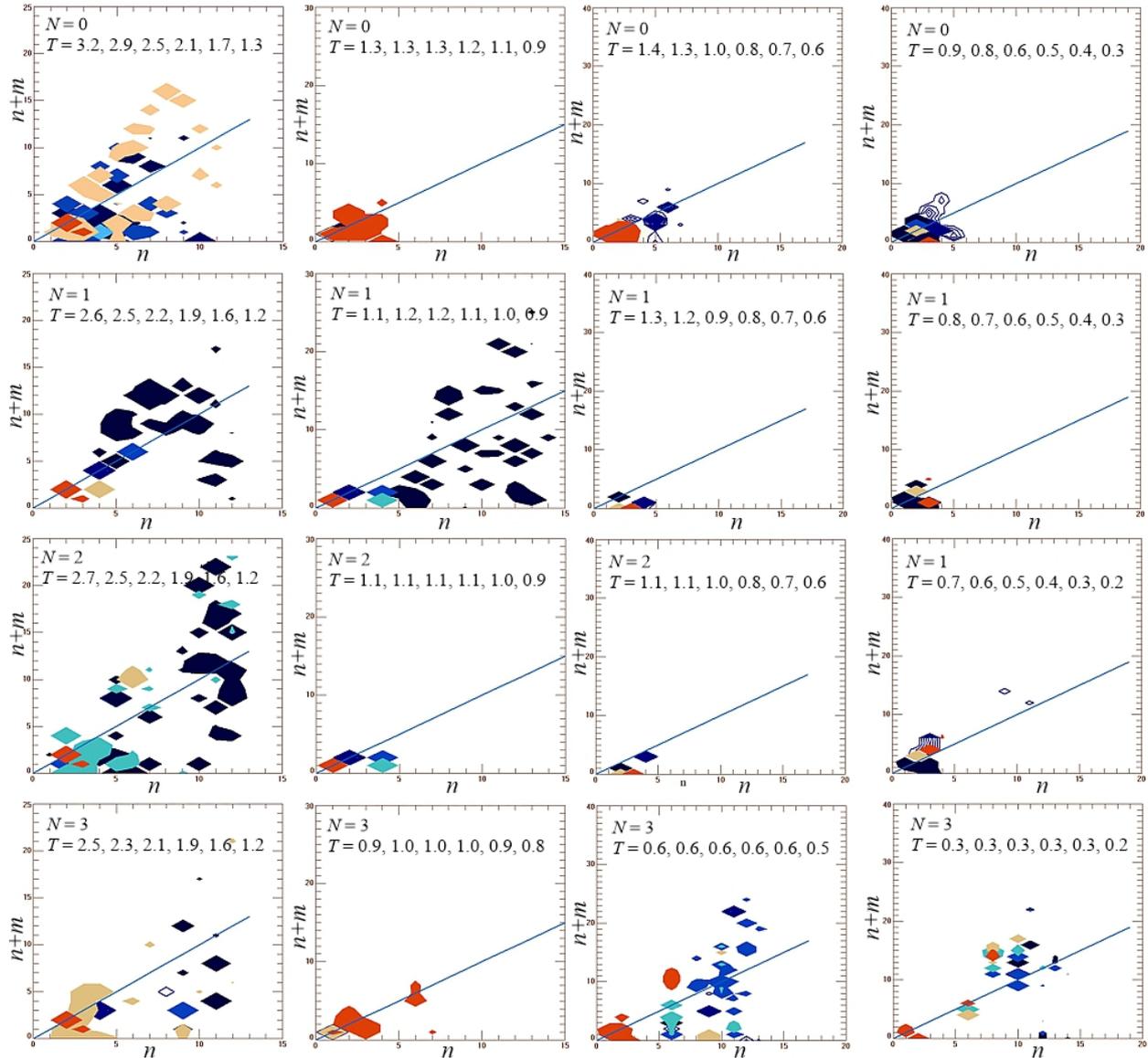


Рис. 5. Композитные спектры наиболее неустойчивых НМ при параметризациях вязкости  $N=0, 1, 2, 3$  (сверху вниз), количестве сферических гармоник в разложении  $n_{\max}=13, 15, 17, 19$  (слева направо) и разных амплитудах антициклонического вихря (выделены цветом)  $l = \gamma' = 10$ . На каждой панели приведены значения характерного времени  $T$  роста амплитуды наиболее неустойчивых НМ

от степени гипервязкости, видимо, несколько меньше.

