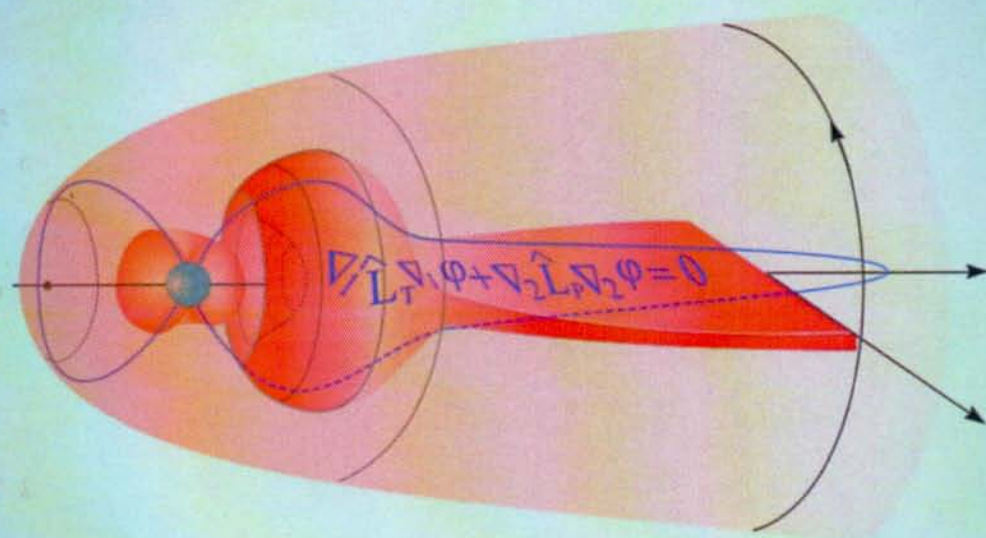


А.С. Леонович  
В.А. Мазур

# ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МГД-КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСФЕРЫ



УДК 537.84; 550.38

ББК 22.632

Л 47

Леонович А. С., Мазур В. А. **Линейная теория МГД-колебаний магнитосферы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. - 480 с. — ISBN 978-5-9221-1687-9.

В монографии дано систематическое изложение теории МГД-колебаний неоднородной магнитосферной плазмы. Оно построено по принципу постепенного усложнения используемых моделей среды. Последовательно рассматриваются МГД-колебания в однородной плазме, а также в одно-, двух- и трехмерно-неоднородных моделях магнитосферы. Исследованы особенности процессов генерации и распространения МГД-колебаний в моделях среды, параметры которых максимально приближены к реальности. Рассмотренные в монографии волновые процессы дают в совокупности общую картину МГД-колебаний магнитосферы.

Исследования высокоширотных неустойчивых МГД-колебаний, представленные в монографии, выполнены в рамках работы по проекту Российского научного фонда № 14-37-00027. Они направлены на изучение волновых процессов в области токового слоя геомагнитного хвоста и сопряженных с ними областях высокоширотной ионосферы в периоды геомагнитных возмущений. Результаты этих исследований позволили определить новые направления, в которых они могут развиваться в дальнейшем.

Для научных работников и специалистов в области геомагнетизма, а также студентов и аспирантов, обучающихся по соответствующим специальностям.

Рецензенты:

академик *Л. М. Зеленый*

д.ф.-м.н. *Е.Н. Федоров*

д.ф.-м.н. *Д. Р. Шкляр*

ISBN 978-5-9221-1687-9

© ФИЗМАТЛИТ, 2016

© А. С. Леонович, В. А. Мазур, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения . . . . .	9
Предисловие . . . . .	11
Введение . . . . .	12
<b>Глава 1. Гидромагнитные колебания однородной плазмы . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>Глава 2. МГД-колебания в одномерно-неоднородных моделях магнитосферы . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1. Качественная картина распространения МГД-волн в одномерно-неоднородной плазме . . . . .	32
2.2. Модель плавного переходного слоя и основное уравнение для МГД-колебаний . . . . .	35
2.3. Отражение БМЗ-волны от переходного слоя в холодной плазме. Альфвеновский резонанс . . . . .	36
2.4. Возбуждение альфвеновского резонанса волновым импульсом . . . . .	41
2.5. Энергетический баланс в задаче о падении и отражении БМЗ-волны от переходного слоя с точкой альфвеновского резонанса . . . . .	47
2.6. Отражение быстрого магнитного звука от переходного слоя в «теплой» плазме. Альфвеновский и магнитозвуковой резонансы . . . . .	53
2.7. Альфвеновский резонанс в неидеальной плазме. Кинетические альфвеновские волны . . . . .	62
2.8. Волновод для БМЗ-волн . . . . .	69
2.9. Волновод для квазипродольных альфвеновских волн . . . . .	74
2.10. Волноводы для кинетических альфвеновских волн в «холодной» плазме. Затухание волноводных мод . . . . .	76
2.11. Волновод для кинетических альфвеновских и БМЗ волн в «теплой» плазме. Резонанс волноводных мод . . . . .	79
2.12. Волноводы в плазменных волокнах . . . . .	83
2.12.1. Аксиально-симметричный плазменный волновод для квазипродольных альфвеновских волн . . . . .	84
2.12.2. Аксиально-симметричный плазменный волновод для кинетических альфвеновских и БМЗ-волн . . . . .	88
2.12.3. О возможности волноводного распространения геомагнитных пульсаций во внешней магнитосфере . . . . .	90

2.13. Прохождение БМЗ-волн через тангенциальный разрыв . . . . .	93
2.13.1. Модель среды и шивка решений МГД-уравнений . . . . .	94
2.13.2. Поток энергии, переносимой БМЗ-волнами через магнитопаузу . . . . .	98
2.14. Перенос импульса из солнечного ветра в магнитосферу потоком БМЗ-волн. Прохождение БМЗ-волн через плавный переходной слой . . . . .	102
2.14.1. Модель среды и основные уравнения . . . . .	104
2.14.2. Расчет изменения функции распределения ионов потоком БМЗ-волн в квазилинейном приближении . . . . .	108
2.14.3. Расчет скорости, приобретаемой магнитосферной плазмой при ее взаимодействии с МГД-волнами из магнитослоя . . . . .	113
2.15. Неустойчивость сдвиговых МГД-течений при наличии и в отсутствие ограничивающих стенок . . . . .	116
2.15.1. Модель среды и основные уравнения . . . . .	117
2.15.2. Типы граничных условий . . . . .	119
2.15.3. Неустойчивость сдвигового течения в безграничной среде . . . . .	121
2.15.4. Неустойчивость сдвигового течения, ограниченного одной неподвижной стенкой . . . . .	125
2.15.5. Неустойчивость сдвигового течения между двумя ограничивающими стенками . . . . .	128
2.16. Неустойчивость геомагнитного хвоста, обусловленная сдвиговым течением на магнитопаузе . . . . .	132
2.16.1. Расчет инкремента МГД-неустойчивости магнитопаузы в модели тангенциального разрыва . . . . .	133
2.16.2. Неустойчивость геомагнитного хвоста в модели с размытой границей . . . . .	140
2.16.3. Неустойчивость глобальных мод МГД-колебаний магнитосферного хвоста . . . . .	142
2.17. Проникновение поля МГД-колебаний из магнитосферы на Землю . . . . .	146
2.17.1. Граничные условия для МГД-волн на верхней границе ионосферы в модели «тонкого слоя» с вертикальным магнитным полем . . . . .	148
2.17.2. Проникновение альфвеновских волн из магнитосферы на Землю в модели околоземной среды с наклонным магнитным полем . . . . .	153
<b>Глава 3. МГД-колебания в двумерно-неоднородных моделях магнитосферы . . . . .</b>	<b>166</b>
3.1. Резонанс БМЗ- и кинетических альфвеновских волн в аксиально-симметричной магнитосфере . . . . .	171
3.1.1. Продольная структура тороидальных альфвеновских волн . . . . .	176
3.1.2. Структура резонансных кинетических альфвеновских волн поперек магнитных оболочек . . . . .	178
3.1.3. Обратное влияние резонансных альфвеновских колебаний на поле БМЗ-волны . . . . .	182
3.2. Альфвеновский резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере . . . . .	183

3.2.1. Модель среды и основные уравнения . . . . .	183
3.2.2. Структура поля резонансной альфвеновской волны . . . . .	187
3.2.3. Структура поля монохроматических БМЗ-колебаний дипольно- подобной магнитосферы . . . . .	189
3.2.4. Распределение амплитуды магнитного поля МГД-колебаний в меридиональной плоскости . . . . .	193
3.3. Возбуждение резонансных альфвеновских волн в дипольноподоб- ной магнитосфере широкополосными источниками . . . . .	197
3.3.1. Монохроматический источник БМЗ-волн . . . . .	199
3.3.2. Импульсный источник БМЗ-волн . . . . .	199
3.3.3. Источник БМЗ-волн в виде волнового пакета (модель суббуре- вых $Pi^2$ ) . . . . .	200
3.3.4. Стохастический источник БМЗ-волн (модель дневных $Pc3$ ) . . . . .	202
3.4. Магнитозвуковой резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере . . . . .	205
3.4.1. Самосогласованная модель дипольной магнитосферы с враща- ющейся плазмой . . . . .	205
3.4.2. Основные уравнения для магнитозвуковых волн . . . . .	211
3.4.3. Структура стоячих ММЗ-волн вдоль силовых линий магнитно- го поля . . . . .	213
3.4.4. Структура резонансных ММЗ-колебаний поперек магнитных оболочек . . . . .	215
3.4.5. Структура компонент поля резонансных ММЗ-колебаний вблизи резонансной поверхности . . . . .	217
3.4.6. Численное решение уравнений для резонансных ММЗ-волн . . . . .	218
3.5. БМЗ-колебания дипольноподобной магнитосферы . . . . .	221
3.5.1. Структура БМЗ-колебаний вдоль силовых линий магнитного поля . . . . .	222
3.5.2. Структура БМЗ-колебаний дипольноподобной магнитосферы поперек магнитных оболочек . . . . .	228
3.6. БМЗ-резонаторы в магнитосфере Земли . . . . .	229
3.6.1. Качественное обоснование существования БМЗ-резонаторов в магнитосфере . . . . .	230
3.6.2. БМЗ-резонаторы в дневной магнитосфере . . . . .	236
3.6.3. БМЗ-резонатор в ближнем плазменном слое . . . . .	241
3.7. Монохроматические поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны с $m \gg 1$ в дипольноподобной магнитосфере . . . . .	248
3.7.1. Формулировка задачи о структуре альфвеновских колебаний в ВКБ-приближении . . . . .	249
3.7.2. Качественное исследование задачи на собственные значения . . . . .	251
3.7.3. Структура альфвеновских волн с $m \gg 1$ вдоль силовых линий магнитного поля . . . . .	257
3.7.4. Диссипация стоячих альфвеновских волн в ионосфере . . . . .	263
3.7.5. Распределение амплитуды альфвеновских колебаний с $m \gg 1$ поперек магнитных оболочек . . . . .	265
3.7.6. Решение вблизи полоидальной резонансной поверхности . . . . .	269
3.7.7. Решение вблизи тороидальной резонансной поверхности . . . . .	272

3.7.8. Глобальная структура альфвеновской волны с $m \gg 1$ (сшивка решений в различных областях) . . . . .	274
3.8. Электромагнитные колебания, индуцируемые на поверхности Земли магнитосферными стоячими альфвеновскими волнами с $m \gg 1$ . . . . .	278
3.9. Линейная трансформация стоячих альфвеновских волн с $m \gg 1$ вблизи тороидальной резонансной поверхности . . . . .	286
3.10. Магнитосферный резонатор для стоячих альфвеновских волн с $m \gg 1$ . . . . .	293
3.11. Альфвеновские волны с $m \gg 1$ , генерируемые в магнитосфере стохастическими источниками . . . . .	297
3.11.1. Выражения для физических компонент магнитного поля альфвеновских колебаний . . . . .	297
3.11.2. Статистические свойства источника колебаний . . . . .	301
3.11.3. Спектральные и поляризационные свойства альфвеновских шумов . . . . .	302
3.12. Широкополосные стоячие альфвеновские волны с $m \gg 1$ , генерируемые коррелированными источниками . . . . .	309
3.12.1. Отклик альфвеновских колебаний магнитосферы на мгновенный импульс . . . . .	311
3.12.2. Выводы теории и наблюдения . . . . .	317
3.13. Модельное уравнение для определения поперечной структуры стоячих альфвеновских волн в магнитосфере . . . . .	320
3.13.1. Вывод однородного модельного уравнения (в отсутствие источника колебаний) . . . . .	321
3.13.2. Неоднородное модельное уравнение . . . . .	325
3.13.3. Аналитическое решение модельного уравнения . . . . .	328
3.13.4. Численное исследование решений модельного уравнения . . . . .	334
3.14. Пространственная структура альфвеновских колебаний, возбуждаемых в магнитосфере локализованным монохроматическим источником . . . . .	337
3.14.1. Структура монохроматических альфвеновских колебаний от источника, локализованного поперек силовых линий магнитного поля . . . . .	338
3.14.2. Поперечная структура стоячих альфвеновских волн от источника, сильно локализованного по одной из поперечных координат . . . . .	340
3.14.3. Поперечная структура стоячих альфвеновских волн от источника, локализованного по двум поперечным координатам . . . . .	342
3.14.4. Возможность измерения поляризационного расщепления спектра собственных альфвеновских колебаний магнитосферы . . . . .	345
3.15. Альфвеновские колебания, генерируемые в магнитосфере импульсными локализованными источниками . . . . .	347
3.15.1. Переход от монохроматических колебаний к нестационарным . . . . .	347
3.15.2. Начальный режим колебаний ( $\tau_N \ll 1$ ) . . . . .	350

3.15.3. Асимптотический режим колебаний ( $\tau_N \gg 1$ ) . . . . .	352
3.15.4. Модель плазмосферы и уравнения для компонент поля стоячих альфвеновских волн . . . . .	358
3.15.5. Расчет поля альфвеновских колебаний в эксперименте «МАССА» . . . . .	361
3.16. Баллонная неустойчивость альфвеновских и ММЗ-колебаний на силовых линиях, проходящих через токовый слой . . . . .	366
3.16.1. Уравнение для баллонных мод . . . . .	366
3.16.2. Модель среды . . . . .	370
3.16.3. Исследование баллонной неустойчивости МГД-колебаний в локальном приближении . . . . .	374
3.16.4. Расчет структуры и спектра стоячих альфвеновских и ММЗ-волн на вытянутых силовых линиях в ВКБ-приближении . . . . .	378
3.17. Сцепленные альфвеновские и ММЗ-моды колебаний в геомагнитном хвосте . . . . .	385
3.17.1. Структура сцепленных мод вдоль силовых линий магнитного поля . . . . .	386
3.17.2. Линейная трансформация альфвеновских и ММЗ-волн в токовом слое . . . . .	392
3.17.3. Структура сцепленных МГД-мод поперек магнитных оболочек . . . . .	396
<b>Глава 4. МГД-колебания в трехмерно-неоднородных моделях магнитосферы.</b> . . . .	<b>403</b>
4.1. Особенности МГД-колебаний в неоднородных моделях магнитосферы разной размерности . . . . .	403
4.1.1. Система координат . . . . .	404
4.1.2. Основные уравнения . . . . .	406
4.1.3. Качественное исследование уравнения характеристик . . . . .	409
Заключение . . . . .	414
<b>Приложение А. Поперечная дисперсия МГД-волн в холодной и горячей плазме.</b> . . . .	<b>424</b>
<b>Приложение Б. Вывод уравнения для МГД-колебаний в одномерно-неоднородной движущейся плазме.</b> . . . .	<b>425</b>
<b>Приложение В. Модель спектральной функции БМЗ-колебаний солнечного ветра.</b> . . . .	<b>427</b>
<b>Приложение Г. Об устойчивости МГД-колебаний сдвигового слоя с <math>k_t \parallel B_0</math> при <math>\beta^* &lt; 1</math> в безграничной среде.</b> . . . .	<b>429</b>
<b>Приложение Д. Вывод уравнений на потенциалы <math>\varphi</math> и <math>\psi</math> для МГД-волн в «теплой» плазме в криволинейной ортогональной системе координат <math>(x^1, x^2, x^3)</math>.</b> . . . .	<b>430</b>
<b>Приложение Е. ВКБ-решение продольной задачи для БМЗ-волн, имеющих две точки поворота на силовой линии.</b> . . . .	<b>433</b>
<b>Приложение Ж. Интегралы от функций, описывающих поперечную структуру стоячих альфвеновских волн.</b> . . . .	<b>435</b>

Приложение З. <b>Определение параметров эллипса поперечной поляризации стохастических колебаний</b> . . . . .	436
Приложение И. <b>Определение коэффициентов дифференциального уравнения по заданному ВКБ-решению</b> . . . . .	438
Приложение К. <b>Строгий вывод поперечного модельного уравнения для стоячих альфвеновских волн в случае <math>\kappa \ll 1</math></b> . . . . .	439
Приложение Л. <b>Определение характеристик <math>\eta_0</math></b> . . . . .	442
Приложение М. <b>Вычисление интегралов вблизи характеристик <math>\pm\eta_1, \pm\eta_4</math> и <math>\eta_0</math></b> . . . . .	443
Приложение Н. <b>Вычисление интегралов вблизи характеристик <math>\pm\eta_2, \pm\eta_3, \pm\eta_5</math> и <math>\pm\eta_6</math></b> . . . . .	444
Приложение О. <b>Определение формы силовой линии по заданным компонентам фонового магнитного поля</b> . . . . .	446
Приложение П. <b>Определение триортогональной системы координат, связанной с силовыми линиями магнитного поля</b> . . . . .	448
Приложение Р. <b>Определение компонент метрического тензора в криволинейной ортогональной системе координат</b> . . . . .	450
Приложение С. <b>Коэффициенты уравнения для сцепленных мод МГД-колебаний</b> . . . . .	451
Список литературы . . . . .	452
Предметный указатель . . . . .	475



## Основные обозначения

- $\bar{\mathbf{B}}$  — вектор полного магнитного поля  
 $\mathbf{B}_0$  — вектор фонового магнитного поля  
 $\mathbf{B}$  — вектор возмущенного магнитного поля  
 $c_s$  — скорость распространения ММЗ-волн  
 $\mathbf{E}$  — вектор возмущенного электрического поля  
 $f(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  — функция распределения частиц по скоростям  
 $\mathbf{j}$  — вектор возмущенного тока  
 $k_{\parallel}$  — продольная компонента волнового вектора  
 $\mathbf{k}_{\perp}$  — поперечный волновой вектор  
 $k_{\perp}$  — модуль поперечного волнового вектора  
 $\mathbf{k}_t$  — волновой вектор, тангенциальный к слою  
 $\hat{L}_P$  — продольный оператор для полоидальных альфвеновских волн  
 $\hat{L}_T$  — продольный оператор для тороидальных альфвеновских волн  
 $M = \bar{v}_0 \frac{\cos \phi}{v_s}$  — число Маха, определенное по проекции  $\mathbf{v}_0$  на  $\mathbf{k}_t$   
 $\bar{M} = M \sqrt{\frac{v_s^2}{v_s^2 + v_A^2}}$  — модифицированное число Маха  
 $M_A = M \frac{v_s}{v_A}$  — число Маха, определенное по альфвеновской скорости  
 $\bar{P}$  — давление плазмы  
 $P$  — возмущенное давление плазмы  
 $P_0$  — давление фоновой плазмы  
 $P_N(x^1, x^3)$  — собственные функции полоидальных альфвеновских волн  
 $s_e = c/\omega_{pe}$  — скин-длина электронов в плазме  
 $S_N(x^1, x^3)$  — продольные собственные функции ММЗ-волн  
 $T_i$  — температура ионов фоновой плазмы  
 $T_e$  — температура электронов фоновой плазмы  
 $T_N(x^1, x^3)$  — собственные функции тороидальных альфвеновских волн  
 $\bar{\mathbf{v}}$  — вектор полной скорости движения плазмы  
 $\mathbf{v}_0$  — вектор скорости движения фоновой плазмы  
 $\mathbf{v}$  — вектор возмущенной скорости движения плазмы  
 $v_A$  — скорость Альфвена

- $v_g$  — групповая скорость распространения волн  
 $\mathbf{v}_{gA}$  — вектор групповой скорости альфвеновских волн  
 $v_s$  — скорость звука в плазме  
 $v_f$  — скорость распространения БМЗ-волн в плазме  
 $\mathbf{v}_{gf}$  — вектор групповой скорости БМЗ-волн  
 $\mathbf{v}_{gs}$  — вектор групповой скорости ММЗ-волн  
 $v_e$  — тепловая скорость электронов плазмы  
 $v_i$  — тепловая скорость ионов плазмы  
 $v_{es}$  — тепловая скорость ионов по электронной температуре  
 $x_{PN}^1$  — координата полоидальной резонансной поверхности для альфвеновских волн  
 $x_{TN}^1$  — координата тороидальной резонансной поверхности для альфвеновских волн  
 $x_{sN}^1$  — координата резонансной поверхности для ММЗ-волн  
 $\beta = 8\pi p_0 / B_0^2$  — плазменный параметр  
 $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы  
 $\bar{\rho}$  — плотность плазмы  
 $\rho_0$  — плотность фоновой плазмы  
 $\rho$  — возмущенная плотность плазмы  
 $\rho_i = v_i / \omega_i$  — ларморовский радиус ионов  
 $\rho_s = v_{es} / \omega_i$  — ларморовский радиус ионов по электронной температуре  
 $\hat{\sigma}$  — тензор проводимости плазмы  
 $\Sigma_H$  — интегральная холловская проводимость ионосферы  
 $\Sigma_P$  — интегральная педерсеновская проводимость ионосферы  
 $\omega_e$  — электронная циклотронная частота  
 $\omega_i$  — ионная циклотронная частота  
 $\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота  
 $\omega_{pi}$  — ионная плазменная частота  
 $\Omega_{PN}$  — собственные частоты полоидальных альфвеновских волн в дипольноподобной магнитосфере  
 $\Omega_{sN}$  — собственные частоты ММЗ-волн в дипольноподобной магнитосфере  
 $\Omega_{TN}$  — собственные частоты тороидальных альфвеновских волн в дипольноподобной магнитосфере  
 $\Omega_N$  — собственные частоты сцепленных альфвеновских и ММЗ-волн в дипольноподобной магнитосфере  
 $\omega_{mnj}$  — собственные частоты резонаторов для БМЗ-волн в аксиально-симметричных моделях магнитосферы

## Предисловие

Концепция этой книги складывалась постепенно, по мере того, как мы все больше погружались в проблематику рассматриваемой области исследований. МГД-колебания магнитосферы оказались настолько разнообразны, что со временем, решая все новые и новые задачи, начинаешь воспринимать их как какую-то картинку в калейдоскопе с большим набором составляющих ее элементов. Отдельные элементы меняются местами, становятся то ярче, то тусклее, а сама картинка все время меняется. Хочется ее зафиксировать и рассмотреть подробнее, не торопясь. Эта монография представляет собой такую попытку: дать основные теоретические представления об МГД-колебаниях магнитосферы, сложившиеся у нас к настоящему времени.