Спектральное представление структуры НМ на рис. 5 неудобно для выяснения закономерностей появления НМ с той или иной пространственной структурой, особенно в тех случаях, когда структура НМ сложная, включающая большое количество гармоник в разложении. На рис. 6 мы построили графики зависимости от амплитуды антициклона  $a_2$  средних значений степени сферических функций в разложении для  $l = \gamma' = 10$ . Панели соответствуют расчетам с параметризациями вязкости  $N=0, 1, 2, 3$ . Во всех случаях учитывалось рэлеевское трение с характерным временем затухания 10 сут.

За исключением результатов расчетов для гипервязкости  $N=3$ , одинаковым образом ведут себя графики зависимостей средних степеней сферических

функций при количестве гармоник в разложении  $n_{\max}=17$  (красные) и  $n_{\max}=19$  (коричневые). С увеличением амплитуды антициклона средняя степень сферических функций сначала убывает, а затем возрастает, т. е. сначала структура НМ становится более крупномасштабной, а затем в разложении снова появляются более высокие гармоники. Поведение графиков при  $n_{\max}=13$  (синие) и  $n_{\max}=15$  (голубые) носит более сложный характер.

Следует отметить, что мы выделили только тенденции изменений структуры НМ в зависимости от различных факторов. В отличие от инкрементов НМ, демонстрирующих хорошо выраженные устойчивые зависимости, спектры НМ при изменении параметров задачи меняются более хаотично, и невозможно предсказать, какую структуру будет иметь неустойчивая НМ в том или ином случае при том

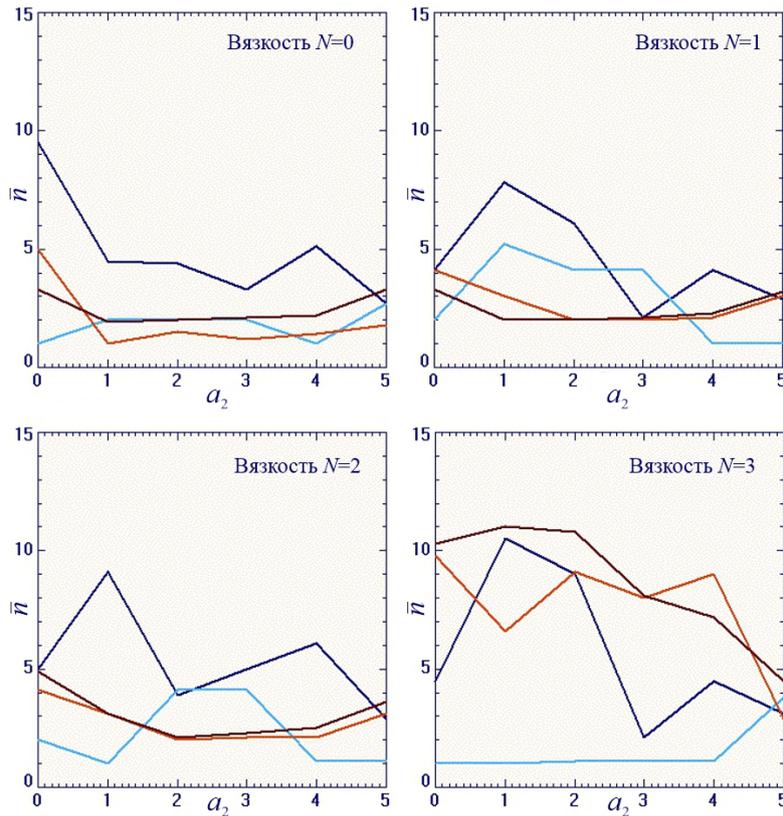


Рис. 6. Графики зависимостей средних степеней сферических функций в разложении ННМ от амплитуды антициклона  $a_2$  для разного количества гармоник в разложении: темно-синий —  $n_{\max}=13$ , голубой —  $n_{\max}=15$ , красный —  $n_{\max}=17$ , коричневый —  $n_{\max}=19$ ;  $\gamma'=10$