Основным побудительным мотивом для ее написания явилось то, что в имеющейся в настоящее время литературе, как нам кажется, отсутствует систематическое изложение теории МГД-колебаний неоднородной магнитосферной плазмы. Имеется ряд прекрасных монографий, посвященных разнообразным типам геомагнитных пульсаций, где для их интерпретации привлекаются различные волновые процессы. Однако нет последовательного изложения механизмов генерации и распространения МГД-волн (каковыми и являются геомагнитные пульсации) в неоднородной магнитосфере.

Идея написать систематическое изложение теории магнитосферных МГД-колебаний возникла у нас где-то в 2006 году. Однако непосредственно к работе над текстом мы приступили только в конце 2014 года. К огромному сожалению, вскоре после начала работы над монографией Виталия Айзиковича Мазура не стало. Это стало тяжелой потерей для всех его учеников, к которым принадлежу и я. Нам всем очень его не хватает. Вместе с Виталием Айзиковичем мы успели составить только общий план монографии и он написал Введение. Дальнейшую работу пришлось сделать мне. Я очень благодарен другим ученикам В. А. Мазура: Ирине Сергеевне Дмитриенко, Дмитрию Юрьевичу Климушкину, Даниилу Анатольевичу Козлову и Павлу Николаевичу Магеру, взявшим на себя труд по прочтению и корректировке окончательного текста монографии.

Все недочеты по оформлению и изложению, которые читатель встретит на страницах этой книги, остаются на моей совести. Буду очень благодарен, если о замеченных ошибках и опечатках вы сообщите мне по E-mail: leon@iszf.irk.ru.

*Анатолий Леонович*  
18.10.2015

## Введение

Магнитогидродинамические (МГД, гидромагнитные) колебания магнитосферы Земли привлекают пристальное внимание исследователей на протяжении многих лет. В наблюдениях они обнаруживаются как высокочастотная составляющая вариаций геомагнитного поля в диапазоне от 1 мГц до 5 Гц. В отличие от медленных вариаций геомагнитного поля эти колебания характеризуются ярко выраженной периодичностью, в связи с чем и получили название геомагнитных пульсаций. Многие из них регистрируются на поверхности Земли, что дает возможность использовать их для диагностики состояния магнитосферной плазмы (см. [1, 2]).

Пульсации геомагнитного поля были обнаружены более века назад (см. [3], а также [4] и [5], где даны ссылки на ранние работы Кристиана Биркеланда 1901 г.<sup>1)</sup>) и после этого в течение многих лет изучались наземными методами. Но их физическая природа стала ясной только после создания Ханнесом Альфвенем магнитной гидродинамики [6] и открытия на заре космических исследований магнитосферы и ее основных структурных элементов [7–10]. После этого стало очевидно, что геомагнитные пульсации — это МГД-колебания магнитосферы. В этом убеждает оценка характерной частоты основного тона магнитосферных колебаний  $f \sim v_A/L$ , где  $v_A$  — характерное значение скорости Альфвена в магнитосфере, а  $L$  — характерный масштаб области колебаний. Полагая в магнитосфере характерные величины  $v_A \sim 10^3$  км/с,  $L \sim 10^5$  км, получаем  $f \sim 10$  мГц. Более высокие частоты можно трактовать как колебания ограниченных областей магнитосферы с большими значениями  $v_A$  (и, возможно, с меньшими значениями  $L$ ) либо как гармоники основного тона. Определенную трудность представляет объяснение существования самых низкочастотных колебаний с частотой  $f \sim 1$  мГц. Но и они находят свою вполне удовлетворительную теоретическую интерпретацию (см. раздел 3.6.3 настоящей монографии).

Классификация геомагнитных пульсаций, принятая на XIII Генеральной ассамблее МГСС в 1963 году, основана на их простых морфологических признаках. В первую очередь они разделяются на два больших класса: непрерывные Рс (pulsations continuous) — квазисинусоидальные колебания, продолжающиеся десятки и сотни периодов,

---

<sup>1)</sup> Birkeland, K., Expédition Norvégienne de 1899–1900 pour l'étude des aurores boréales. Resultats des recherches magnétiques. — Kristiania: Skr. Vid. selsk. 1, No. 1, 80 pp., 12 pls. (1901).

и нерегулярные  $P_i$  (pulsations irregular) длительностью в несколько периодов. Каждый из этих классов разделен на несколько частотных диапазонов. В классе  $P_c$  — это  $P_{c1}$  с периодами от 0,2 с до 5 с,  $P_{c2}$  — 5–10 с,  $P_{c3}$  — 10–45 с,  $P_{c4}$  — 45–150 с,  $P_{c5}$  — 150–600 с и  $P_{c6}$  с периодами более 600 с. В классе  $P_i$  — диапазон  $P_{i1}$  с периодами менее 40 с,  $P_{i2}$  — 40–150 с и  $P_{i3}$  — более 150 с. Внутри некоторых частотных диапазонов выделяют различные типы пульсаций и по другим морфологическим признакам. Подробное описание различных типов геомагнитных пульсаций дано в монографиях [1, 11, 12], а также в обзорах [13–17]. Постепенно выяснилось, что проведенное разделение геомагнитных пульсаций на различные типы отражает различие не только их морфологических свойств, но и их физической природы.

За первые полвека исследований геомагнитных пульсаций был накоплен обширный наблюдательный материал, который требовал теоретического осмысления. Первые содержательные теоретические работы появились сразу после создания магнитной гидродинамики, еще до экспериментального открытия магнитосферы [18, 19]. Наличие плазменной оболочки Земли в них постулировалось в качестве гипотезы. С началом космической эры появился все возрастающий поток экспериментальных данных с космических аппаратов. Одновременно совершенствовались старые и разрабатывались новые, более информативные методы наземных исследований. Вместе с этим ускоряющимися темпами развивалась и теория. В настоящее время теория оказывает большое влияние на выбор направлений экспериментальных исследований. Теоретические соображения определяют научную задачу, для решения которой разрабатывается и проводится космический эксперимент (как правило, многоспутниковый), который осуществляется в тесном взаимодействии с наземными наблюдениями. Полученный экспериментальный материал дает новый импульс теоретическим исследованиям.

Пространственная структура гидромагнитных колебаний магнитосферы определяется главным образом глобальным распределением двух параметров среды — скорости Альфвена  $v_A$  и скорости звука  $v_s$ . Именно эти параметры входят в уравнения, описывающие гидромагнитные колебания плазмы. Свойства гидромагнитных волн в большой степени определяются значением параметра  $\beta = 8\pi P_0/B_0^2 \approx v_s^2/v_A^2$ , представляющего собой отношение газокинетического давления плазмы ( $P_0$ ) к давлению фонового магнитного поля ( $B_0^2/8\pi$ ). В соответствии с принятой в физике плазмы терминологией при  $\beta \ll 1$  плазма называется холодной, при  $\beta \gg 1$  — горячей, а в промежуточном случае,  $\beta \sim 1$ , ее иногда называют «теплой». По этой классификации плазму солнечного ветра можно считать горячей, а плазму магнитосферы — в той или иной степени холодной (кроме плазменного слоя хвоста, где она также горячая). Отметим, что данному выше определению не противоречит ситуация, когда горячая плазма в одной области имеет температуру меньше, чем холодная плазма в другой области. Так, например,

«холодная» плазма внешней магнитосферы горячее «горячей» плазмы солнечного ветра.

Теоретическое исследование МГД-колебаний магнитосферы подразумевает использование некоторой модели среды. Но модель магнитосферы как целого, которая хоть в какой-то степени может претендовать на адекватное ее описание, чрезвычайно сложна (рис. 1). В частности, она должна быть сугубо трехмерной. Эти обстоятельства делают строгое аналитическое исследование колебаний в рамках такой модели почти нереальным. Поэтому приходится прибегать к упрощенным моделям, описывающим отдельные области магнитосферы и колебания в этих областях.

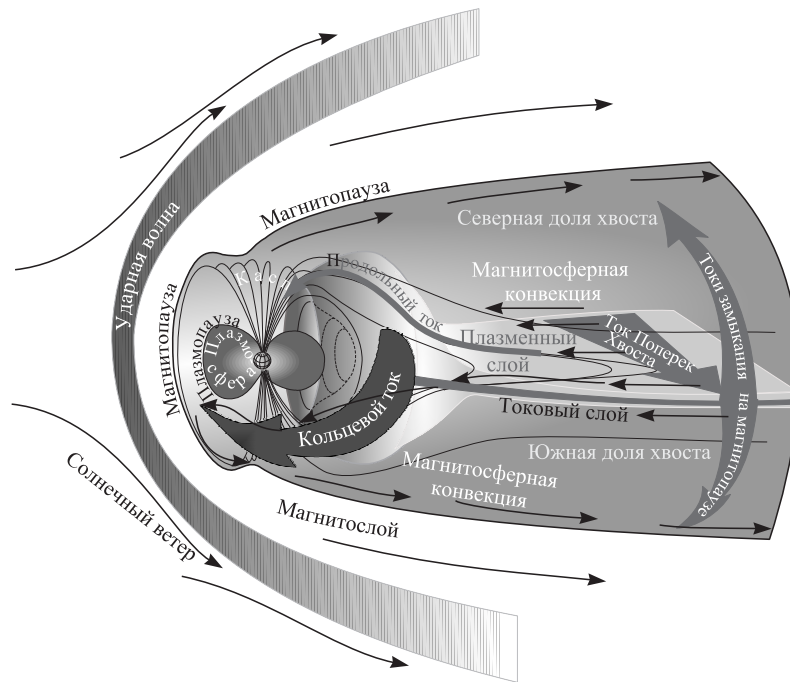


Рис. 1. Основные структурные элементы магнитосферы Земли

Выбираемая модель среды должна удовлетворять двум, в определенном смысле противоположным, требованиям. С одной стороны, она должна отражать главные (для изучаемых колебаний) свойства описываемой области магнитосферы. С другой стороны, она должна по возможности поддаваться простому теоретическому исследованию. Последнее требование связано не только с тем, что оно упрощает жизнь теоретика, но и с тем, что результаты, полученные в рамках простой модели, более наглядны. Ясно, что разные модели в разном соотноше-

нии удовлетворяют двум вышеуказанным требованиям. Могут применяться более простые, но более грубые модели, а могут — более адекватные, но более сложные. И те, и другие имеют право на существование, каждая из них может вносить свой вклад в понимание явления.

Если мы ограничиваемся линейной теорией, то с точки зрения теоретического исследования главное различие между разными моделями определяется размерностью неоднородности среды, которая в них учитывается. С этой точки зрения самой простой является модель однородной плазмы. Несмотря на то, что такая модель далека от реальной плазменной среды магнитосферы, она имеет важное методическое значение. Понятия и язык, выработанные в рамках этой модели (например, представление о трех модах гидромагнитных колебаний), в значительной мере используются и для описания колебаний неоднородной плазмы. То же относится к дисперсионным и поляризационным свойствам колебаний. Поэтому в следующем разделе мы даем краткое описание гидромагнитных колебаний однородной плазмы. Однако такую модель невозможно использовать для описания реальных колебаний магнитосферы, одним из главных свойств которой является неоднородность. Такая модель слишком далека от реальности.

Следующие по сложности — это модели, в которых среда одномерной-неоднородна. Такие модели уже находят широкое применение для интерпретации наблюдаемых колебаний магнитосферной плазмы. Дело в том, что во многих областях магнитосферы неоднородность среды в каком-то одном направлении (обычно поперек магнитных оболочек) гораздо сильнее, чем в двух других. В подобной ситуации применение одномерных моделей представляется оправданным. В них колебания среды описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, теория и методы решения которых хорошо разработаны. Поэтому теоретическое исследование обычно удается довести до конца. Двумерные и тем более трехмерные модели гораздо сложнее. Колебания в них описываются уравнениями в частных производных. Теория таких уравнений неизмеримо сложнее, а методы конструктивного решения разработаны только для немногочисленных частных случаев. Если в двумерных моделях иногда удается продвинуться достаточно далеко (обычно используя какие-то особые их свойства), то задачи, решенные в трехмерных моделях, исчисляются единицами.

Как видно из названия монографии, мы ограничиваемся линейной теорией колебаний. Тем самым наше изложение не охватывает все те явления, в которых нелинейность играет важную роль. На первый взгляд кажется, что это является серьезным ограничением на область применимости излагаемой теории. Представляется, что при наличии неустойчивости экспоненциальный рост амплитуды колебания в конце концов с неизбежностью должен довести его до нелинейного уровня. Но оказывается, что неоднородность магнитосферы существенно расширяет область применимости линейной теории даже при наличии неустойчивости. Поясним влияние неоднородности на развитие

неустойчивости на языке волновых пакетов. Этот язык не вполне адекватен для строгого описания колебаний магнитосферы, но приемлем для качественного рассмотрения. Движение волнового пакета в неоднородной среде описывается уравнениями типа Гамильтона:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{d\omega}{d\mathbf{x}}. \quad (0.0.1)$$

Здесь  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$  — координаты центра волнового пакета соответственно в  $\mathbf{x}$ -пространстве (обычном пространстве) и в  $\mathbf{k}$ -пространстве (пространстве волновых векторов), а  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  — так называемая локальная частота. Последняя обычно совпадает с частотой волны при заданном значении  $\mathbf{k}$ , вычисленной в приближении однородной плазмы, т.е. параметры среды, определяющие эту частоту, являются функциями координаты  $\mathbf{x}$ .

В соответствии с первым уравнением (0.0.1) центр волнового пакета перемещается в пространстве  $\mathbf{x}$  с групповой скоростью  $v_g = d\omega/d\mathbf{k}$ . Это приводит к тому, что увеличение амплитуды волнового пакета неустойчивостью оказывается существенно ограниченным. В силу неоднородности магнитосферы область неустойчивости (т.е. область, в которой инкремент положителен) имеет конечные размеры. Пакет пробегает ее за конечное время и, следовательно, получает некоторое конечное усиление. Вне этой области инкремент обычно отрицателен (т.е. фактически превращается в декремент), и двигаясь там пакет затухает. Нетрудно оценить характерное значение полного коэффициента усиления МГД-волн в магнитосфере:  $\Gamma \sim \gamma t$ , где  $\gamma$  — характерное значение инкремента, а  $t$  — время пробега области неустойчивости. Инкремент практически всегда существенно меньше, чем частота волны, для которой можно принять оценку  $\omega \sim kv_A$ , где  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  — альфвеновская скорость, характерная для распространяющихся в магнитосфере МГД-волн (здесь  $B_0$  — напряженность магнитного поля,  $\rho_0$  — плотность плазмы),  $k$  — характерное значение волнового вектора. Время пробега  $t \sim L/v_A$ , где  $L$  — размер области неустойчивости. Отсюда имеем верхнюю оценку  $\Gamma \leq kL$ . Для неустойчивых волн, как правило,  $k \sim 1/L$ , то есть  $\Gamma \leq 1$ . Это означает, что амплитуда волны увеличивается в  $\exp(\Gamma) \leq 10$  раз. Фактически, в наиболее неустойчивых случаях  $\exp(\Gamma) \sim 10-100$ . Отметим, что увеличение амплитуды в 100 раз — это действительно очень сильная неустойчивость.

Явление, аналогичное указанному, имеет место и в пространстве волновых векторов. В соответствии со вторым уравнением (0.0.1) центральный волновой вектор пакета  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$  вследствие неоднородности среды перемещается в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Как правило, инкремент как функция  $\mathbf{k}$  положителен также в ограниченной области  $\mathbf{k}$ -пространства, и пакет, пробегая за конечное время эту область, также испытывает только конечное усиление. Оценка полного коэффициента усиления дает по порядку величины такое же значение, как и выше. Однако зачастую, в силу особенностей зависимости ин-



кремента неустойчивости от волнового вектора, этот второй эффект оказывается более важен, чем первый. Во всяком случае, он еще более ограничивает степень усиления волнового пакета.

Таким образом, в неоднородной среде неустойчивость не приводит к постоянному экспоненциальному росту возмущения. Оно усиливается только до некоторой конечной амплитуды. В результате возмущение может не достигать, и во многих случаях фактически не достигает, нелинейного уровня.

Описанная картина эволюции возмущения позволяет ответить на один («роковой») вопрос теории неустойчивостей. В стандартной теории неустойчивостей предполагается, что есть некое равновесное состояние, на которое накладывается малое возмущение и оно при наличии неустойчивости экспоненциально растет. Но тем самым исходное состояние существенно модифицируется или вообще разрушается. Возникает тот самый «роковой» вопрос — откуда взялось исходное равновесное состояние и как оно дожило до момента, когда на него наложилось малое возмущение? Ведь малые возмущения есть всегда, хотя бы на уровне теплового шума. Вразумительного ответа на этот вопрос стандартная теория неустойчивостей не дает. В описанной же выше картине развития неустойчивости ответ на этот вопрос вполне ясен. Возмущение в процессе развития неустойчивости всегда остается малым и поэтому вполне правомерно считать, что оно наложено на некоторое равновесное состояние.

Сказанное выше не означает, что мы совсем отрицаем наличие нелинейных эффектов для МГД-колебаний в магнитосфере. Они, несомненно, существуют и могут наблюдаться экспериментально (см. [20] и цитированную там литературу). Так, например, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца на флангах магнитосферы приводит к развитию вихрей — явно нелинейному эффекту [21]. Однако для решения вопроса о роли нелинейности мы должны иметь адекватную нелинейную теорию явления либо, как минимум, надежные оценки по порядку величины. Следует сказать, что, несмотря на большое количество работ по нелинейным явлениям в магнитосфере, эта теория находится пока еще только на начальных стадиях развития. В большинстве работ, посвященных нелинейным МГД-колебаниям магнитосферы, ее неоднородность либо вообще игнорируется, либо она не учитывается должным образом. Такие работы имеют только определенное методическое значение. Мы в данной монографии не будем вообще касаться нелинейных явлений, поскольку полагаем, что в существующем сейчас состоянии нелинейной теории МГД-колебаний в магнитосфере это увело бы нас слишком далеко от основной темы изложения. В результате мы, к сожалению, не сможем ответить на вопрос, вырастают ли обсуждаемые нами неустойчивые колебания до нелинейного уровня. Мы, конечно, отдаем себе отчет, что это является существенным пробелом в нашей работе.