или ином среднем потоке. Это существенно снижает ценность метода ННМ при предсказании структуры развивающихся течений. Видимо, без учета нелинейности процессов взаимодействия установить структуру течений при развитии неустойчивости будет очень сложно. Этот вывод относится и к интерпретации наблюдаемых колебаний, включая крутильные колебания. Осесимметричные наиболее быстро растущие моды появляются довольно часто, однако они сильно различаются по меридиональной структуре, периодам колебаний, инкрементам. Наконец, остается нерешенной проблема меридионального распространения колебаний. Эффект меридиональных перемещений можно увидеть в высоких широтах при анализе действительной и мнимой компонент осесимметричных ННМ, однако он не носит глобального характера и мы не можем подтвердить его количественными расчетами. В целом проблема интерпретации крутильных колебаний остается нерешенной.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены численные расчеты ННМ в баротропной квазигеострофической модели течения, обусловленного суперпозицией циклонического и антициклонического вихрей. Эта структура потока часто встречается в циркуляции зимней атмосферы в верхних слоях тропосферы или нижней стратосферы. В зависимости от амплитуды, структуры и положения вихрей среднее течение может быть либо устойчи-

вым, либо неустойчивым. Для исследования начальной стадии развития неустойчивостей часто используют метод нормальных мод, который позволяет в линейном приближении оценить пороги возникновения неустойчивости в зависимости от структуры среднего течения. Метод нормальных мод может быть использован для интерпретации наблюдаемых в атмосфере колебаний. Оба типа задач решаются численно, поэтому рассчитанные ННМ зависят не только от структуры среднего потока, но и от параметров численного эксперимента. В нашем случае параметрами эксперимента были количество гармоник, использованных в разложении полей возмущений функции тока, и параметризации вязкости. Оценке подлежали, во-первых, зависимости ННМ от среднего потока и, во-вторых, зависимости от параметров экспериментов.

Поведение инкрементов наиболее быстро растущих ННМ в зависимости от внешних условий оказалось более простым, чем структуры ННМ. Неустойчивость течения всегда возрастала с увеличением амплитуды антициклона, конечно, в разной степени при разных параметризациях вязкости и количестве сферических гармоник в разложении полей возмущений функции тока. Более сложной оказалась ситуация с пространственной структурой ННМ. Даже относительно небольшие изменения параметров эксперимента и среднего потока (амплитуды антициклона) существенно меняли структуру наиболее неустойчивых ННМ. В среднем с увеличением амплитуды антициклона и количества гармоник в раз-

ложении структура неустойчивых мод становилась более крупномасштабной, в ней преобладали сферические функции степеней  $n=1, 2$ , однако это было не всегда. Менее сильно на структуру ННМ влияла параметризация вязкости.