В заключение скажем несколько слов о соотношении аналитических и численных методов в теоретических исследованиях колебаний магнитосферы. Мы в своей монографии делаем главный упор на аналитических методах решения волновых уравнений. Аналитическое решение дает гораздо более полную (фактически исчерпывающую) и более наглядную информацию о свойствах колебаний. Утверждение о наглядности может показаться парадоксальным. Кажется, что может быть нагляднее результата численного расчета, представленного в виде графика? Но эта наглядность на самом деле иллюзорна. В задаче о колебаниях самым важным является вопрос о том, как свойства этих колебаний зависят от параметров среды, в том числе и от характера распределения этих параметров в пространстве. Для того, чтобы численными методами выяснить этот вопрос, приходится считать огромное количество вариантов. Картина катастрофически разрастается, и вся ее наглядность теряется. А в формуле, полученной в результате аналитического решения специально выведенных уравнений, содержится вся информация о зависимости свойств полученного решения от параметров среды.

У численных методов имеется еще один недостаток. Если ход аналитического решения задачи, как правило, достаточно полно излагается в работе, и любой достаточно подготовленный читатель может при желании его воспроизвести, то многие важные детали численных расчетов обычно остаются «за кадром». Поэтому воспроизвести ход численного исследования, как правило, не представляется возможным. А это в значительной степени подрывает доверие к полученным таким путем результатам. Особенно это относится к численному моделированию (numerical simulation), когда результаты получаются прямо из начальной системы МГД-уравнений путем численного расчета эволюции заданного начального возмущения. В получаемой таким путем картине возмущений смешаны все ветки МГД-колебаний, и невозможно определить процессы, приведшие к конечному состоянию волнового поля.

В проводимых нами исследованиях также применяются численные методы решения дифференциальных уравнений, описывающих структуру и динамику волновых полей. Однако мы не ограничиваемся использованием исключительно этих методов. Как правило, численное исследование проводится для определения точных значений рассчитываемых параметров исследуемых колебаний, когда уже имеются приближенные аналитические решения полученных уравнений. Например, структура МГД-колебаний в магнитосферных резонаторах получается при использовании в аналитических исследованиях упрощенных моделей среды, допускающих простые аналитические решения, а в более сложных моделях применяются численные методы решения аналогичных волновых уравнений. Сопоставление решений, полученных в двух разных подходах, дает уверенность в точности расчетов получаемых пространственных структур и спектров собственных мод этих резонаторов.

Принцип построения данной монографии состоит в следующем. Исходя из указанных выше критериев, выбирается модель интересующей нас области магнитосферы. После этого со всей возможной математической строгостью и максимальной полнотой теоретически исследуются свойства МГД-колебаний в рамках этой модели. Последовательность изложения построена по принципу усложнения используемых моделей среды. Сначала кратко рассматриваются свойства МГД-колебаний в однородных моделях среды, затем одномерные и двумерные модели и, наконец, трехмерная модель (в последнем случае приведена только одна решенная задача). В ряде случаев одна и та же область магнитосферы рассмотрена в рамках как одномерной, так и двумерной моделей. Это дает возможность изучить свойства колебаний в такой области с разных сторон.

Результаты, полученные в каждой из моделей, имеют самостоятельную ценность, но их также можно рассматривать как часть, или, если угодно, элемент мозаики общей картины. Исходя из этого большую часть монографии можно рассматривать как накопление таких элементов. После этого в Заключение мы делаем попытку сложить из них общую картину колебаний магнитосферы. Полученная таким образом картина, конечно, не является полной. В ее составлении мы используем только те элементы, над которыми работали сами. Уже одно это оставляет в картине достаточно большие пробелы, на которые мы по возможности указываем. Кроме того, многие элементы не очень хорошо стыкуются. Однако мы полагаем, что представленная картина, несмотря на все свои недостатки, обладает все же определенной ценностью. Она позволяет воспринимать магнитосферу и феномен МГД-колебаний в ней как нечто единое целое.

## Глава 1

### ГИДРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В данном разделе мы рассмотрим основные свойства МГД-колебаний в однородной плазме, не останавливаясь на их подробном исследовании при различных состояниях плазменной среды. Такие исследования МГД-колебаний однородной плазмы можно найти в монографиях [22–24]. Для описания гидромагнитных колебаний мы, в основном, будем использовать приближение идеальной магнитной гидродинамики. В этом приближении система МГД-уравнений имеет следующий вид:

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla \bar{P} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{B}}], \quad (1.0.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot} [\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}], \quad (1.0.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1.0.3)$$

$$\frac{d \bar{P}}{dt \bar{\rho}^\gamma} = 0, \quad (1.0.4)$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + \bar{\mathbf{v}} \nabla$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  и  $\bar{\mathbf{B}}$  — векторы скорости движения плазмы и магнитного поля,  $\bar{\rho}$  и  $\bar{P}$  — плотность и давление плазмы,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Линеаризуем эту систему уравнений относительно малых возмущений. Обозначим параметры невозмущенной фоновой плазмы нижними индексами  $_0$ , а параметры возмущения — буквами без индексов. Рассмотрим колебания малой амплитуды. Тогда в линейном приближении параметры плазмы и магнитного поля можно представить в виде  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$ ,  $\bar{\rho} = \rho_0 + \rho$ ,  $\bar{P} = P_0 + P$ . Система уравнений (1.0.1)–(1.0.4), линеаризованная относительно малых возмущений, сводится к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}_0 \right) &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} \{ [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0] + [\text{rot } \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}] \}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] + \text{rot} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}], \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\gamma P_0 \text{div } \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.0.5)$$

Здесь  $\mathbf{B}, \mathbf{v}$  — векторы возмущенного магнитного поля и скорости плазмы,  $P$  — возмущенное давление. Возмущенное электрическое поле

определяется условием вмороженности:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] + [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}]), \quad (1.0.6)$$

а возмущенный электрический ток уравнением

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (1.0.7)$$

В однородной покоящейся плазме ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ), находящейся в однородном магнитном поле, произвольное колебание можно представить в виде суперпозиции фурье-гармоник вида  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{x}$  — вектор координат,  $\omega$  — частота волны,  $t$  — время. Подставляя выражения для компонент волнового поля в систему уравнений (1.0.5), для каждой такой гармоники имеем

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2, \quad \omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + v_s^2) + k_{\parallel}^2 k^2 v_A^2 v_s^2 = 0, \quad (1.0.8)$$

— дисперсионные уравнения для альфвеновских и магнито-звуковых волн. Здесь  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  — скорость Альфвена,  $v_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$  — скорость звука в плазме,  $k = \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}$  — модуль волнового вектора,  $k_{\parallel}, k_{\perp}$  — его составляющие вдоль и поперек направления магнитного поля.

Решения второго уравнения (1.0.8)

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} (v_A^2 + v_s^2) \pm \sqrt{\frac{k^4}{4} (v_A^2 + v_s^2)^2 - k^2 k_{\parallel}^2 v_A^2 v_s^2}$$

описывают две ветки магнито-звуковых волн: быстрый магнитный звук (БМЗ — знак «+» перед радикалом) и медленный магнитный звук (ММЗ — знак «-» перед радикалом). Особенно простой вид эти решения имеют, если выполняется одно из следующих условий:  $v_s \ll v_A$  (что равносильно  $\beta \ll 1$ , где  $\beta = 8\pi p_0/B_0^2$  — отношение газокINETического давления плазмы к магнитному),  $v_s \gg v_A$  ( $\beta \gg 1$ ), или  $|k_{\parallel}| \ll |k_{\perp}|$ , которые реализуются в большинстве реально существующих природных плазменных образований. В этом случае приближенное дисперсионное уравнение для БМЗ-волн можно представить в виде

$$\omega^2 \approx k^2 v_f^2, \quad (1.0.9)$$

где  $v_f^2 = v_A^2 + v_s^2$ , а уравнение для ММЗ-волн — в виде

$$\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 c_s^2, \quad (1.0.10)$$

где  $c_s = v_A v_s / \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$ . Этими приближениями мы далее и ограничимся.

Как видно из первого уравнения (1.0.8), групповая скорость альфвеновских волн  $\mathbf{v}_{gA} = \partial\omega/\partial\mathbf{k} = v_A(\mathbf{B}_0/B_0)$  направлена вдоль силовых линий магнитного поля. Групповая скорость БМЗ-волны  $\mathbf{v}_{gf} = v_f(\mathbf{k}/k)$  направлена вдоль волнового вектора, а ММЗ-волны  $\mathbf{v}_{gs} = c_s(\mathbf{B}_0/B_0)$  — вдоль магнитного поля, как и у альфвеновских волн. Как следует

из (1.0.8), последнее утверждение лишь приближенное (даже в пределе идеальной МГД) и нарушается при учете малых поправок, связанных с выполнением указанных выше условий. Учитывая эти свойства групповой скорости МГД-волн, БМЗ называют изотропной, а альфвеновскую волну и ММЗ — направляемыми модами МГД-колебаний.

Характер колебаний возмущенных полей в различных МГД-модах представлен в табл. 1.1. Здесь использована система координат, задаваемая единичными ортами  $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{B}_0/B_0$ ,  $\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}/k_{\perp}$ , а третий орт  $\mathbf{e}_b$  выбирается так, чтобы тройка единичных векторов ( $\mathbf{e}_{\perp}$ ,  $\mathbf{e}_b$ ,  $\mathbf{e}_{\parallel}$ ) была правосторонней. В таблице представлены амплитуды различных компонент волнового поля (с учетом сдвига фаз между ними), выраженные через полные амплитуды его составляющих  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{j}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{P}$  ( $\tilde{B} \equiv |\mathbf{B}| \dots$ ). В различных модах связи между амплитудами этих составляющих различны. Для альфвеновской (А) волны

$$\tilde{E} = \frac{v_A}{c} \tilde{B}, \quad \tilde{v} = v_A \frac{\tilde{B}}{B_0}, \quad \tilde{j} = \frac{c}{4\pi} k \tilde{B}. \quad (1.0.11)$$

Для БМЗ соотношения между  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{j}$  и  $\tilde{v}$  имеют такой же вид, а для возмущенного давления имеем

$$\tilde{P} = \gamma P_0 \frac{k_{\perp}}{k} \frac{\tilde{B}}{B_0} = \gamma P_0 \frac{k_{\perp}}{k} \frac{\tilde{v}}{v_A}. \quad (1.0.12)$$

Если в альфвеновской и БМЗ-волнах энергия поровну распределена между колебаниями магнитного поля и плазмы, то в ММЗ-волне доминирует энергия колебаний плазмы. В этом случае целесообразно выразить все величины через  $\tilde{v}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B_0 \frac{k_{\perp}}{k} \frac{v_s}{v_A} \frac{\tilde{v}}{v_A}, & \tilde{E} &= B_0 \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{k^2} \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\tilde{v}}{c}, \\ \tilde{j} &= \frac{c}{4\pi} k_{\perp} B_0 \frac{v_s}{v_A} \frac{\tilde{v}}{v_A}, & \tilde{P} &= \gamma P_0 \frac{\tilde{v}}{v_s}. \end{aligned} \quad (1.0.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что в альфвеновских волнах электрическое и магнитное поле колеблются в фазе, скорость движения плазмы — в противофазе к ним (сдвиг по фазе равен  $\pi$ ), а колебания тока сдвинуты относительно них по фазе на  $\pi/2$ . При этом продольная и поперечная компоненты тока колеблются либо в фазе, либо в противофазе между собой, в зависимости от знака  $k_{\parallel}$ . В магнитозвуковых волнах в фазе колеблются скорость движения плазмы и плазменное давление. В БМЗ-волнах в фазе с ними также колеблются электрическое поле и продольная компонента магнитного поля, а  $B_{\perp}$  — либо в фазе, либо в противофазе, в зависимости от знака  $k_{\parallel}$ . В ММЗ-волнах электрическое поле и продольная компонента магнитного поля колеблются в противофазе к скорости движения плазмы и плазменному давлению, а  $B_{\perp}$  — либо в фазе, либо в противофазе, в зависимости от знака  $k_{\parallel}$ . Колебания тока в магнитозвуковых волнах смещены по фазе к колебаниям остальных компонент на  $\pi/2$ .

Таблица 1.1. Соотношения между компонентами волнового поля в различных модах МГД-колебаний

Моды\компоненты	$B_{\perp}$	$B_b$	$B_{\parallel}$	$E_{\perp}$	$E_b$	$E_{\parallel}$	
А	0	$\tilde{B}$	0	$\tilde{E}$	0	0	
БМЗ	$-\frac{k_{\parallel}}{k}\tilde{B}$	0	$\frac{k_{\perp}}{k}\tilde{B}$	0	$\tilde{E}$	0	
ММЗ	$\frac{k_{\parallel}}{k}\tilde{B}$	0	$-\frac{k_{\perp}}{k}\tilde{B}$	0	$-\tilde{E}$	0	
Моды\компоненты	$j_{\perp}$	$j_b$	$j_{\parallel}$	$v_{\perp}$	$v_b$	$v_{\parallel}$	$P$
А	$-i\frac{k_{\parallel}}{k}\tilde{j}$	0	$i\frac{k_{\perp}}{k}\tilde{j}$	0	$-\tilde{v}$	0	0
БМЗ	0	$-i\tilde{j}$	0	$\tilde{v}$	0	0	$\tilde{P}$
ММЗ	0	$i\tilde{j}$	0	0	0	$\tilde{v}$	$\tilde{P}$

В альфвеновских и БМЗ-волнах плазма колеблется в направлении поперек магнитных силовых линий, в то время как в ММЗ-волнах — вдоль силовых линий. При этом давление в альфвеновских волнах не возмущается. Это означает, что движение силовых линий и смещение плазмы происходят с одинаковой скоростью. Можно провести определенную аналогию между распространением альфвеновских волн с колебаниями, распространяющимися по одномерной струне. В БМЗ-волне, вместе с поперечными смещениями плазмы, происходит возмущение магнитного и плазменного давлений. Распространение этих колебаний подобно распространению обычных звуковых волн в газе. В ММЗ-волнах смещение плазмы происходит в направлении вдоль магнитного поля. Такие колебания напоминают распространение звуковых волн в прямом одномерном канале. При этом в качестве стенок, определяющих направление распространения, служат силовые линии магнитного поля. Качественно картина колебаний магнитного поля и плазмы в различных МГД-модах представлена на рис. 1.1.

Рассмотрим некоторые эффекты, выходящие за рамки идеальной МГД. Во-первых — это затухание гидромагнитных волн. Есть два эффекта, приводящих к их затуханию: столкновения частиц плазмы, приводящие к ее вязкости и конечной проводимости и бесстолкновительное взаимодействие волн с частицами — черенковское и циклотронное. Столкновительное затухание гидромагнитных волн в условиях магнитосферы пренебрежимо мало. Декремент затухания можно представить в форме, одинаковой для всех трех мод:

$$\frac{\bar{\gamma}}{\omega} \sim \frac{\omega\nu_m}{v_A^2} = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega\nu_e}{\omega_{pe}^2}, \quad (1.0.14)$$

где  $\bar{\gamma}$  — декремент затухания колебаний,  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma = c^2\nu_e/\omega_{pe}^2$  — магнитная вязкость,  $\sigma$  — продольная проводимость плазмы,

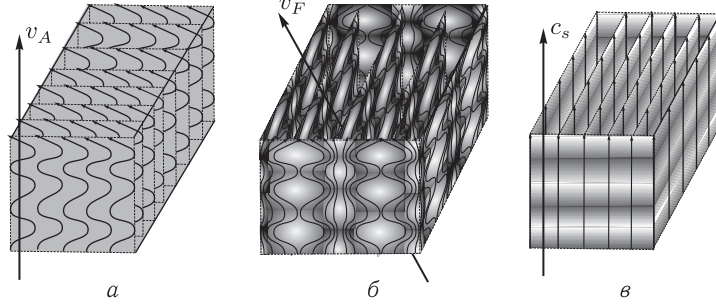


Рис. 1.1. Схематическое представление колебаний магнитного поля (силовые линии), давления плазмы (градации серого цвета) и направления групповых скоростей альфвеновских (а), быстрых магнитозвуковых (б) и медленных магнитозвуковых (в) волн, распространяющихся в однородной плазме

$\nu_e$  — частота соударений электронов,  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$  — электронная ленгмюровская частота. В магнитосфере параметры, входящие в (1.0.14), меняются в очень широких пределах — от значений  $v_A \sim 3 \cdot 10^3$  км/с,  $\omega_{pe} \sim 10^6$  с<sup>-1</sup>,  $\nu_e \sim 10^2$  с<sup>-1</sup> на ближних к Земле магнитных оболочках до значений  $v_A \sim 3 \cdot 10^2$  км/с,  $\omega_{pe} \sim 3 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $\nu_e \sim 10^5$  с<sup>-1</sup> во внешней магнитосфере. Учитывая, что характерные частоты наблюдаемых магнитосферных МГД-колебаний  $\omega = (10^{-2} \div 10)$  с<sup>-1</sup>, получаем оценку  $\bar{\gamma}/\omega \sim 10^{-7} \div 10^{-14}$ . Немногим большие оценки получаются, если учесть столкновения частиц с мелкомасштабной волновой турбулентностью магнитосферной плазмы. Однако частота столкновений стремительно нарастает при приближении к ионосфере Земли, где столкновительное затухание становится существенным.

Бесстолкновительное затухание альфвеновских и БМЗ-волн также мало. Их фазовые скорости ( $\sim v_A$ ) много больше тепловой скорости ионов ( $v_i \sim v_s$ ). Поэтому декремент их затухания на ионах пропорционален экспоненциально малому множителю  $\exp(-v_A^2/v_i^2)$  [25]. Тепловая скорость электронов  $v_e$  может быть в магнитосфере больше, меньше или порядка  $v_A$ . Малость затухания на электронах обусловлена большим различием масс ионов и электронов. Половина энергии альфвеновских и БМЗ-волн заключена в кинетической энергии ионов (в среднем по времени) и легкие электроны не могут эффективно их тормозить. Поэтому декременты бесстолкновительного затухания этих волн на электронах содержат малый множитель  $m_e/m_i$  (см. [23]):

$$\frac{\bar{\gamma}_{eA}}{\omega} \sim \frac{m_e v_e k^2 v_A^2}{m_i v_A \omega_i}, \quad \frac{\bar{\gamma}_{ef}}{\omega} \sim \frac{m_e v_e}{m_i v_A}.$$

При  $v_A \gg v_e$  эти формулы содержат еще и экспоненциально малый множитель  $\exp(-v_A^2/v_e^2)$ .



Совершенно другая картина бесстолкновительного затухания Ландау для ММЗ-волн. Дисперсионное уравнение для низкочастотных колебаний плазмы с максвелловским распределением ионов и электронов по скоростям имеет следующий вид (см. [23]):

$$1 + \sum_{\alpha=i,e} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_\alpha^2} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_0^\alpha e^{x_\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x_\alpha) w(z_n^\alpha) \right] = 0, \quad (1.0.15)$$

где суммирование производится по сортам частиц (индекс  $\alpha$  нумерует ионы,  $\alpha = i$ , и электроны,  $\alpha = e$ , плазмы) и по циклотронным гармоникам (индекс  $n$ ). Здесь обозначено:  $k = \sqrt{k_\parallel^2 + k_\perp^2}$  — модуль волнового вектора,  $x_\alpha = k_\perp^2 \rho_\alpha^2$ , где  $\rho_\alpha = v_\alpha / \omega_\alpha$  — ларморовский радиус,  $\omega_\alpha = eB_0 / m_\alpha c$  — циклотронная частота,  $\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi n_\alpha e^2 / m_\alpha}$  — плазменная частота и  $v_\alpha = \sqrt{T_\alpha / m_\alpha}$  — тепловая скорость частиц сорта  $\alpha$ ,  $z_n^\alpha = (\omega - n\omega_\alpha) / \sqrt{2} k_\parallel v_\alpha$ . Модифицированная функция Бесселя  $I_n(x_\alpha)$  при малых значениях аргумента (условие  $|k_\perp \rho_\alpha| \ll 1$  мы будем предполагать выполненным) приближенно представляется как  $I_n(x_\alpha) \approx (x_\alpha/2)^n / n!$ . Функция  $w(z)$  — интеграл вероятности, имеющий следующие асимптотические представления (см. [26]):

$$w(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right) \approx \begin{cases} 1 - z^2 + 2iz/\sqrt{\pi}, & |z| \ll 1, \\ \exp(-z^2) + i/\sqrt{\pi} z, & |z| \gg 1. \end{cases}$$

В известном предельном случае  $v_i \ll |\omega/k_\parallel| \ll v_e$  в сумме по  $n$  в (1.0.15) можно ограничиться только нулевыми гармониками и приближенно записать дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \left( \frac{1}{v_{es}^2} (1 + i\sqrt{\pi} z_e^0) - \frac{k_\parallel^2}{\omega^2} \right) \approx 0,$$

где  $\omega_{pi}^2 / v_{es}^2 = \omega_{pe}^2 / v_e^2$ ,  $v_{es} = v_i \sqrt{T_e / T_i} = \sqrt{T_e / m_i}$  — тепловая скорость ионов, определенная по электронной температуре. В нулевом порядке теории возмущений решение этого уравнения дает дисперсионное уравнение для ММЗ-волн в пределе  $T_e \gg T_i$ :  $\omega^2 = k_\parallel^2 v_{es}^2$ . Учитывая следующий порядок теории возмущений, получаем дисперсионное уравнение с учетом поглощения энергии колебаний:

$$\omega^2 = k_\parallel^2 v_{es}^2 \left( 1 - i\sqrt{\frac{\pi m_e}{2m_i}} \right).$$

В этом предельном случае интересующая нас величина относительного декремента ММЗ-волн  $\bar{\varepsilon}_s = \bar{\gamma}_s / \text{Re}(\omega) \equiv \bar{\varepsilon}_{s\infty} = -\sqrt{\pi m_e / 2m_i} / 2 \approx -0,015$ , где  $\bar{\gamma}_s \equiv \text{Im}\omega$ . Полное численное решение (1.0.15) относительно  $\bar{\varepsilon}_s$  как функции от  $(T_e / T_i)$  представлено на рис. 1.2. Расчетная кривая  $\bar{\varepsilon}_s(T_e / T_i)$  имеет универсальный вид в достаточно большом диапазоне изменения параметров плазмы, охватывающем, в том числе, и диапазон изменения параметров в магнитосфере Земли ( $1 \text{ нТл} \leq B_0 \leq 10 \text{ Тл}$ ;  $1 \text{ км/с} \leq v_A \leq 10^4 \text{ км/с}$ ;  $10^{-2} \leq \beta \leq 1$ ).

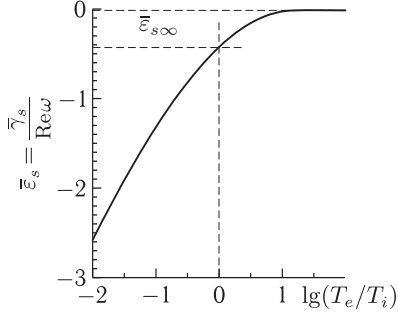


Рис. 1.2. Зависимость относительного декремента ММЗ-волн  $\bar{\epsilon}_s = \bar{\gamma}_s / \text{Re}\omega$  от степени неизотермичности однородной плазмы ( $\lg T_e/T_i$ )

Отметим, что при  $T_e/T_i \lesssim 1$  (и  $\beta \lesssim 1$ ) декремент затухания ММЗ-волн, в отличие от альфвеновской и БМЗ-волн, достаточно большой ( $|\bar{\epsilon}_s| \gtrsim 1$ ). Это связано с тем, что фазовая скорость ММЗ-волн в этом случае близка к тепловой скорости ионов плазмы

$$c_s \sim v_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{T_e + T_i}{m_i}} \sim v_i,$$

так что затухание на ионах очень велико ( $\bar{\gamma} \sim \omega$ ), и ММЗ не может распространяться.

Рассмотрим еще один эффект, выходящий за рамки идеальной

МГД. Это — поперечная дисперсия альфвеновских волн, отсутствующая в (1.0.8). Для этого используем следующие уравнения для возмущенных электрического и магнитного полей:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = -i \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (1.0.16)$$

где  $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Используем следующее представление тензора  $\hat{\epsilon}$  для МГД-волн (см. [23]):

$$\hat{\epsilon} = \frac{c^2}{v_A^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 & iu & 0 \\ -iu & 1 - 2k_{\perp}^2 \rho_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}(\omega/k_{\parallel} v_e) / k_{\parallel}^2 \rho_s^2 \end{pmatrix}, \quad (1.0.17)$$

где обозначено  $u = \omega/\omega_i$ ,  $\rho_s = v_{es}/\omega_i$  (здесь и далее считаем  $u, |k_{\perp} \rho_i|, |k_{\perp} \rho_s / \tilde{G}| \ll 1$ ), а функция  $\tilde{G}(z)$  выражается через известную функцию Крампа  $W$ ,

$$\tilde{G}(z) = 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} z \tilde{W}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \equiv 1 - z e^{-z^2/2} \int_0^z e^{t^2} dt + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2},$$

и имеет следующие асимптотические представления:

$$\tilde{G}(z) \approx \begin{cases} 1 - z^2 + \dots + i \sqrt{\pi/2} z, & |z| \ll 1, \\ -z^{-2} - \frac{3}{4} z^{-4} + \dots + \sqrt{\pi/2} z e^{-z^2/2}, & |z| \gg 1. \end{cases}$$

Для альфвеновских волн, даже с учетом их поперечной дисперсии, сохраняется приближенное равенство  $\omega \approx k_{\parallel} v_A$ . Поэтому  $\omega/k_{\parallel} v_e \approx s_e/\rho_s$ , где  $s_e = c/\omega_{pe}$  — характерная скинковая длина электронов в плазме, и в предельных случаях имеем

$$\frac{\rho_s^2}{\tilde{G}(s_e/\rho_s)} \approx \begin{cases} \rho_s^2, & s_e \ll \rho_s, \\ -s_e^2, & s_e \gg \rho_s. \end{cases} \quad (1.0.18)$$

Из (1.0.16), (1.0.17) получаем следующее дисперсионное уравнение

$$\nu q^4 - (\alpha - 1)(1 + \nu)q^2 + (\alpha - 1)^2 - u^2\alpha = 0, \quad (1.0.19)$$

где обозначено:  $q = k_{\perp}/k_{\parallel}$  — безразмерное поперечное волновое число,  $\alpha = \omega^2/k_{\parallel}^2 v_A^2$ ,  $\nu = k_{\parallel}^2 \Lambda^2$ ,

$$\Lambda^2 \equiv \frac{\rho_s^2}{\tilde{G}(s_e/\rho_s)} + \frac{3}{4}\rho_i^2 = \begin{cases} -s_e^2, & s_e \gg \rho_s, \quad (\beta \ll m_e/m_i), \\ \rho_{si}^2 = \rho_s^2 + \frac{3}{4}\rho_i^2, & s_e \ll \rho_s, \quad (\beta \gg m_e/m_i). \end{cases} \quad (1.0.20)$$

Соответственно, в предельных случаях

$$\nu = \begin{cases} -\mu^4 \equiv -(m_e/m_i)u^2, & (\beta \ll m_e/m_i), \\ \varkappa^4 \equiv (k_{\parallel}^2/m_i\omega_i^2)(T_i + \frac{3}{4}T_e), & (\beta \gg m_e/m_i). \end{cases}$$

При  $s_e \sim \rho_s$  ( $\beta \sim m_e/m_i$ ) величина  $\Lambda^2$  комплексная. Ее изменение в плоскости комплексного  $\Lambda^2$  при переходе от  $s_e \gg \rho_s$  к  $s_e \ll \rho_s$  показано на рис. 1.3. Уравнение (1.0.19) описывает две ветки МГД-колебаний — альфвеновские и БМЗ-волны. Поведение этих ветвей на плоскости  $(q^2, \alpha)$  в предельных случаях с «холодной» ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) и «горячей» ( $\beta \gg m_e/m_i$ ) дисперсией альфвеновских волн рассмотрено в приложении А.

Для БМЗ-волн малые поправки, связанные с учетом эффектов, выходящих за рамки идеальной МГД, практически не влияют на их дисперсию, и для них можно использовать дисперсионное уравнение вида (1.0.9). Для альфвеновских же волн, напротив, именно эти малые поправки определяют их поперечную дисперсию (зависимость частоты  $\omega$  от поперечной составляющей волнового вектора  $k_{\perp}$ ). Наличие этой дисперсии означает возможность распространения альфвеновских волн не только вдоль силовых линий магнитного поля, но и в поперечном к ним направлении. Для квазипродольных альфвеновских волн, у которых  $k_{\perp} \lesssim \sqrt{u} k_{\parallel}$ , поперечная дисперсия обусловлена инерцией ионов, и решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$\omega = k_{\parallel} v_A \left[ 1 - \frac{u}{2} \left( \frac{k_{\perp}^2}{k_0^2} + \sqrt{1 + \frac{k_{\perp}^4}{k_0^4}} \right)^{-1} \right], \quad (1.0.21)$$

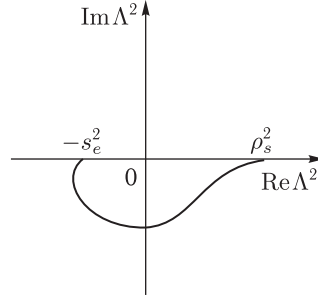


Рис. 1.3. Вид функции  $\Lambda^2(s_e/\rho_s)$  в плоскости комплексного  $\Lambda$  при изменении аргумента от  $s_e/\rho_s \gg 1$  до  $s_e/\rho_s \ll 1$

где  $k_0^2 = 2uk_{\parallel}^2$ . Характерная групповая скорость поперечного распространения квазипродольных альфвеновских волн

$$v_{g\perp} = \frac{\partial\omega}{\partial k_{\perp}} = v_A \frac{k_{\perp}}{2k_{\parallel}} \ll v_A.$$

При больших  $k_{\perp} \gg \sqrt{u} k_{\parallel}$  дисперсия альфвеновских волн называется кинетической, и решение дисперсионного уравнения для них имеет вид

$$\omega = k_{\parallel} v_A [1 + k_{\perp}^2 \Lambda^2], \quad (1.0.22)$$

где  $\Lambda^2$  определяется (1.0.20). При  $\beta \sim m_e/m_i$  величина  $\Lambda^2$  комплексная ( $|\Lambda^2| \sim s^2 \sim \rho_{si}^2$ ), а мнимая часть (1.0.22) представляет собой декремент затухания. Это черенковское затухание волн на электронах фоновой плазмы, тепловая скорость которых становится близкой к скорости распространения альфвеновских волн  $v_e \sim v_A$ .

Характерные для магнитосферы значения  $s_e$  и  $\rho_i$  лежат в пределах 0,1–10 км. Это означает, что дисперсия (1.0.22) существенна только для волн чрезвычайно мелкомасштабных в поперечном направлении. Характерная поперечная групповая скорость распространения кинетических альфвеновских волн

$$v_{g\perp} = \text{Re} \frac{\partial\omega}{\partial k_{\perp}} = 2v_A k_{\parallel} k_{\perp} \text{Re}(\Lambda^2) \ll v_A.$$

Еще одной важной особенностью альфвеновских волн является то, что у них, в отличие от магнитозвуковых волн, имеется отличная от нуля продольная компонента возмущенного электрического поля. Как следует из (1.0.16), (1.0.17),

$$E_{\parallel} = \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k_{\perp}^2 - \tilde{G}(s_e/\rho_s)/\rho_s^2} E_{\perp} \approx -k_{\parallel} k_{\perp} \frac{\rho_s^2}{\tilde{G}(s_e/\rho_s)} E_{\perp}. \quad (1.0.23)$$

Сказанное можно резюмировать следующим образом. Учет эффектов, обусловленных тепловым движением частиц, приводит к сильному затуханию ММЗ-волн в плазме с  $T_i \gtrsim T_e$ . Почти во всех областях магнитосферы в типичных условиях  $T_i \gg T_e$ . Это делает невозможным существование собственных мод ММЗ-колебаний почти во всей магнитосфере. Единственным исключением является внутренняя плазмосфера, где  $T_e > T_i$ , и декремент затухания ММЗ-волн мал (см. [27]). Для альфвеновских и БМЗ-волн эффекты затухания, связанные с их взаимодействием с частицами плазмы, малы. Что касается поперечной дисперсии магнитозвуковых волн, то она достаточно велика даже в приближении идеальной МГД и учет малых поправок, выходящих за рамки этого приближения, не приводит к существенным эффектам. Для альфвеновских волн возможны ситуации, когда необходим учет их поперечной дисперсии (1.0.21) или (1.0.22), определяющей их медленное движение поперек магнитных силовых линий или наличие у них продольной компоненты электрического поля (1.0.23).

## Глава 2

# **МГД-КОЛЕБАНИЯ В ОДНОМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЯХ МАГНИТОСФЕРЫ**

Как уже было сказано во Введении, МГД-колебания неоднородной плазмы не разделяются на отдельные линейно независимые моды, а представляют собой единое волновое поле. В некоторых областях пространства это волновое поле по своим дисперсионным характеристикам похоже на одну ветку МГД-колебаний однородной плазмы, в других областях — на другую. Строго разделить их можно только в нескольких специальных случаях. В теоретических работах, посвященных МГД-колебаниям неоднородной плазмы, переход от областей пространства с колебаниями, имеющими один тип дисперсии, к областям, где колебания обладают другим типом дисперсии, принято описывать на языке взаимодействия различных веток МГД-колебаний однородной плазмы. Такое взаимодействие носит резонансный характер и происходит на достаточно малых пространственных масштабах.

Одним из наиболее плодотворных в исследованиях магнитосферных МГД-колебаний оказалось представление о резонансной генерации альфвеновских волн (альфвеновский резонанс), или, как принято называть в англоязычной литературе, о резонансе силовых линий магнитного поля (FLR — field line resonance). В этом процессе монохроматическая БМЗ-волна, распространяющаяся в неоднородной поперек магнитных силовых линий плазме, раскачивает альфвеновские волны на тех магнитных оболочках, где ее частота совпадает с локальной частотой альфвеновских колебаний. Альфвеновский резонанс часто привлекается для объяснения некоторых типов глобальных колебаний магнитосферы [28], нагрева плазмы солнечной короны [29, 30], а также предлагается в качестве механизма нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза [31, 32].

На возможность резонансной раскачки альфвеновских колебаний в магнитосфере монохроматической БМЗ-волной впервые было указано в работе [33]. Впоследствии эта идея была подробно разработана во многих работах, среди которых особо следует отметить работы [34–36]. В них впервые были изучены характерные особенности резонансных альфвеновских колебаний, что позволило идентифицировать такие колебания по наблюдениям на сетях наземных магнетометров [37, 38].

На основе наблюдений таких резонансных альфвеновских колебаний были построены широтные распределения собственных частот резонансных альфвеновских колебаний магнитосферы и проведено

их сравнение с расчетными теоретическими значениями [39, 40]. Это, в свою очередь, позволило смоделировать распределение плотности магнитосферной плазмы в плоскости магнитного меридиана [41–43].

Кроме того, имеются многочисленные свидетельства тесной связи резонансных альфвеновских колебаний магнитосферы с различными типами полярных сияний [44–46]. Поскольку кинетические альфвеновские волны обладают продольной (по отношению к магнитному полю) компонентой электрического поля (см. (1.0.23)), они могут ускорять заряженные частицы магнитосферной плазмы вдоль силовых линий геомагнитного поля в ионосферу и вызывать свечение ее нейтральной составляющей [47–49].

Менее известен другой тип резонансного взаимодействия МГД-колебаний — магнитозвуковой резонанс, в котором БМЗ-волна раскачивает на резонансной оболочке ММЗ-волну [50–52]. ММЗ-колебания так же, как альфвеновские волны, легко канализируются в направлении вдоль магнитного поля. Это создает возможность их резонансного взаимодействия с БМЗ так же, как и в альфвеновском резонансе. Причиной, по которой этому типу взаимодействия МГД-колебаний уделяется меньше внимания, чем альфвеновскому резонансу, является то, что в устойчивых плазменных конфигурациях с  $\beta < 1$  скорость распространения ММЗ-колебаний близка к скорости звука плазмы и они, как правило, сильно затухают за счет бесстолкновительного затухания Ландау (см. гл. 1). Единственный известный пример их слабого затухания — это сильно неизотермическая плазма, в которой  $T_e \gg T_i$ , где  $T_e, T_i$  — температуры электронов и ионов (см. [53]). Как правило, отмеченные выше типы резонансного взаимодействия МГД-волн изучаются отдельно [54, 55]. Однако в значительной части реально рассматриваемых плазменных конфигураций встречаются оба типа резонансов, и для правильного понимания происходящих процессов требуется их совместное рассмотрение.

В данной главе мы рассмотрим ряд задач, в которых важную роль играет неоднородность плазмы в направлении поперек магнитных силовых линий. В разделе 2.1 на качественном уровне рассмотрены особенности распространения МГД-волн в одномерно-неоднородной плазме в модели магнитосферы в виде прямоугольного ящика с идеально отражающими стенками («box-model»). В разделе 2.2 построена модель переходного слоя плазмы, на примере которой решена задача о падении и отражении быстрого магнитного звука от плазменной неоднородности. В разделе 2.3 изучен альфвеновский резонанс — процесс раскачки альфвеновских колебаний монохроматической БМЗ-волной, падающей на переходной слой «холодной» плазмы. В разделе 2.4 исследован аналогичный процесс при возбуждении резонансных альфвеновских волн импульсом БМЗ-колебаний. В разделе 2.5 решена задача об энергетическом балансе МГД-колебаний в альфвеновском резонансе. В разделе 2.6 рассмотрена задача о падении БМЗ-волны на переходный слой «теплой» плазмы, когда в нем имеются резонансные поверхности

не только для альфвеновских, но и для медленных магнитозвуковых волн. В разделе 2.7 задача об альфвеновском резонансе решена в модели среды с неидеальной плазмой, когда поперечная дисперсия альфвеновских волн определяется малыми кинетическими эффектами.

Еще один важный эффект, связанный с поперечной неоднородностью плазмы, — возможность волноводного распространения различных типов МГД-волн в плазме с немонотонным профилем альфвеновской скорости поперек магнитных силовых линий. В разделе 2.8 рассмотрен волновод для БМЗ-волн, образованный локальным минимумом альфвеновской скорости, вытянутым вдоль магнитных силовых линий. В разделе 2.9 аналогичный волновод рассмотрен для квазипродольных альфвеновских волн, поперечная дисперсия которых связана с гиротропией плазмы (конечным значением  $\omega/\omega_i \ll 1$ ). В разделе 2.10 решена задача о волноводном распространении квазипоперечных альфвеновских волн, поперечная дисперсия которых определяется малыми кинетическими эффектами — учетом конечного ларморовского радиуса ионов и скин-длины электронов в плазме. В разделе 2.11 рассмотрено взаимодействие волноводных мод различных веток МГД-колебаний в «теплой плазме». В разделе 2.12 аналогичные исследования проведены для колебаний, распространяющихся в цилиндрических плазменных волокнах.

Магнитосфера Земли имеет достаточно резкую границу — магнитопаузу, которая разделяет плазму магнитосферы и солнечного ветра. Поэтому представляет интерес задача о проникновении БМЗ-волн через магнитопаузу из солнечного ветра в магнитосферу, где они могут возбуждать различные типы геомагнитных пульсаций. В разделе 2.13 решена задача о прохождении БМЗ-волн через магнитопаузу, моделируемую тангенциальным разрывом параметров среды. В разделе 2.14 аналогичная задача решена для модели магнитопаузы в виде плавного переходного слоя, и рассмотрен процесс волнового переноса импульса из солнечного ветра в магнитосферу. Сдвиговый поток солнечного ветра на магнитопаузе делает ее неустойчивой относительно БМЗ-колебаний. В разделе 2.15 исследована неустойчивость течения плазмы в моделях сдвигового течения в виде плавного переходного слоя, разделяющего два однородных полупространства. При этом неоднородность каждого из полупространств смоделирована наличием отражающих стенок в одном или обоих полупространствах. В разделе 2.16 решена задача об устойчивости границы геомагнитного хвоста, моделируемого неоднородным по радиусу плазменным цилиндром, который обтекается потоком солнечного ветра.