Довольно часто среди наиболее быстро растущих ННМ появлялись осесимметричные колебания, однако они сильно различались по меридиональной структуре, периодам и инкрементам. Кроме того, они не обеспечивали меридиональное распространение возмущений, что характерно для крутильных колебаний. В этом отношении проведенные численные эксперименты не дали каких-либо убедительных подтверждений в пользу гипотезы о крутильных колебаниях как собственных колебаниях атмосферы в случае среднего потока, обусловленного суперпозицией течений полярный циклон + антициклон.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (субсидия № 075-ГЗ/Ц3569/278).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Данилов С.Д., Гурарий Д. Квазидвумерная турбулентность. *УФН*. 2000. Т. 170, № 9. С. 921–969. DOI: [10.3367/UFNr.0170.200009a.0921](https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200009a.0921).
- Дикий Л.А. *Теория колебаний земной атмосферы*. Л.: Гидрометеоздат, 1969. 194 с.
- Дымников В.П. *Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов*. М.: ИВМ РАН, 2007. 283 с.
- Дымников В.П., Скиба Ю.Н. Баротропная неустойчивость зонально-несимметричных атмосферных потоков. *Вычислительные процессы и системы*. Вып. 4. М.: Наука, 1986. С. 63–104.
- Дымников В.П., Филатов А.Н. *Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов*. М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1988. 140 с.
- Крупномасштабные динамические процессы в атмосфере*. М.: Мир, 1988. С. 306–335.
- Мордвинов В.И., Латышева И.В. *Теория общей циркуляции атмосферы, изменчивость крупномасштабных процессов*. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 197 с.
- Мордвинов В.И., Зоркальцева О.С. Нормальные моды как причина крупномасштабных колебаний в тропосфере и стратосфере. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2022. Т. 58, № 2. С. 1–11. DOI: [10.31857/S0002351522020092](https://doi.org/10.31857/S0002351522020092).
- Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Гидродинамические неустойчивости в тахоклине, обусловленные вариациями толщины слоя и неоднородностями среднего потока. *Солнечно-земная физика*. 2013. Вып. 23. С. 3–12.
- Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Влияние магнитного поля и конфигурации среднего течения на пространственную структуру и скорость роста нормальных мод. *Солнечно-земная физика*. 2023. Т. 9, № 4. С. 134–146. DOI: [10.12737/szf94202315](https://doi.org/10.12737/szf94202315).
- Яглом М.А. Динамика крупномасштабных процессов в баротропной атмосфере. *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* 1953. № 4. С. 346–369.
- Blackmon M.L., Lee Y., Wallace J.M. Horizontal structure of 500 mb height fluctuations with long, intermediate and short time scales. *J. Atmos. Sci.* 1984a. Vol. 41. P. 961–980. DOI: [10.1175/1520-0469\(1984\)041<0961:HSOMHF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1984)041<0961:HSOMHF>2.0.CO;2).
- Blackmon M.L., Lee Y., Wallace J.M., Hsu H. Time variation of 500 mb height fluctuations with long, intermediate and short time scales as deduced from lag-correlation statistics. *J. Atmos. Sci.* 1984b. Vol. 41, iss. 6. P. 981–991. DOI: [10.1175/1520-0469\(1984\)041<0981:TVOMHF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1984)041<0981:TVOMHF>2.0.CO;2).
- Branstator G. A Striking example of the atmosphere's leading travelling pattern. *J. Atmos. Sci.* 1987. Vol. 44. P. 2310–2323.
- Branstator G., Held I. Westward propagating normal modes in the presence of stationary background waves. *J. Atmos. Sci.* 1995. Vol. 52. P. 247–262.
- Dikpati M., Gilman P.A. Analysis of hydrodynamic stability of solar tachocline latitudinal differential rotation using a shallow water model. *Astrophys. J. Papers*. 2001. Vol. 551, no. 1. P. 536–564. DOI: [10.1086/320080](https://doi.org/10.1086/320080).
- Kasahara A. Effect of zonal flows on the free oscillations of a barotropic atmosphere. *J. Atmos. Sci.* 1980. Vol. 37, iss. 5. P. 917–929. DOI: [10.1175/1520-0469\(1980\)037<0917:EOZFOT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<0917:EOZFOT>2.0.CO;2).
- Koval A.V., Gavrilo N.M., Pogoreltsev A.I., Shevchuk N.O. Influence of solar activity on penetration of traveling planetary-scale waves from the troposphere into the thermosphere. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018. Vol. 123, no. 8. P. 6888–6903. DOI: [10.1029/2018JA025680](https://doi.org/10.1029/2018JA025680), 08.2018.
- Longuet-Higgins M.S. Planetary waves on a rotating sphere. *Proc. Royal Soc., Series A*. 1964. Vol. 279, iss. 1379. P. 446–473.
- Longuet-Higgins M.S. The eigenfunctions of Laplace's tidal equation over a sphere. *Math. and Phys. Sci.* London, 1968. Vol. 262. P. 511–607. DOI: [10.1098/RSTA.1968.0003](https://doi.org/10.1098/RSTA.1968.0003).
- Madden R.A. Large-scale free Rossby waves in the atmosphere — an update. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2007. Vol. 59. P. 571–590. DOI: [10.1111/j.1600-0870.2007.00257.x](https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.2007.00257.x).
- Pogoreltsev A.I., Kanukhina A.Yu., Suvorova E.V., Savenkova E. Variability of Planetary Waves as a Signature of Possible Climatic Changes. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2009. Vol. 71, iss. 14–15. P. 1529–1539. DOI: [10.1016/J.JASTP.2009.05.011](https://doi.org/10.1016/J.JASTP.2009.05.011).
- Simmons A.J., Wallace J.M., Branstator G.W. Barotropic wave propagation and instability, and atmospheric teleconnection patterns. *J. Atmos. Sci.* 1983. Vol. 40, no. 6. P. 1363–1392.
- Zorkaltseva O.S., Mordvinov V.I., Devyatova E.V., Dombrovskaya N.S. Method for calculating torsional oscillations in Earth's atmosphere from NCEP/NCAR, MERRA-2, ECMWF ERA-40, and ERA-INTERIM. *Solar-Terr. Phys.* 2019. Vol. 5, iss. 1. P. 69–76. DOI: [10.12737/stp-501201910](https://doi.org/10.12737/stp-501201910).

Как цитировать эту статью:

Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Зависимость нормальных мод баротропного уравнения вихря от структуры среднего течения и параметров численного моделирования. *Солнечно-земная физика*. 2024. Т. 10, № 4. С. 22–30. DOI: [10.12737/szf-104202403](https://doi.org/10.12737/szf-104202403).