Еще одна область магнитосферной плазмы, где принципиально важна ее неоднородность, — это околоземное пространство, включающее ионосферу и атмосферу Земли. Проникновение альфвеновских волн из магнитосферы на Землю через такую многослойную среду — важная задача физики магнитосферы. В разделе 2.17 проведен расчет поля электромагнитных колебаний, индуцированных на поверхности Земли

падающими на ионосферу из магнитосферы альфвеновскими волнами. При этом учтено наклонение силовых линий геомагнитного поля к поверхности Земли.

## 2.1. Качественная картина распространения МГД-волн в одномерно-неоднородной плазме

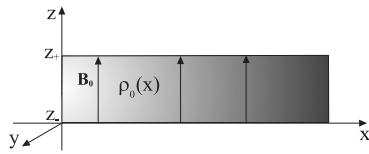


Рис. 2.1. Модель одномерно-неоднородной плазмы (с плотностью  $\rho_0 \equiv \rho_0(x)$ ) в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0 = \text{const}$

Постановка рассмотренной ниже задачи об альфвеновском резонансе и модель среды (box model) соответствуют тем, что были использованы в работах [34, 36, 56]. Рассмотрим модель, в которой магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  однородно, прямолинейно и направлено по оси  $z$ . Фоновая плазма «холодная» ( $v_s = 0$ ) и покоящаяся ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ), а ее плотность  $\rho_0$  зависит только от координаты  $x$  (рис. 2.1).

Чтобы смоделировать наличие ионосферы, будем полагать, что плазма заключена между двумя проводящими плоскостями, нормальными к оси  $z$ , которые расположены при  $z_- = 0$  и  $z_+ = L$ , где  $L$  — длина силовой линии. Проводимость ионосферы достаточно велика, и в главном порядке будем считать эти плоскости идеально проводящими. Тогда граничные условия по оси  $z$  имеют вид

$$E_{x,y} |_{z=z_{\pm}} = 0. \quad (2.1.1)$$

Решение уравнений (1.0.5) в рассматриваемой модели среды имеет вид  $\Phi = \Phi(x)e^{(ik_y y + ik_z z - i\omega t)}$ , где  $\Phi$  — любая из компонент волнового поля,  $k_y$  и  $k_z$  — компоненты волнового вектора по осям  $y$  и  $z$ . Следовательно, зависимость  $E_{x,y}$  от  $z$  с учетом граничных условий (2.1.1) имеет вид  $\sin k_z(z - z_-)$ , где  $k_z = \pi N/L$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$  — продольное волновое число). То есть структура поля рассматриваемых МГД-колебаний по оси  $z$  представляет собой сумму стоячих вдоль силовых линий магнитного поля волн.

Рассмотрим на качественном уровне эффекты, обусловленные неоднородностью среды. Наиболее важными из них являются отражение БМЗ-волны от неоднородности плазмы, связь между альфвеновской и БМЗ-модами и альфвеновский резонанс. Отражение БМЗ от неоднородности можно наглядно описать в рамках приближения ВКБ, применимого при длине волны по координате  $x$ , много меньшей масштаба неоднородности. В главном порядке ВКБ-приближения зависимость возмущенных величин от  $x$  дается множителем  $\exp(i \int k_x dx)$ , где  $k_x = k_x(x)$  — локальное значение волнового вектора, определяемое из локального дисперсионного уравнения для БМЗ-волн:

$$k_x^2 = \omega^2/v_A^2(x) - k_y^2 - k_z^2. \quad (2.1.2)$$



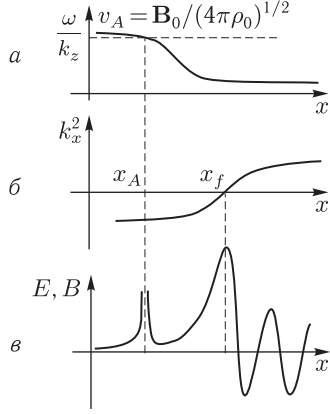


Рис. 2.2. *a* — распределение альфвеновской скорости по оси  $x$  в одномерно-неоднородной модели среды; *б* — зависимость квадрата ВКБ-компоненты волнового вектора МГД-колебаний «холодной» плазмы  $k_x^2(x)$  ( $x_A$  — точка альфвеновского резонанса,  $x_f$  — точка поворота БМЗ-волны); *в* — структура компонент волнового поля МГД-колебаний в одномерно-неоднородной плазме

В области прозрачности, где  $k_x^2 > 0$ , возмущение имеет вид распространяющейся волны, точнее, в общем случае, является суперпозицией волн, бегущих в противоположных направлениях:  $C_1 \exp(i \int k_x dx) + C_2 \exp(-i \int k_x dx)$ . В процессе распространения меняются не только волновой вектор  $k_x(x)$ , но и амплитуды волн  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ . В области непрозрачности, где  $k_x^2 < 0$ , колебание не распространяется, а представляет собой суперпозицию убывающей и растущей экспонент. Если область непрозрачности простирается до бесконечности, то имеется только убывающая экспонента. Две эти области разделены точкой поворота  $x = x_f$ , где  $k_x^2(x_f) = 0$  (рис. 2.2, б). Из (2.1.2) видно, что  $v_A(x)$  в области прозрачности меньше, чем в области непрозрачности (рис. 2.2, а).

Влияние неоднородности на альфвеновскую волну еще более радикально. В приближении идеальной МГД она не имеет поперечной дисперсии (т.е. ее дисперсионное уравнение  $\omega^2 = k_z^2 v_A^2(x)$  не содержит  $k_x$  и  $k_y$ ). При заданных значениях  $\omega$  и  $k_z$  дисперсионное уравнение для альфвеновских волн может удовлетворяться только в отдельных точках  $x = x_A$ , называемых точками альфвеновского резонанса. Альфвеновская волна «привязана» к этим точкам и не может распространяться по координате  $x$ . Наиболее очевидно это в случае  $k_y = 0$ , когда в приближении идеальной МГД альфвеновская и БМЗ-волны являются независимыми модами колебаний неоднородной плазмы. Характер распространения БМЗ был описан выше. Для альфвеновской волны из (1.0.5), (1.0.6) получаем уравнение

$$[\omega^2 - k_z^2 v_A^2(x)] E_x = 0,$$

решение которого  $E_x = C \delta(x - x_A)$ . Альфвеновское возмущение сосредоточено на магнитной поверхности  $x = x_A$ , где его частота совпадает с локальной альфвеновской частотой  $k_z v_A(x)$ .

При  $k_y \neq 0$  ситуация сложнее. Пространственная структура МГД-колебания такова, что в одной области пространства оно близко к БМЗ,

а в другой — к альфвеновской волне. Возникает вопрос — что такое альфвеновская волна и БМЗ в неоднородной плазме? Математически корректное разделение возмущения на различные моды колебаний, ассоциируемые с модами однородной плазмы, в неоднородной плазме возможно только если к каждой из них применимо ВКБ-приближение. В рамках этого приближения сохраняет свой смысл понятие дисперсионного уравнения, которое позволяет идентифицировать различные моды. В точках, разделяющих области существования разных мод, происходит их линейная трансформация. В непосредственной окрестности этих точек, где ВКБ-приближение нарушается, колебание невозможно трактовать как ту или иную моду.

Приближение ВКБ неприменимо для описания альфвеновской волны из-за отсутствия у нее поперечной дисперсии. Тем не менее, можно считать, что в малой окрестности точки альфвеновского резонанса МГД-колебание является альфвеновской волной, поскольку в точке  $x = x_A$  выполняется дисперсионное уравнение для альфвеновской волны  $\omega^2 = k_z^2 v_A^2(x)$ . Хотя мы не можем вблизи  $x = x_A$  приписать величине  $k_x$  какое-либо определенное значение, его следует считать очень большим, поскольку решение в этой точке сингулярно (см. ниже). Во всяком случае  $|k_x| \gg |k_y|$ , что дает  $|E_x| \gg |E_y|$ , т.е.  $\mathbf{e}_\perp \parallel \mathbf{k}_\perp$  (см. табл. 1.1), что является отличительным признаком альфвеновской волны. Явление, имеющее место вблизи  $x = x_A$ , называют альфвеновским резонансом и трактуют как возбуждение альфвеновской волны быстрым магнитным звуком, распространяющимся в неоднородной плазме. Отметим, что  $x_A$  находится в области непрозрачности для магнитного звука, так как из (2.1.2) при  $\omega^2/v_A^2(x) - k_z^2 = 0$  следует  $k_x^2(x_A) = -k_y^2 < 0$ .

Из дальнейших расчетов мы увидим, что амплитуда возмущенных полей в приближении идеальной МГД при  $x = x_A$  обращается в бесконечность ( $E_x, B_y \sim (x - x_A)^{-1}$ ;  $E_y, B_x \sim \ln|x - x_A|$ ). Эта сингулярность регулируется при учете различных эффектов, выходящих за рамки идеальной МГД, например диссипации. Наличие диссипации приводит к поглощению энергии волны. Замечательное свойство альфвеновского резонанса состоит в том, что это поглощение остается конечным при стремлении диссипативных коэффициентов (частоты соударений, сопротивления и т.д.) к нулю. При уменьшении диссипативных коэффициентов амплитуда возмущения в точке  $x = x_A$  увеличивается, а характерная ширина резонансного пика уменьшается таким образом, что диссипируемая мощность остается конечной.

Особенность решения регулируется также при учете кинетической дисперсии альфвеновской волны, которая приобретает возможность распространяться по координате  $x$ . В области альфвеновского резонанса происходит трансформация БМЗ в бегущую поперек магнитных оболочек альфвеновскую волну. Энергия, уносимая альфвеновской волной, остается конечной при стремлении дисперсии к нулю, причем точно такой же как и энергия, поглощаемая при диссипации колебаний.

Таким образом, энергия, теряемая БМЗ в области альфвеновского резонанса, не зависит от физического механизма, обеспечивающего ее «сток» (при условии, что определяющие его эффекты малы).

Описанное свойство альфвеновского резонанса формально-математически можно объяснить следующим образом. В рамках идеальной МГД решение полностью определяется правилами сшивки по обе стороны от особой точки  $x = x_A$ . Есть два возможных решения, определяемых при обходе этой точки сверху и снизу в комплексной плоскости  $x$ . Каждое из этих решений имеет вполне определенное соотношение между энергией падающей на область альфвеновского резонанса и отраженной от него БМЗ-волны. В одном решении поток энергии падающей волны больше чем отраженной, т.е. энергия колебаний в этой области поглощается, в другом — наоборот, больше поток энергии отраженной волны, т.е. энергия рождается. Второе решение представляется неприемлемым с физической точки зрения.

Выбор правила обхода особой точки диктуется решением задачи с начальными условиями, соответствующими увеличению амплитуды резонансных колебаний с течением времени. Такой подход впервые был использован в известной работе [57], в которой было открыто бесстолкновительное затухание ленгмюровских волн. Этот подход приводит к следующему правилу обхода особой точки. Правильный способ обхода определяется добавлением к частоте колебаний бесконечно малой положительной мнимой добавки:  $\omega \rightarrow \omega + i\bar{\gamma}$ , где  $\bar{\gamma} > 0$ . Эта добавка смещает особую точку  $x = x_A$  с вещественной оси и, тем самым, определяет путь обхода при аналитическом продолжении по вещественным  $x$ . Все рассмотренные выше механизмы регуляризации особенности соответствуют этому правилу.

Явления аналогичного рода встречаются в различных разделах физики плазмы и гидродинамики. Такова, например, упомянутая выше задача о затухании Ландау в бесстолкновительной плазме, задача о неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в сдвиговых течениях, ленгмюровский резонанс, обусловленный взаимодействием электромагнитной и ленгмюровской волн в неоднородной плазме.

## 2.2. Модель плавного переходного слоя и основное уравнение для МГД-колебаний

Представленная в предыдущем разделе качественная картина основана на результатах строгого исследования проблемы распространения МГД-волн в одномерно-неоднородной «холодной» плазме. Типичной задачей такого рода является задача о падении-отражении БМЗ-волны от плазменной неоднородности, имеющей вид плавного переходного слоя. Будем считать, что плотность плазмы  $\rho_0(x)$  монотонно растет от  $x = -\infty$  к  $x = +\infty$ . Тогда альфвеновская скорость будет монотонно

убывать в этом направлении. Зададим следующую модель распределения альфвеновской скорости:

$$v_A(x) = \frac{v_A^+}{2} \left[ 1 + \frac{v_A^-}{v_A^+} + \left( 1 - \frac{v_A^-}{v_A^+} \right) \text{th}(x/\Delta) \right], \quad (2.2.1)$$

где  $v_A^\pm$  — значения альфвеновской скорости при  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Delta$  — характерная ширина переходного слоя. Распределение  $v_A(x)$  представлено на рис. 2.3.

В общем случае уравнение, описывающее структуру МГД-колебаний по координате  $x$  в движущейся плазме с конечным давлением, имеет следующий вид (см. Приложение Б):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \rho_0 \Omega^2 \xi = 0. \quad (2.2.2)$$

Здесь  $v_x = d\xi/dt = \partial\xi/\partial t + (\mathbf{v}_0 \nabla) \xi$  —  $x$ -компонента скорости колебаний плазмы,  $\xi$  — смещение элемента плазмы по оси  $x$ ,  $\Omega^2 = \bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^2$ ,  $\bar{\omega} = \omega - k_z v_0$  — частота колебаний с учетом эффектом Доплера,

$$k_x^2 = \frac{\bar{\omega}^4}{\bar{\omega}^2 (v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} - k_z^2 - k_y^2 \quad (2.2.3)$$

— выражение для  $x$ -компоненты волнового вектора в ВКБ-приближении.

Выражения для других компонент волнового поля получены в приложении Б.

### 2.3. Отражение БМЗ-волны от переходного слоя в холодной плазме. Альфвеновский резонанс

Рассмотрим задачу о падении и отражении БМЗ-волны от неоднородности плазмы, имеющей вид плавного переходного слоя. Будем считать плазму идеальной, холодной ( $T_e = T_i = 0$ ) и неподвижной ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ). Пусть БМЗ-волна заданной амплитуды падает из  $x = +\infty$  на переходной слой вида (2.2.1), а параметры рассматриваемых колебаний  $\omega, k_y, k_z$  таковы, что в рассматриваемой среде имеется как точка альфвеновского резонанса  $x = x_A$ , так и точка отражения БМЗ-волны  $x = x_f$  (рис. 2.3). Отметим, что эта задача моделирует важное магнитосферное явление — падение БМЗ-волны из солнечного ветра на магнитосферу и возбуждение ею внутри магнитосферы стоячих альфвеновских волн.

В уравнении монохроматических колебаний плазмы (2.2.2) в этом случае  $k_x^2 = \omega^2/v_A^2 - k_y^2 - k_z^2$ . Можно также (2.2.2) представить в виде

$$\eta'' - [\ln(\rho_0 \Omega^2)]' \eta' + k_x^2 \eta = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\eta = \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $x$ . В приближении идеальной МГД уравнения (2.2.2), (2.3.1) определяют пространственную структуру поля колебаний, а при выходе за ее рамки они играют роль нулевого приближения.

Важным свойством уравнений (2.2.2), (2.3.1) является наличие особой точки  $x = x_A$ , в которой  $\Omega^2 = 0$ . Это точка альфвеновского резонанса. Еще одной особенностью этих уравнений в рассматриваемой модели среды является наличие точки поворота БМЗ-волны  $x = x_f$ , где в нуль обращается ВКБ-компонента волнового вектора  $k_x(x_f) = 0$ . Вид функции  $k_x^2(x)$  приведен на рис. 2.2, б. На асимптотике справа от  $x_f$ , в области прозрачности, решение рассматриваемой задачи представляет собой сумму падающей и отраженной от переходного слоя БМЗ-волн. На асимптотике слева, в области непрозрачности, решением искомой задачи является убывающее по амплитуде колебание БМЗ-типа. Эти условия являются граничными условиями рассматриваемой задачи.

Полное аналитическое решение (2.2.2) можно построить, если между точкой поворота  $x_f$  и точкой альфвеновского резонанса  $x_A$  применимо ВКБ-приближение. В окрестности этих точек условия применимости ВКБ-приближения нарушаются, и здесь следует использовать другие приближенные методы решения уравнений. Построим такое решение.

ВКБ-решение (2.2.2) в области непрозрачности  $x < x_A$  имеет вид

$$\xi = C \sqrt{\frac{|k_x|}{\rho_0 \Omega^2}} \exp\left(\int_{x_A}^x |k_x| dx'\right), \quad (2.3.2)$$

где  $C$  — константа.

Как мы уже отмечали, вблизи резонансной поверхности  $x = x_A$  приближение ВКБ неприменимо. При  $x \rightarrow x_A$  имеем  $k_x^2 \approx -k_y^2$ . При этом уравнение (2.2.2) имеет особенность. Регуляризуем особенность заменой  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma_A$  при  $\gamma_A \rightarrow 0$ . В данном случае  $\gamma_A$  играет роль декремента затухания альфвеновских волн в точке альфвеновского резонанса. Интересной особенностью этого резонанса является то, что скорость диссипации энергии при  $\gamma_A \rightarrow 0$  не зависит от величины  $\gamma_A$ . Вблизи  $x = x_A$  используем линейное разложение

$$\Omega^2 \approx -\omega^2[(x - x_A)/a_A + 2i\gamma_A/\omega] \quad (2.3.3)$$

в коэффициентах (2.2.2), где  $a_A = (\partial \ln(v_A^2)/\partial x)_{x=x_A}^{-1}$  — характерный масштаб изменения  $v_A(x)$  в точке альфвеновского резонанса. Подставляя это разложение в (2.2.2), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - x_A + i\varepsilon_A) \frac{\partial \xi}{\partial x} - k_y^2(x - x_A + i\varepsilon_A) \xi = 0, \quad (2.3.4)$$

где  $\varepsilon_A = 2a_A\gamma_A/\omega$ . Решением (2.3.4), сшивающимся с (2.3.2)<sup>1)</sup>, будет

$$\xi = C_A K_0[-k_y(x - x_A + i\varepsilon_A)], \quad (2.3.5)$$

где  $K_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя,  $C_A$  — константа. При  $x \rightarrow x_A$  имеем

$$\xi = -C_A \ln[-k_y(x - x_A + i\varepsilon_A)]. \quad (2.3.6)$$

При  $\gamma_A = 0$  это решение имеет хорошо известную логарифмическую особенность в точке альфвеновского резонанса  $x = x_A$ . При этом компоненты магнитного поля колебаний, как следует из (Б.14), имеют вид

$$\begin{aligned} B_x &= ib_0 \ln[-k_y(x - x_A + i\varepsilon_A)], & B_y &= \frac{b_0}{k_y(x - x_A + i\varepsilon_A)}, \\ B_z &= -\frac{k_z}{k_y^2 a_A} b_0, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

где

$$b_0 = C_A k_z B_0. \quad (2.3.8)$$

Характерной особенностью полученного решения является изменение поляризации колебаний при переходе через резонансную поверхность, что связано с изменением знака компоненты  $B_y$ . Типичное поведение годографа колебаний в плоскости  $(B_x, B_y)$  в разных точках вблизи резонансной поверхности показано на рис. 2.3. Слева и справа от резонансной поверхности  $x = x_A$  годограф вращается в разные стороны, а главная ось эллипса поляризации меняет угол наклона. Эта особенность резонансных альфвеновских волн широко используется для их идентификации в наблюдаемых в магнитосфере МГД-колебаниях [37–39]. Сшивка (2.3.5) с решением (2.3.2) дает связь констант  $C_A = C(k_y/\omega)\sqrt{2a_A/\pi\rho_{0A}}$ , где нижний индекс  $A$  обозначает параметры в точке альфвеновского резонанса  $x = x_A$ .

ВКБ-решение в области непрозрачности  $x_A < x < x_f$  имеет вид

$$\xi = \sqrt{\frac{|k_x|}{\rho_0\Omega^2}} \left[ C_1 \exp\left(\int_{x_f}^x |k_x| dx'\right) + C_2 \exp\left(-\int_{x_f}^x |k_x| dx'\right) \right]. \quad (2.3.9)$$

Его сшивка с (2.3.5) дает  $C_1 = C_A(k_z B_{0A}/2k_y\sqrt{2a_A})e^\Gamma$ , где  $\Gamma = \int_{x_A}^{x_f} |k_x| dx$ . Приближение ВКБ, использованное между  $x_A$  до  $x_f$ , не позволяет учитывать падающую экспоненту на фоне растущей. Ее учет был бы превышением точности асимптотического разложения.

Решение в окрестности точки поворота  $x = x_f$  можно построить для функции  $\eta$  (см. (2.3.1)). Линеаризуя  $k_x^2 \approx (x - x_f)/a_f^3$  вблизи  $x = x_f$

<sup>1)</sup> Сшивка решений (2.3.5) и (2.3.2) осуществляется путем сшивания внутренней асимптотики решения (2.3.2) при  $x \rightarrow x_A$  ( $\xi \approx (C/\omega)\sqrt{k_y a_A/\rho_0|x - x_A|} \exp(-k_y|x - x_A|)$ ) с внешней асимптотикой (2.3.5) при  $k_y(x - x_A) \rightarrow -\infty$  ( $\xi \approx C_A\sqrt{\pi/2k_y|x - x_A|} \exp(-k_y|x - x_A|)$ ).

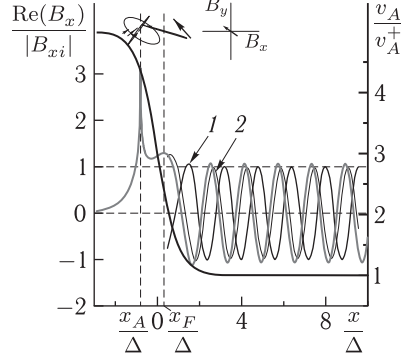


Рис. 2.3. Распределение  $B_x$ -компоненты поля МГД-колебаний в задаче о падении-отражении БМЗ-волны от переходного слоя с точкой альфвеновского резонанса (ось слева). Серая линия — полное поле колебаний (численный расчет), 1 — падающая на переходной слой БМЗ-волна, 2 — отраженная от переходного слоя БМЗ-волна (ВКБ-приближение). Вверху показаны годографы колебаний в разных точках  $x$ . Распределение альфвеновской скорости  $v_A$  по координате  $x$  (жирная линия — ось справа)

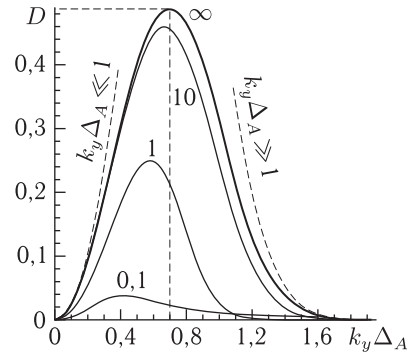


Рис. 2.4. Зависимость коэффициента поглощения БМЗ-волн (в точке альфвеновского резонанса), падающих на переходной слой, от параметра  $k_y \Delta_A$ . Показаны распределения для различных значений  $k_z \Delta = 0, 1; 1; 10; \infty$ . Предельная кривая при  $k_z \Delta \rightarrow \infty$  соответствует бесконечному слою с линейным распределением  $v_A(x)$ . Штриховые линии показывают аналитические распределения в двух предельных случаях  $k_y \Delta_A \gg 1$  и  $k_y \Delta_A \ll 1$ , описываемых формулами (2.3.16) и (2.3.18)

(где  $a_f^{-3} = -(\partial k_x^2 / \partial x)_{x=x_f}$ ), получаем уравнение Эйри для функции  $\eta$ :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a_f^{-3}(x - x_f)\eta = 0. \quad (2.3.10)$$

Его решение, сшивающееся с (2.3.9),

$$\eta = C_f Ai[-(x - x_f)/a_f], \quad (2.3.11)$$

где  $Ai(z)$  — функция Эйри,  $C_f = C_1 k_y B_{0f} \sqrt{a_f}$ , а нижний индекс  $f$  обозначает величины в точке  $x = x_f$ .

ВКБ-решение в области прозрачности  $x > x_f$  представим в виде

$$\xi = \sqrt{\frac{k_x}{\rho_0 \Omega^2}} \left[ C_i \exp\left(-i \int_{x_f}^x k_x dx'\right) + C_r \exp\left(i \int_{x_f}^x k_x dx'\right) \right], \quad (2.3.12)$$

где  $C_i$  — амплитуда падающей, а  $C_r$  — амплитуда отраженной БМЗ-волны. Сшивка (2.3.12) с (2.3.11) на асимптотике дает  $C_r = iC_i = -C_f e^{i\pi/4} / k_y B_{0f} \sqrt{a_f}$  и  $C_1 = -C_i e^{i\pi/4}$ . Потеря падающей экспоненты

в области непрозрачности  $x_A < x < x_f$  приводит к тому, что в решении (2.3.12)  $|C_i| = |C_r|$ , т.е. теряется малый эффект поглощения падающей волны в точке альфвеновского резонанса. Если характерное значение волнового вектора такое, что  $k_y \Delta, k_z \Delta \sim 1$ , это приближение становится слишком грубым и корректный расчет поля МГД-колебаний можно получить только численными методами.

Отметим несколько существенных моментов. Как видно из выражений (2.3.5), (2.3.6), особая точка  $x_A$  обходится сверху. Амплитуда возмущения экспоненциально растет от  $x_A$  до  $x_f$  и этот рост определяется множителем  $\exp(\Gamma)$ , где

$$\Gamma = \int_{x_A}^{x_f} |k_x(x)| dx. \quad (2.3.13)$$

При  $k_y \Delta_A \gg 1$ , где  $\Delta_A = x_f - x_A$ , эта величина велика:  $\Gamma \gg 1$ . Если разложение (2.3.3) применимо на всем интервале  $(x_A, x_f)$ , то интеграл легко вычисляется:

$$\Gamma = (2/3)(k_y \Delta_A)^3. \quad (2.3.14)$$

Это выражение можно использовать для оценки по порядку величины.

В общем случае задача о падении БМЗ-волны на произвольный переходной слой может быть решена только численно. На рис. 2.3 представлено численное решение такой задачи с переходным слоем вида (2.2.1). Приведено распределение  $B_x$ -компоненты полного поля МГД-колебаний и его разложение на асимптотике справа от  $x_f$ , где применимо ВКБ-приближение вида (2.3.12), на падающую и отраженную от переходного слоя БМЗ-волны. Особенность решения в точке альфвеновского резонанса регуляризована наличием малой диссипации  $\bar{\gamma}/\omega = 10^{-3}$ . Отметим, что в этом случае амплитуда падающей волны больше амплитуды отраженной. Это связано с поглощением части энергии в точке альфвеновского резонанса. Коэффициент поглощения определяется как

$$D = 1 - R, \quad (2.3.15)$$

где

$$R = \frac{|C_r|^2}{|C_i|^2}$$

— коэффициент отражения БМЗ-волны от переходного слоя.

В двух предельных случаях выражения для коэффициента поглощения колебаний  $D$  можно определить аналитически, анализируя баланс энергии падающей и отраженной БМЗ-волн и энергии, поглощенной в области альфвеновского резонанса (см. раздел 2.4). В рассмотренном выше примере, когда между точками  $x_A$  и  $x_f$  применимо ВКБ-приближение (при  $k_y \Delta_A \gg 1$ ), имеем

$$D = 2 \exp(-2\Gamma). \quad (2.3.16)$$



Величина  $\Gamma$  является функцией  $k_y$ , но в общем случае может зависеть и от других параметров, определяющих свойства волны и равновесной плазмы. Универсальный вид  $\Gamma(k_y)$  имеет в случае, когда применимо выражение (2.3.14), и тогда

$$D = 2 \exp[-(4/3)(k_y \Delta_A)^3]. \quad (2.3.17)$$

В другом предельном случае (при  $k_y \Delta_A \ll 1$ ) имеем

$$D = \lambda k_y^2 \Delta_A^2, \quad (2.3.18)$$

где  $\lambda = [2\pi A i'(0)]^2 \approx 2.6$ .

На рис. 2.4 представлены рассчитанные численно (для профиля альфвеновской скорости (2.2.1)) распределения коэффициента поглощения  $D$  как функции от безразмерного параметра  $k_y \Delta_A$  при различных значениях  $k_z \Delta$ . При этом выбирались предельно малые значения декремента  $\bar{\gamma}/\omega \rightarrow 0$ . Там же приведены зависимости  $D(k_y \Delta_A)$ , задаваемые формулами (2.3.16) и (2.3.18) в двух рассмотренных выше предельных случаях. Параметр  $k_z \Delta$  определяет характерное расстояние от точки поворота, на котором становится применимо приближение ВКБ. При  $k_z \Delta \rightarrow \infty$  рассмотренная задача становится аналогичной задаче с линейным профилем неоднородности, которая решалась неоднократно (см. [51]). Отметим, что параметры наблюдаемых в магнитосфере МГД-колебаний далеки от тех, которые соответствуют задаче с линейным профилем  $v_A(x)$ . Им более соответствует задача с плавным переходным слоем.

## 2.4. Возбуждение альфвеновского резонанса волновым импульсом

До сих пор мы рассматривали отдельную гармонику колебаний с заданными значениями  $\omega$ ,  $k_z$  и  $k_y$ . Колебания, наблюдаемые в реальных условиях, имеют более сложную структуру — являются суперпозицией определенного набора таких гармоник<sup>1)</sup>. Следует отметить принципиальное отличие между суперпозицией по различным значениям  $k_z$  и  $k_y$  и суперпозицией по частотам  $\omega$ . Значения компоненты волнового вектора  $k_z = \pi N/L$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) образуют дискретный набор. Условия генерации (т.е. механизмы возбуждения) волн с разными  $N$  обычно настолько сильно различаются, что основной вклад дают несколько первых гармоник с разными  $N$ , а зачастую лишь одна из них. Учитывая, что в рассматриваемой нами модели среды координата  $y$  соответствует азимутальной координате в аксиально-симметричных моделях магнитосферы, можно условно считать  $k_y = m/a$  (где  $m = 0, 1, 2, \dots$  —

<sup>1)</sup> Заметим, что рассматриваемая здесь модель магнитосферы в виде одномерно-неоднородного переходного слоя также является только грубым приближением к реальности.

азимутальное волновое число,  $a$  — радиальная координата). Поэтому рассмотрение колебаний с определенными  $k_z$  и  $k_y$  вполне оправдано. С суперпозицией по частотам  $\omega$  дело обстоит совершенно иначе. Частота может принимать непрерывный ряд значений и свойства суммы частотных гармоник могут радикально отличаться от свойств каждого слагаемого. Далее мы рассмотрим суперпозицию таких гармоник, предполагая  $k_z$  и  $k_y$  фиксированными.

Среди всего многообразия нестационарных колебаний можно выделить два, в определенном смысле, противоположных класса. Один из них — это колебания со строго коррелированными фазами, примером которых является волновой пакет. Другой класс — это колебания со случайными фазами. Предельным примером такого явления является белый шум, в котором фазы отдельных гармоник совершенно некоррелированы. Падение волнового импульса из солнечного ветра на лобовую часть магнитосферы соответствует первому из этих классов колебаний, а накачка резонансных колебаний магнитосферы стохастическими шумами из солнечного ветра — второму.

Пусть  $\xi(x, \omega)$  — решение с заданными  $\omega$ ,  $k_z$  и  $k_y$ , нормированное так, что в области прозрачности справа от переходного слоя (см. (2.2.1) и рис. 2.5), где применимо ВКБ-приближение, падающая волна имеет единичную амплитуду ( $C_i = 1$  в (2.3.12)). Тогда амплитуда отраженной волны (обозначим ее как  $S(\omega) \equiv C_r$ ) связана с коэффициентом отражения соотношением  $R = |S(\omega)|^2$ . Обозначим, кроме того, пространственную фазу по координате  $x$  как

$$\Psi_x(x, \omega) = \int_{x_f(\omega)}^x k_x(x', \omega) dx'. \quad (2.4.1)$$

Составим из нормированных так решений (2.3.12) волновой пакет

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}(\omega) \xi(x, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (2.4.2)$$

Для амплитудной функции  $\tilde{C}(\omega)$  примем простейшую модель гауссовского распределения:

$$\tilde{C}(\omega) = \bar{C} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i\omega t_0 - \frac{(\omega - \omega_0)^2 T^2}{2}\right), \quad (2.4.3)$$

и будем предполагать, что характерная ширина пакета  $1/T$  много меньше несущей частоты  $\omega_0$ :

$$\omega_0 T \gg 1. \quad (2.4.4)$$

Смысл момента времени  $t_0$  будет виден из дальнейших расчетов. Будем полагать также, что для БМЗ-волн с несущей частотой  $\omega_0$  в области переходного слоя имеются как точка поворота  $x = x_f(\omega_0)$ , так и точка альфвеновского резонанса  $x_0 = x_A(\omega_0)$ .

Рассмотрим решение (2.4.2) в области прозрачности, где можно использовать ВКБ-представление (2.3.12). Учитывая малую ширину пакета по  $\omega$ , разложим  $\Psi_x(x, \omega)$  в ряд в точке  $\omega = \omega_0$ :

$$\Psi_x(x, \omega) = \Psi_x(x, \omega_0) + \frac{\partial \Psi_x(x, \omega_0)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_x(x, \omega_0)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.4.5)$$

Имеем  $\partial \Psi_x(x, \omega) / \partial \omega = t_g$ , где

$$t_g(x, \omega) = \int_{x_f(\omega)}^x \frac{dx'}{v_g(x', \omega)} \quad (2.4.6)$$

— время пробега волнового пакета с центральной частотой  $\omega$ , движущегося с локальной групповой скоростью

$$v_g(x, \omega) = \left[ \frac{\partial k_x(x, \omega)}{\partial \omega} \right]^{-1}$$

от точки  $x_f(\omega)$  до  $x$ . В (2.4.6) учтено, что производная по нижнему пределу в (2.4.1) равна нулю ( $k_x(x_f(\omega)) = 0$ ).

Обозначим

$$\tilde{t}^2 = \frac{\partial^2 \Psi_x(x, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\partial t_g(x, \omega)}{\partial \omega}.$$

Величина  $\tilde{t}$  имеет размерность времени. По порядку величины

$$\Psi_x(x, \omega) \sim \frac{\omega_0(x - x_0)}{v_A}, \quad t_g \sim \frac{x - x_0}{v_A}, \quad \tilde{t}^2 \sim \frac{x - x_0}{\omega_0 v_A}, \quad (2.4.7)$$

где  $v_A$  — характерное значение скорости Альфвена. Для функции (2.4.3) интегрирование фактически производится в интервале  $|\omega - \omega_0| \lesssim 1/T$ . С учетом (2.4.7) в этом интервале последовательные члены разложения (2.4.5) убывают, т.е. разложение правомерно.

При подстановке (2.3.12) и (2.4.3) в (2.4.2) и с учетом разложения (2.4.5) интеграл по  $\omega$  легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & \bar{C} \left[ \frac{k_x(x, \omega_0)}{\rho_0(x) \Omega^2(x, \omega_0)} \right]^{1/2} \exp[-i\omega_0(t - t_0)] \times \\ & \times \left\{ \frac{T}{\sqrt{T^2 + i\tilde{t}^2}} \exp \left[ -i\Psi(x, \omega_0) - \frac{(t - t_0 + t_g)^2}{T^2 + i\tilde{t}^2} \right] + \right. \\ & \left. + S(\omega_0) \frac{T}{\sqrt{T^2 - i\tilde{t}^2}} \exp \left[ i\Psi(x, \omega_0) - \frac{(t - t_0 - t_g)^2}{T^2 - i\tilde{t}^2} \right] \right\}. \quad (2.4.8) \end{aligned}$$

Здесь медленно меняющиеся функции частоты  $\Omega^2(x, \omega)$ ,  $k_x(x, \omega)$  и  $S(\omega)$  вынесены из-под знака интеграла в точке  $\omega = \omega_0$ . Функции  $t_g(x, \omega)$  и  $\tilde{t}^2(x, \omega)$  также берутся в точке  $\omega = \omega_0$  по смыслу вычисления.

Оба слагаемых в фигурной скобке (2.4.8) представляют собой гауссовские функции по  $t$ , максимумы которых находятся в точках, определяемых уравнением

$$t_g(x, \omega_0) = \pm(t - t_0) \quad (2.4.9)$$

— знак минус отвечает первому слагаемому, знак плюс — второму. Согласно определению, функция  $t_g(x, \omega)$  положительна. Это означает, что первый член в (2.4.8) описывает прибегающий из бесконечности волновой пакет, максимум которого пробегает через точку  $x$  в момент времени  $t = t_0 - t_g(x, \omega_0)$ , а второй — отраженный пакет, пробегающий через эту же точку в момент времени  $t = t_0 + t_g(x, \omega_0)$ . Характерная длительность пакета по времени  $\Delta t = (T^4 + \tilde{t}^4)^{1/4}$ . В момент времени  $t = t_0$  происходит его отражение от области вблизи точки поворота  $x_f(\omega_0)$ .

Для удобства преобразуем (2.4.8) следующим образом. Введем функцию  $x = x_g(\tau, \omega_0)$ , обратную к  $\tau = t_g(x, \omega_0)$ . Величина  $x_g(\tau, \omega_0)$  представляет собой координату  $x$ , которой достигает волновой пакет, стартовавший из точки  $x = x_f(\omega_0)$  в момент времени  $\tau = 0$ . Функция  $t_g(x, \omega_0)$  положительна. Это означает, что при знаке минус (2.4.9) имеет решение  $x_g(t_0 - t, \omega_0)$ , если  $t < t_0$ , а при знаке плюс — решение  $x_g(t - t_0, \omega_0)$ , если  $t > t_0$ . Если рассматривать (2.4.8) как функцию  $x$  при заданном  $t$ , то первый член в фигурной скобке имеет максимум в точке  $x = x_g(t_0 - t, \omega_0)$  при  $t < t_0$ , в второй — максимум в  $x = x_g(t - t_0, \omega_0)$  при  $t > t_0$ . Рассматривая значения  $x$  не очень далекие от этих максимумов, можно привести (2.4.8) к виду

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & \bar{C} \left[ \frac{k_x(x, \omega_0)}{\rho_0(x)\Omega^2(x, \omega_0)} \right]^{1/2} \times \\ & \times \left\{ \theta(t_0 - t) \left( \frac{T^2}{T^2 + i\tilde{t}^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -i\Psi(x, \omega_0) - \frac{(x - x_g(t_0 - t, \omega_0))^2}{2v_g^2(T^2 + i\tilde{t}^2)} \right] + \right. \\ & \left. + \theta(t - t_0)S(\omega_0) \left( \frac{T^2}{T^2 - i\tilde{t}^2} \right)^{1/2} \exp \left[ i\Psi(x, \omega_0) - \frac{(x - x_g(t - t_0, \omega_0))^2}{2v_g^2(T^2 - i\tilde{t}^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Первый член в фигурной скобке в (2.4.10) описывает волновой пакет, бегущий при  $t < t_0$  из  $x = +\infty$  с групповой скоростью  $v_g$ . Второй — пакет отраженный от переходного слоя и убегающий от него при  $t > t_0$  с той же групповой скоростью. Его амплитуда умножается на  $S(\omega_0)$ . Отражение происходит примерно в момент времени  $t = t_0$ , но этот процесс не описывается выражением (2.4.10), так как вблизи точки отражения  $x = x_f(\omega_0)$  приближение ВКБ неприменимо.

Ширина волнового пакета имеет минимальное значение вблизи  $x = x_f(\omega_0)$ , где  $\tilde{t}^2 = 0$ , и по порядку величины равна  $v_g T$ . Будем

полагать, что эта ширина много меньше характерного масштаба неоднородности  $\Delta$ . Вместе с неравенством (2.4.4) это приводит к следующим условиям, которым должен удовлетворять параметр  $T$ :

$$\frac{1}{\omega_0} \ll T \ll \frac{\Delta}{v_A} = \frac{k_z \Delta}{\omega_0}. \quad (2.4.11)$$

Эти неравенства совместимы, так как условие применимости приближения ВКБ, которое мы предполагаем выполненным, означает  $k_z \Delta \gg 1$ . Вдали от точки отражения характерная ширина пакета

$$\Delta x = v_g (T^4 + \tilde{t}^4)^{1/4} \sim v_A (T^4 + \tilde{t}^4)^{1/4}.$$

Если  $\tilde{t} \gg T$ , что согласно (2.4.11) и (2.4.7) означает  $k_z(x - x_0) \gg 1$ , то

$$\Delta x \sim \left( \frac{x - x_0}{k_z} \right)^{1/2} \ll x - x_0. \quad (2.4.12)$$

Таким образом, пакет всегда можно считать достаточно узким по  $x$  — вблизи точки отражения его ширина много меньше  $\Delta$ , а вдали — много меньше расстояния до нее.

Отметим существенное обстоятельство. Отраженный волновой пакет расплывается, а набегающий — сжимается. Такое поведение представляется нефизическим. Как правило, волновой пакет, сформированный в некий момент времени будет расплываться. Надо специальным образом подобрать фазы отдельных гармоник, чтобы пакет после формирования начал сжиматься. Однако, если мы рассматриваем пакет, набегающий из  $x = +\infty$ , то с указанным недостатком решения (2.4.10) следует смириться. Если на  $x = +\infty$  сформировать расплывающийся пакет, то по достижении точки отражения его ширина будет бесконечной и его нельзя будет рассматривать как пакет. Реальным является решение в виде набегающего пакета, сформированного на конечном расстоянии  $x_0$ . Далее мы представим такое решение, полученное численным интегрированием волнового уравнения.

Внутри пакета имеется мелкомасштабное заполнение, описываемое фазами

$$\pm \Psi_x(x, \omega_0) \approx \pm [\Psi_x(x_g, \omega_0) + k_x(x_g, \omega_0)(x - x_g)].$$

Набег фазы внутри пакета вблизи точки отражения

$$\Delta \Psi_x \sim k_x \Delta x \sim k_x v_g T \sim \omega_0 T \gg 1,$$

а вдали от нее

$$\Delta \Psi_x \sim k_x v_g \tilde{t} \sim [k_z(x - x_0)]^{1/2} \gg 1.$$

В обоих случаях  $\Delta \Psi_x \gg 1$ . Это означает, что внутри пакета укладывается много длин волн.

Таким же образом можно исследовать структуру волнового поля и в области альфвеновского резонанса. Однако это достаточно громоздкое аналитическое исследование. Для того, чтобы понять поведение колебаний в процессе отражения от переходного слоя, можно численно проинтегрировать уравнение, описывающее эволюцию начального волнового пакета со временем. Для этого в уравнении (2.2.2) следует заменить частоту  $\omega$  на производную по времени  $\omega = i\partial/\partial t$ , действующую на компоненту смещения плазмы  $\xi$ . Тогда, полагая, что неоднородность плазмы связана только с неоднородностью ее плотности, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Omega^2}{\Omega_f^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + k_z^2 \xi = 0, \quad (2.4.13)$$

описывающее распространение пакета МГД-волн в одномерно-неоднородной плазме. Напомним, что здесь  $v_A(x)$  — альфвеновская скорость, которую мы смоделируем переходным слоем (2.2.1) единичной толщины ( $\Delta = 1$ ),  $\Omega^2 = (\omega + i\bar{\gamma})^2 - k_z^2 v_A^2$ ,  $\Omega_f^2 = \omega^2 - (k_y^2 + k_z^2) v_A^2$ . Декремент  $\bar{\gamma}$  введен здесь для регуляризации особенности в точке альфвеновского резонанса  $x_A$ .

Задавая в момент времени  $t_0$  начальный волновой пакет в виде

$$\xi(x, t_0) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta_x^2} - ik_x x - (i\omega_0 + \bar{\gamma})t_0\right),$$

где  $\Delta_x = 0.9\Delta$  — начальная ширина волнового пакета,  $\omega_0 = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} v_A(x_f)$  — его центральная частота, для которой точка отражения БМЗ-волны  $x = x_f$  находится точно в центре переходного слоя,  $k_x = \Omega_f(x_0, \omega_0)/v_A(x_0)$  — асимптотическое значение  $x$ -компоненты волнового вектора в ВКБ-приближении в точке начальной локализации пакета  $x_0 = 2\pi\Delta$ . Задавая также  $k_y = k_z = 4/\Delta_x$ ,  $\bar{\gamma} = 0, 1\omega_0$  и  $t_0 = 0$ , проведем интегрирование (2.4.13) по двум переменным  $x$  и  $t$ . Результат представлен на рис. 2.5 для компоненты магнитного поля колебаний

$$B_y = B_0 \frac{k_y k_z v_A^2}{\Omega_f^2} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

имеющей наибольшую амплитуду в точке альфвеновского резонанса.

В начальный момент времени пакет БМЗ-волн движется по направлению к переходному слою, сохраняя свою структуру практически до момента отражения. В процессе отражения происходит остановка пакета ( $v_g(x_f) = 0$ ) и изменение знака групповой скорости. Видно резкое усиление амплитуды колебаний, связанное с раскачкой резонансных альфвеновских волн с частотой, равной центральной частоте заполнения волнового пакета. После отражения амплитуда пакета уменьшается из-за поглощения части его энергии в точке альфвеновского

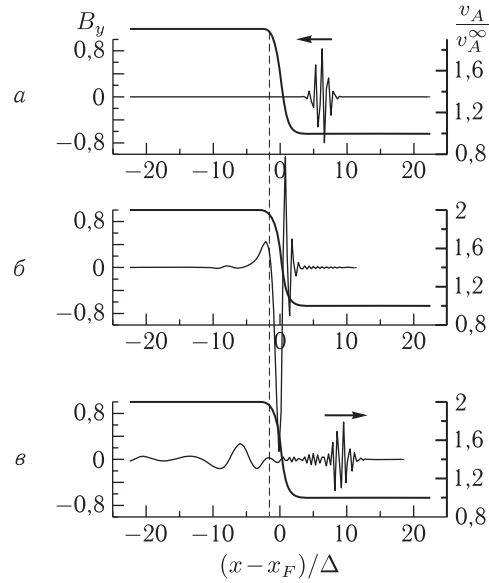


Рис. 2.5. Эволюция пакета БМЗ-волн, падающего на плавный переходной слой с точкой альфвеновского резонанса  $x = x_A$ . Представлено распределение альфвеновской скорости  $v_A(x)$  (правая координатная ось) и  $B_y$ -компоненты волнового поля (левая координатная ось):  $a$  — начальное состояние волнового пакета единичной амплитуды;  $b$  — структура поля в момент отражения пакета от переходного слоя;  $v$  — структура волнового пакета, после отражения от переходного слоя

резонанса, а сам пакет «расплывается» из-за разбегания его гармоник по фазам.

### 2.5. Энергетический баланс в задаче о падении и отражении БМЗ-волны от переходного слоя с точкой альфвеновского резонанса

Рассмотрим энергетический баланс в задаче о падении-отражении монохроматической БМЗ-волны от переходного слоя, рассмотренной в разд. 2.3. Определим разность между потоками энергии падающей на переходный слой и отраженной от него БМЗ-волн и сравним ее с мощностью, поглощаемой плазмой в области альфвеновского резонанса. Найдем также коэффициент отражения БМЗ-волны, падающей на переходной слой, и коэффициент ее поглощения в области резонанса в двух предельных случаях:  $k_y \Delta_A \gg 1$  и  $k_y \Delta_A \ll 1$ , где  $\Delta_A = x_f - x_A$  — расстояние между точкой поворота БМЗ-волны и точкой альфвеновского резонанса (см. рис. 2.3).

Представим тензор диэлектрической проницаемости в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой частей:

$$\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + i\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)},$$

где оба тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$  и  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$  эрмитовы ( $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)*} = \varepsilon_{\beta\alpha}^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)*} = \varepsilon_{\beta\alpha}^{(2)}$ , где  $\varepsilon^*$  обозначает комплексно сопряженную величину), а нижние индексы  $\alpha\beta$  в евклидовой системе координат  $(x, y, z)$  могут принимать значения  $x, y, z$ . В идеальной плазме в тензоре  $\hat{\varepsilon}$  для МГД-волн отличны от нуля только диагональные эрмитовы компоненты:  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = c^2/v_A^2$ ,  $\varepsilon_{zz} = \infty$ . В этом приближении у альфвеновских волн отсутствует поперечная дисперсия и их групповая и фазовая скорости направлены строго вдоль магнитных силовых линий.

В неидеальной плазме в компонентах тензора  $\hat{\varepsilon}$  появляются слабые, определяющие поперечную дисперсию альфвеновских волн, в том числе и в недиагональных компонентах, включающих антиэрмитову часть. Явный вид тензора  $\hat{\varepsilon}$  для альфвеновских колебаний в неидеальной плазме приведен в разделе 2.7. Для слабозатухающих колебаний  $|\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}| \ll |\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}|$ . Аналогично представляется тензор проводимости

$$\hat{\sigma} = -i\frac{\omega}{4\pi}\hat{\varepsilon}, \quad (2.5.1)$$

откуда следует

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = (\omega/4\pi)\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = -(\omega/4\pi)\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}.$$

Энергетический баланс рассматриваемого волнового процесса описывается уравнением (см. [58])

$$\operatorname{div}\mathbf{S} + Q + \partial H/\partial t = 0. \quad (2.5.2)$$

Здесь <sup>1)</sup>

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} ([\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}]) - \omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial \mathbf{k}} \frac{E_\alpha^* E_\beta}{16\pi}$$

— усредненный по времени поток энергии волны, который включает в себя не только поток электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга), но и поток механической энергии волны. Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам  $\alpha\beta$ . Последнее слагаемое в этом выражении отлично от нуля только для МГД-колебаний в неидеальной плазме. Оно, в частности, описывает поток энергии кинетических альфвеновских волн поперек магнитных оболочек, связанный с их

<sup>1)</sup> Использование комплексной записи для возмущенных величин  $F = f \exp(-i\omega t)$ , где  $f = f_1 + if_2$  — функция координат, подразумевает, что  $\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} f \exp(-i\omega t) = f_1 \cos(\omega t) + f_2 \sin(\omega t)$ . Поэтому для усреднения билинейной функции имеем  $\overline{F\bar{H}} \rightarrow \overline{\operatorname{Re} F \cdot \operatorname{Re} \bar{H}} = (1/2)(f_1 h_1 + f_2 h_2) = (1/4)(fh^* + f^*h)$



поперечной дисперсией. Усредненная по времени плотность диссипируемой мощности колебаний имеет вид

$$Q = (1/2) (\mathbf{j}\mathbf{E}^* + \mathbf{j}^*\mathbf{E}) = (1/2)\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}E_{\alpha}^*E_{\beta},$$

а усредненная по времени плотность электромагнитной энергии

$$H = \frac{c}{16\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$$

описывает увеличение энергии электромагнитного поля колебаний, связанное с ростом их амплитуды.

Рассмотрим колебания в модели среды, имеющей вид плазменного слоя, ограниченного по координате  $z$  двумя идеально проводящими границами (см. рис. 2.1). Будем считать плазму неоднородной только по координате  $x$ . Структуру компонент электромагнитного поля колебаний в такой модели можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= e_{x,y}(x)V_N(z)e^{ik_y y}, & E_z &= e_z(x)U_N(z)e^{ik_y y}, \\ B_{x,y} &= b_{x,y}(x)U_N(z)e^{ik_y y}, & B_z &= b_z(x)V_N(z)e^{ik_y y}, \end{aligned}$$

где  $V_N(z) = \sin k_z N z$ ,  $U_N(z) = \cos k_z N z$  — функции, описывающие структуру волнового поля в виде стоячих вдоль магнитных силовых линий волн, запертых между отражающими границами  $z_+$  и  $z_-$ ,  $k_z N = \pi N/L$ ,  $L = z_+ - z_-$  — длина силовой линии,  $N = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники стоячих волн.

Поскольку входящие в (2.5.2) слагаемые зависят от  $z$  как  $U_N^2(z)$  или как  $V_N^2(z)$ , их усреднение по  $z$  дает множитель  $1/2$ . В рассматриваемой нами модели среды  $S_z = 0$  и  $\partial S_y / \partial y = 0$ . Обозначая усреднение по  $z$  чертой сверху, приводим (2.5.2) к виду

$$\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \bar{Q} + \partial \bar{H} / \partial t = 0, \quad (2.5.3)$$

где

$$\bar{S}_x = \frac{c}{32\pi} (e_y b_z^* - e_z b_y^* + e_y^* b_z - e_z^* b_y) - \omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial k_x} \frac{e_{\alpha}^* e_{\beta}}{32\pi}, \quad (2.5.4)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} e_{\alpha}^* e_{\beta}, \quad (2.5.5)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{32\pi} (|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{b}|^2). \quad (2.5.6)$$

Проинтегрируем (2.5.3) по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и результат представим в виде

$$\bar{S}_x(\infty) - \bar{S}_x(-\infty) + W = 0, \quad (2.5.7)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \bar{Q} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) dx. \quad (2.5.8)$$

В интегральном законе сохранения (2.5.7) первые два члена определяют «приход» энергии из бесконечности, а последний — ее «расход» на диссипацию и увеличение амплитуды волны.

Рассмотрим закон сохранения (2.5.7) в холодной идеальной плазме. В этом случае  $e_z = 0$ ,  $\partial\varepsilon_{\alpha\beta}/\partial k_x = 0$  и

$$\bar{S}_x = \frac{c}{32\pi}(e_y b_z^* + e_y^* b_z).$$

Выражая компоненты поля колебаний  $e_y$  и  $b_z$ , как и в разделе 2.3, через смещение плазмы  $\xi$  по координате  $x$  (см. Приложение Б):

$$e_y = -i\frac{\omega}{c}B_0\xi, \quad b_z = -B_0\frac{\Omega^2}{\Omega_f^2}\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

получаем

$$\bar{S}_x = ib_0^2\frac{\omega}{32\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega_f^2}\left(\xi\frac{\partial\xi^*}{\partial x} - \xi^*\frac{\partial\xi}{\partial x}\right),$$

где  $\Omega_f^2 = \Omega^2 - k_y^2 v_A^2 = \omega^2 - (k_y^2 + k_z^2)v_A^2$ . На правой асимптотике при  $x \rightarrow \infty$ , где для  $\xi$  применимо выражение (2.3.12) и  $k_x^2 = \Omega_f^2/v_A^2$ , имеем

$$\bar{S}_x = -\frac{\omega}{4}(|C_i|^2 - |C_r|^2) \quad (2.5.9)$$

— разность потоков энергии падающей и отраженной от переходного слоя БМЗ-волн. При  $x \rightarrow -\infty$  функция  $\xi(x) \rightarrow 0$ , поэтому  $\bar{S}_x(-\infty) = 0$  и

$$\bar{S}_x(+\infty) - \bar{S}_x(-\infty) = -\frac{\omega}{4}(|C_i|^2 - |C_r|^2). \quad (2.5.10)$$

Здесь предполагается, что поток энергии, переносимый падающей на переходной слой волной, отрицателен, а переносимый отраженной волной — положителен. При выводе (2.5.10) пренебрегалось малой мнимой добавкой к частоте, так как в асимптотической области она несущественна. Напротив, при вычислении  $\bar{Q}$  и  $\partial\bar{H}/\partial t$  именно она определяет весь эффект. Как видно из (2.5.1), она приводит к наличию реальной части тензора проводимости

$$\sigma_{\perp} = \frac{(-i\omega + \bar{\gamma})c^2}{4\pi v_A^2}$$

и, следовательно, определяет диссипируемую мощность:

$$\bar{Q} = \frac{1}{4}\sigma_{\perp}^{(1)}|\mathbf{e}|^2 = \frac{\bar{\gamma}}{16\pi}\frac{c^2}{v_A^2}|\mathbf{e}|^2. \quad (2.5.11)$$

Для скорости увеличения энергии электромагнитного поля колебаний имеем

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} = 2\bar{\gamma}\bar{H} = \frac{\bar{\gamma}}{16\pi}(|b|^2 + |e|^2).$$

Наличие у частоты мнимой добавки означает, что рассматриваемое возмущение растет с инкрементом  $\bar{\gamma}$  и, учитывая, что в гидромагнитных волнах  $|\mathbf{E}| \approx (v_A/c)|\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}|$ , имеем

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \approx \frac{\bar{\gamma}}{16\pi} |b|^2 = \frac{\bar{\gamma}}{16\pi} \frac{c^2}{v_A^2} |\mathbf{e}|^2. \quad (2.5.12)$$

Из (2.5.11) и (2.5.12) следует, что увеличение амплитуды колебаний и диссипация их энергии в области альфвеновского резонанса дают одинаковый вклад в энергетический баланс рассматриваемого волнового процесса. Представляя компоненты магнитного поля колебаний через смещение  $\xi$  (см. Приложение Б), получаем

$$|b|^2 = B_0^2 \left( k_z^2 |\xi|^2 + \frac{k_y^2 k_z^2 v_A^4}{|\Omega_f|^4} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\Omega}{\Omega_f} \right|^4 \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 \right).$$

В пределе  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$  в области альфвеновского резонанса (где  $\Omega = 0$ ) основной вклад в этом выражении дает второе слагаемое, имеющее особенность вида  $x^{-2}$ . Поэтому имеем

$$W \approx \frac{\bar{\gamma}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |b|^2 dx \approx \frac{\bar{\gamma}}{8\pi} k_y^2 k_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_0^2 v_A^4}{|\Omega_f|^4} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 dx. \quad (2.5.13)$$

Определим эту величину в двух предельных случаях  $k_y \Delta_A \gg 1$  и  $k_y \Delta_A \ll 1$ . В первом предельном случае, когда для расчета волнового поля между точкой поворота  $x_f$  и точкой альфвеновского резонанса  $x_A$  применимо ВКБ-приближение, для смещения  $\xi$  в области альфвеновского резонанса можно использовать выражение (2.3.6). В этом случае имеем

$$W = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega}{a_A} \frac{(C_A k_z B_0)^2}{k_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_A dx}{(x - x_A)^2 + \varepsilon_A^2}, \quad (2.5.14)$$

где  $\varepsilon_A = 2a_A \gamma_A / \omega$ . Здесь учтено, что  $\Omega_f^2 \approx -k_y^2 v_A^2$  в окрестности точки альфвеновского резонанса  $x = x_A$ .

Учитывая, что в пределе  $\gamma_A \rightarrow 0$

$$\lim_{\gamma_A \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_A}{(x - x_A)^2 + \varepsilon_A^2} = \pi \delta(x - x_A), \quad (2.5.15)$$

получаем

$$W = \frac{\omega}{16a_A} \frac{(C_A k_z B_0)^2}{k_y^2}. \quad (2.5.16)$$

Отметим замечательную особенность этого выражения — оно не зависит от величины инкремента  $\gamma_A$ , если он достаточно мал. Это можно объяснить следующим образом. При уменьшении  $\gamma_A$  увеличивается амплитуда резонансных колебаний в точке альфвеновского резонанса, и одновременно уменьшается размер области их локализации так, что полная энергия колебаний в области альфвеновского резонанса

остается неизменной. Подставляя (2.5.16) и (2.5.10) в уравнение энергетического баланса (2.5.7), получаем

$$|C_i|^2 - |C_r|^2 = \frac{1}{4a_A} \frac{(k_z B_0)^2}{k_y^2} C_A^2.$$

Из сшивок решений, полученных в разд. 2.3, имеем  $C_A = -C_i(2k_y\sqrt{2a_A}/k_z B_0) \exp(-\Gamma + i\pi/4)$ . Отсюда получаем выражения для коэффициента отражения:

$$R = \frac{|C_r|^2}{|C_i|^2} = 1 - 2 \exp(-2\Gamma), \quad (2.5.17)$$

и коэффициента поглощения:

$$D = 1 - R = 2 \exp(-2\Gamma). \quad (2.5.18)$$

Во втором предельном случае  $k_y \Delta_A \ll 1$  решение (2.2.2) будем искать методом теории возмущений. В главном порядке будем полагать  $k_y = 0$ . При этом уравнение (2.2.2) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_0 v_A^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho_0 \Omega^2 \xi = 0. \quad (2.5.19)$$

Отметим, что в этом случае альфвеновский резонанс отсутствует, а точка  $x_A$  совпадает с точкой поворота БМЗ-волны  $x = x_f$ . В асимптотически далекой области справа от точки поворота  $x_f$  ВКБ-решение (2.5.19) имеет вид

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 v_A \Omega}} \left[ C_i \exp\left(-i \int_{x_f}^x \frac{\Omega}{v_A} dx'\right) + C_r \exp\left(i \int_{x_f}^x \frac{\Omega}{v_A} dx'\right) \right]. \quad (2.5.20)$$

Вблизи точки поворота, где применимо линейное разложение функции  $\Omega^2 = \omega^2 - k_z^2 v_A^2 \approx k_z^2 \bar{v}_A^2 (x - x_f)/a_A$  (здесь  $\bar{v}_A = v_A(x_f)$ ,  $a_A = -(\nabla_x \ln v_A^2)_{x_f}^{-1} > 0$ ), решение (2.5.19), удовлетворяющее граничным условиям, можно представить в виде

$$\xi = C_f A_i[-(x - x_f)/a_f], \quad (2.5.21)$$

где в данном случае  $a_f = (a_A/k_z^2)^{1/3}$ , а  $A_i(z)$  — функция Эйри. Сшивка решений (2.5.20) и (2.5.21) в области их перекрытия дает связь коэффициентов  $C_f = -C_i 4\pi \sqrt{a_f} e^{i\pi/4}/B_0$ . В случае  $k_y \Delta_A \ll 1$  для решения (2.2.2) в области альфвеновского резонанса используем выражение (2.5.21), полученное в нулевом порядке теории возмущений. Однако в этом случае в выражении (2.5.13) при  $\gamma_A \rightarrow 0$  функция  $|\Omega_f|^4 \approx |\Omega|^4 \approx k_z^4 \bar{v}_A^4 [(x - x_f)^2 + \varepsilon_A^2]/a_A^2$  имеет особенность вида  $x^{-2}$ . Подставляя (2.5.21) в (2.5.13), получаем

$$W = |C_f|^2 \frac{B_0^2}{16\pi} \frac{k_y^2 a_A \bar{v}_A}{k_z} |Ai'(0)|^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_A dx}{(x - x_f)^2 + \varepsilon_A^2} = |C_f|^2 \frac{B_0^2}{16} \frac{k_y^2 a_A \bar{v}_A}{k_z} |Ai'(0)|^2,$$

где  $\varepsilon_A = 2\gamma_A a_A / k_z \bar{v}_A$ . Подставляя это выражение и (2.5.10) в уравнение энергетического баланса (2.5.7) и используя связь констант  $C_f$  и  $C_i$ , получаем следующее выражение для коэффициента поглощения:

$$D = \lambda k_y^2 \Delta_A^2, \quad (2.5.22)$$

где

$$\lambda = [2\pi A i'(0)]^2 \approx 2,6.$$

Эти два предельных случая позволяют составить качественное представление о функции  $D(k_y \Delta_A)$  в целом. Очевидно, что она имеет максимум при  $k_y \Delta_A \sim 1$ , высота которого также порядка единицы. В общем случае для произвольного профиля переходного слоя поведение  $D(k_y \Delta_A)$  можно найти только численно.

## **2.6. Отражение быстрого магнитного звука от переходного слоя в «теплой» плазме. Альфвеновский и магнитозвуковой резонансы**

В разд. 2.3 мы рассмотрели процесс резонансной раскачки альфвеновских колебаний БМЗ-волной, распространяющейся в неоднородной «холодной» плазме — альфвеновский резонанс. Рассмотрим теперь аналогичную задачу в «теплой» плазме, когда в переходном слое присутствуют резонансные поверхности как для альфвеновских, так и для ММЗ-волн.

В работе [51] рассмотрена задача о падении магнитозвуковых волн на линейный плазменный переходный слой, соединяющий два однородных полупространства. В ней было показано, что присутствие в плазменной конфигурации резонансной поверхности для ММЗ-волны существенно увеличивает коэффициент поглощения падающих на переходный слой быстрых магнитозвуковых волн по сравнению с конфигурацией, в которой имеется только одна резонансная поверхность — для альфвеновских волн. Однако, использованная в этой работе модель линейного переходного слоя не позволяет получить некоторые важные с принципиальной точки зрения результаты.

В работах [53, 59] аналогичная задача решена для модели с плавным переходным слоем вида (2.2.1). Там дано качественное объяснение результатам, полученным в [51] и, кроме того, рассмотрена модель среды с сильно неизоэнтальной плазмой, в которой температуры ионов и электронов могут сильно различаться. В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о падении монохроматической быстрой магнитозвуковой волны на переходный слой и отражении от него. Часть энергии падающей волны поглощается в окрестностях резонансных оболочек, приводя к нагреву плазмы. Как мы увидим, возможны случаи полного поглощения падающей магнитозвуковой волны в окрестности резонансной оболочки для ММЗ-волн.

Будем считать фоновую плазму покоящейся ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ). В нулевом приближении  $x$ -компонента уравнения (1.0.1) дает в стационарном состоянии ( $\partial/\partial t = 0$ ) условие равновесия плазменной конфигурации:

$$P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (2.6.1)$$

Основное уравнение для поля МГД-колебаний имеет вид (2.2.2), где теперь  $\Omega^2 = \omega^2 - k_z^2 v_A^2$ ,

$$k_x^2 = -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^4}{\omega^2(v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2}. \quad (2.6.2)$$

Распределение функции  $k_x^2(x)$  важно для правильной постановки задачи. Наша задача состоит в изучении процесса падения и отражения БМЗ-волны от плавного переходного слоя, внутри которого присутствуют две резонансные поверхности — для альфвеновской и ММЗ-волн, а распределение альфвеновской скорости  $v_A(x)$  задается уравнением (2.2.1). При этом распределение скорости звука  $v_s(x)$  (и соответственно скорости ММЗ-волн  $c_s(x)$ , представленной на рис. 2.6), определяется условием равновесия (2.6.1).

Поставленная задача должна быть решением уравнения (2.2.2), представляющим собой сумму падающей и отраженной волн при  $x \rightarrow \infty$  и ограниченным при  $x \rightarrow -\infty$ . Выбор значения  $v_A^+ \equiv v_A(\infty)$  должен быть таким, что  $k_x^2(\infty) > 0$  при выбранном значении частоты  $\omega$ . В этом случае для быстрых магнитозвуковых волн асимптотика  $x \rightarrow \infty$  является областью прозрачности. Возможны два варианта распределения функции  $k_x^2(x)$ , показанные на рис. 2.6 кривыми 1 и 2.

Анализ выражения (2.6.2) показывает, что при изменении координаты  $x$  от  $+\infty$  до  $-\infty$  при монотонном возрастании  $v_A(x)$  функция  $k_x^2(x)$  может дважды проходить через нуль в точках, которые мы обозначим как  $x_{01}$  и  $x_{02}$ , между которыми расположена область непрозрачности (где  $k_x^2(x) < 0$ ). Такое поведение  $k_x^2(x)$  представлено кривой 1 на рис. 2.6 и соответствует случаю падающей на переходный слой БМЗ-волны.

Также в уравнении (2.2.2) имеются две особые точки, в которых коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Одна из них — точка альфвеновского резонанса  $x_A$ , определяемая равенством  $\Omega^2(x_A) = 0$  — расположена в области непрозрачности в интервале  $(x_{01}, x_{02})$ . Вторая — точка магнитозвукового резонанса  $x_s$  — определяется обращением в нуль знаменателя в выражении (2.6.2), что дает локальное дисперсионное уравнение для ММЗ-волн при  $|k_x^2| \rightarrow \infty$ :  $\omega^2 = k_z^2 c_s^2(x_s)$ , где  $c_s^2 = v_A^2 v_s^2 / (v_A^2 + v_s^2)$ . Точка  $x_s$  расположена левее точки поворота  $x_{01}$ , а между ними расположена область прозрачности для ММЗ-волн. Слева от  $x_s$  расположена область непрозрачности, простирающаяся по  $x$  до  $-\infty$ .

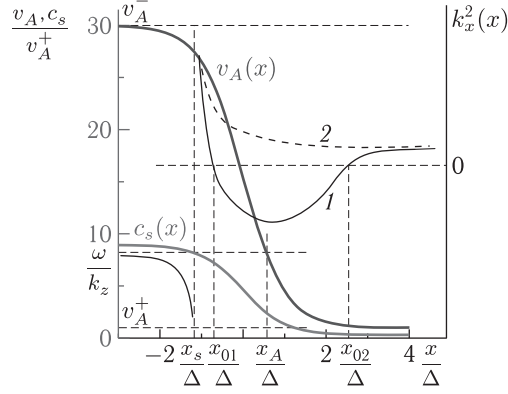


Рис. 2.6. Распределение альфвеновской скорости  $v_A(x)$ , скорости ММЗ-волн  $c_s(x)$  (серые линии, левая координатная ось) и квадрата ВКБ-компоненты волнового вектора  $k_x^2(x)$  поперек переходного слоя в двух предельных случаях: (1) — при наличии области непрозрачности для БМЗ-волн ( $x_{01}, x_{02}$ ) — сплошная черная линия, (2) — область прозрачности ММЗ-волны распространяется от резонансной поверхности для ММЗ-волн  $x = x_s$  до бесконечности (черная штриховая линия, правая координатная ось).  $\omega/k_z$  — фазовая скорость БМЗ-волны, падающей на переходной слой

Значение  $v_A^- \equiv v_A(-\infty)$  должно быть таким, чтобы существовала точка магнитозвукового резонанса  $x_s$ . Часть энергии падающей волны поглощается в окрестности двух резонансных поверхностей  $x = x_A$  и  $x = x_s$ , в результате чего отраженная от переходного слоя БМЗ-волна имеет амплитуду меньшую, чем падающая. Разность энергии падающей и отраженной волн расходуется на нагрев плазмы и рост амплитуды колебаний в окрестностях резонансных поверхностей. Коэффициент поглощения, определяемый как отношение этой разности к энергии падающей волны, будет зависеть от параметров плазмы на резонансных поверхностях. Далее мы исследуем структуру поля рассматриваемых МГД-колебаний и зависимость коэффициента поглощения БМЗ-волн от значений компонент волнового вектора  $k_y, k_z$ , отношения температур электронов и ионов плазмы  $T_e/T_i$  и параметра  $\beta^* = (v_s/v_A)^2$ , который отличается от введенного ранее параметра  $\beta = 8\pi P_0/B_0^2$  только множителем, близким к единице.

Кривая 2 на рис. 2.6 соответствует случаю, при котором область прозрачности для ММЗ-волн распространяется до  $\infty$ , а резонансная поверхность для альфвеновской волны отсутствует. Анализируя выражение (2.6.2), можно определить два диапазона параметров волнового поля и плазмы на асимптотике  $x \rightarrow \infty$ , соответствующих кривым 1 и 2 на рис. 2.6, при которых  $k_x^2(\infty) > 0$ :

$$\frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^{+2}} > \omega_{A1}^2$$

и

$$\frac{\beta^*}{1 + \beta^*} < \frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} < \omega_{A2}^2,$$

где  $\omega_{A1}^2, \omega_{A2}^2$  — два корня биквадратного уравнения

$$\omega_A^4 - (1 + k_y^2/k_z^2)[\omega_A^2(1 + \beta^*) - \beta^*] = 0,$$

которые соответствуют знакам плюс и минус перед радикалом в решении этого уравнения. Здесь  $\omega_A^2 = \omega^2/k_z^2 v_A^2$ ,  $\beta^*$  определяется на асимптотике  $x \rightarrow \infty$ , а само уравнение является дисперсионным уравнением для магнитозвуковых волн. Первый из этих диапазонов соответствует падающей на переходной слой БМЗ-волне, а второй — падающей на него ММЗ-волне. Отметим, что второй диапазон достаточно узок. При  $\beta^* \rightarrow 0$ , или при  $k_y^2/k_z^2 \rightarrow \infty$ , имеем  $\omega_{A2}^2 \approx [\beta^*/(1 + \beta^*) + k_z \beta^{*2}/(1 + \beta^*)^3 \sqrt{k_y^2 + k_z^2}]$ . При  $k_y^2/k_z^2 \rightarrow 0$  получаем  $\omega_{A2}^2 \approx \beta^*$ .

Имеется еще одно условие существования решения с падающей на переходной слой ММЗ-волной, которое определяется формой кривой 2 на рис. 2.6. Для этой кривой в области  $x > x_s$  выполняется условие  $\nabla_x(k_x^2) < 0$ , что дает:

$$\frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} < \frac{2\beta^*}{1 + \beta^*}.$$

Конечно, возможен и такой вариант распределения  $k_x^2(x)$ , когда при наличии резонансной поверхности для альфвеновской волны отсутствует резонансная поверхность для ММЗ-волн.

Рассмотрим общий случай, когда в переходном слое присутствуют обе резонансные поверхности, которому соответствует распределение  $k_x^2(x)$ , описываемое кривой 1 на рис. 2.6. Как и в разд. 2.3, рассмотрим задачу в ВКБ-приближении. В области непрозрачности слева от  $x_s$  ВКБ-решение (2.2.2), удовлетворяющее граничным условиям при  $x \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$\xi = C_{s1} \sqrt{\frac{|k_x|}{\rho_0 \Omega^2}} \exp\left(\int_{x_s}^x |k_x| dx'\right), \quad (2.6.3)$$

где  $C_{s1}$  — произвольная константа.

В окрестности резонансной поверхности для ММЗ-волн  $x = x_s$  линеаризуем коэффициент при старшей производной в (2.2.2), представляя  $k_x^{-2} \approx a_s(x - x_s)$ , где  $a_s = (\partial k_x^{-2}/\partial x)_{x=x_s}$  — характерный масштаб изменения  $k_x^{-2}$  вблизи  $x = x_s$ . Тогда уравнение (2.2.2) вблизи  $x = x_s$  можно представить в виде

$$a_s \frac{\partial}{\partial x}(x - x_s) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi = 0. \quad (2.6.4)$$



Его решение, сшивающееся с ВКБ-решением (2.6.3):

$$\xi = C_s K_0 \left( 2\sqrt{-(x - x_s)/a_s} \right), \quad (2.6.5)$$

где  $K_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя. Используя ее асимптотическое представление при  $(x - x_s) \rightarrow -\infty$  и сшивая с (2.6.3), находим связь между константами:  $C_s = 2C_{s1}/(\Omega_s \sqrt{\pi \rho_{0s} a_s})$ , где нижний индекс  $s$  указывает на то, что значения параметров взяты в точке  $x = x_s$ . Для перехода к области  $x > x_s$  требуется регуляризовать особенность решения (2.6.4). С этой целью мы формально введем вблизи резонансной поверхности  $x = x_s$  инкремент  $\gamma_s$ , произведя в знаменателе (2.6.2) замену:  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma_s$ . Можно рассматривать  $\gamma_s$  и как декремент затухания магнитозвуковых волн, падающих на переходной слой. Конкретное значение для  $\gamma_s$  можно получить из решения дисперсионного уравнения (1.0.15) для ММЗ-волн в неизотермической однородной плазме. Тогда в решении (2.6.4) можно произвести формальную замену  $x - x_s \rightarrow x - x_s + i\varepsilon_s$ , где  $\varepsilon_s = a_s \gamma_s / \omega$ , и при  $x > x_s$  решение (2.6.5) имеет вид

$$\xi = -i \frac{C_s \pi}{2} H_0^{(2)} \left( 2\sqrt{(x - x_s + i\varepsilon_s)/a_s} \right), \quad (2.6.6)$$

где  $H_0^{(2)}(z)$  — функция Ханкеля второго рода, которая при  $x - x_s \rightarrow \infty$  имеет асимптотическое представление  $H_0^{(2)}(2\sqrt{x - x_s}) \approx \pi^{-1/2} (x - x_s)^{-1/4} \exp(-i2\sqrt{x - x_s} + i\pi/4)$ . При  $x \rightarrow x_s$  решение (2.6.5)–(2.6.6) имеет вид

$$\xi \approx -C_s \left( \frac{1}{2} \ln(x - x_s + i\varepsilon_s) + \ln 2 \right).$$

При  $\gamma_s \rightarrow 0$  это решение имеет такую же логарифмическую особенность, как и на резонансной поверхности для альфвеновских волн. Решение (2.6.6) описывает ММЗ-волну, прибегающую к резонансной поверхности  $x = x_s$ . При этом отсутствует отраженная волна. Это означает, что волна полностью поглощается в окрестности резонансной поверхности. Отметим, что, как и в случае с альфвеновским резонансом, конкретный механизм поглощения ММЗ-волн в данном случае неважен.

В области прозрачности  $x_s < x < x_{01}$  ВКБ-решение, сшивающееся с (2.6.6), можно представить в виде

$$\xi = C_{s2} \sqrt{\frac{k_x}{\rho_0 \Omega^2}} \exp \left( -i \int_{x_{01}}^x k_x dx' \right), \quad (2.6.7)$$

где константа  $C_{s2} = C_s \Omega_s \sqrt{\pi \rho_{0s} a_s} \exp(-i \int_{x_{01}}^{x_s} k_x dx - i\pi/4)$  определяется при сшивке с решением (2.6.6).

Интересно отметить, что если область прозрачности для ММЗ-волн распространяется до  $\infty$  (что соответствует кривой 2 для  $k_x^2(x)$  на рис. 2.6), то падающая на переходной слой ММЗ-волна полностью

поглощается в окрестности резонансной оболочки. В работе [51] с помощью численного решения уравнений, описывающих этот процесс в плазме с линейным переходным слоем, было показано, что в этом случае коэффициент поглощения падающих на переходной слой волн максимален ( $\sim 90\%$ ). Однако, в использованной в этой работе модели среды, состоящей из трех областей с разными распределениями параметров плазмы по координате  $x$ , невозможно достичь 100% поглощения энергии падающей на переходной слой волны. В такой модели при сшивке решений, полученных в разных областях, неизбежно появляется отраженная волна.

Для получения решения в окрестности точки поворота  $x = x_{01}$ , как и в разд. 2.3, используем уравнение (2.3.1) для функции  $\eta$ . Линеаризуя вблизи  $x = x_{01}$  коэффициент  $k_x^2 \approx -(x - x_{01})/a_1^3$ , где  $a_1^{-3} = -(\partial k_x^2 / \partial x)_{x=x_{01}}$ , получим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a_1^{-3}(x - x_{01})\eta = 0. \quad (2.6.8)$$

Его решение, сшивающееся с (2.6.7), имеет вид

$$\eta = C_{s3} \left( Ai\left(\frac{x - x_{01}}{a_1}\right) + iBi\left(\frac{x - x_{01}}{a_1}\right) \right), \quad (2.6.9)$$

где  $Ai(z)$ ,  $Bi(z)$  — функции Эйри. Сшивка этого решения с (2.6.7) дает связь констант  $C_{s3} = C_{s2} \sqrt{\pi a_1 / \rho_{01} \Omega_1^2}$ .

ВКБ-решение в области непрозрачности  $x_{01} < x < x_A$  имеет точно такой же вид (2.3.2), как и в разд. 2.3. Его сшивка с решением (2.6.9) связывает константы  $C = iC_{s2}$  в ВКБ-решениях слева и справа от точки магнитозвукового резонанса  $x_s$ . Здесь также пренебрегается экспоненциально затухающим решением на фоне экспоненциально растущего. Вся дальнейшая структура решения полностью повторяет решение предыдущего раздела, когда в переходном слое имелась только одна резонансная поверхность для альфвеновских волн  $x = x_A$ .

Для того, чтобы получить наглядное представление о полной структуре волнового поля, решим поставленную выше задачу численно. На рис. 2.7 представлена структура производной  $\partial \xi / \partial x$  волнового поля в плазме с асимптотическим значением  $\beta^* = 0,5$  для малых декрементов  $\gamma_A / \omega = 0,01$  и  $\gamma_s / \omega = 0,01$  на резонансных поверхностях. Достаточно хорошо видна резонансная структура колебаний вблизи резонансных поверхностей  $x = x_A$  и  $x = x_s$ . В области  $x > x_{02}$  представлено также разложение поля колебаний на падающую и отраженную волны в соответствии с решением (2.3.12), полученным в ВКБ-приближении. Отметим, что в данном расчете амплитуды падающей и отраженной волн заметно отличаются, что обусловлено поглощением энергии колебаний вблизи двух резонансных поверхностей. Поле колебаний нормировано на амплитуду падающей волны при  $x \rightarrow \infty$ .

На рис. 2.8 приведены распределения компонент магнитного поля колебаний, имеющего единичную амплитуду при  $x \rightarrow \infty$ . Здесь использованы те же значения расчетных параметров, что и на рис. 2.7. Доминирующей компонентой поля на резонансной поверхности для альфвеновских волн  $x = x_A$  является  $B_y$ , а на резонансной поверхности для ММЗ-волн  $x = x_s$  — компонента  $B_z$ . Аналогичные соотношения имеют место и для компонент поля скоростей. Поэтому часто резонансные ММЗ-колебания называют продольными (по отношению к направлению магнитного поля  $\mathbf{V}_0$ ), а резонансные альфвеновские колебания — азимутальными (или тороидальными). Такая терминология принята при исследованиях колебаний в аксиально-симметричных моделях среды, где координате  $y$  соответствует азимутальная координата (например азимутальный угол).

Как мы видели в разд. 2.3, одной из отличительных особенностей резонансных альфвеновских колебаний является смена направления вращения годографа поперечного волнового вектора  $\mathbf{V}_\perp = (B_x, B_y)$  при переходе через резонансную поверхность. Это следует из смены знака производной  $\partial\xi/\partial x$  по разные стороны от резонансной поверхности. В задаче с двумя резонансными поверхностями это правило

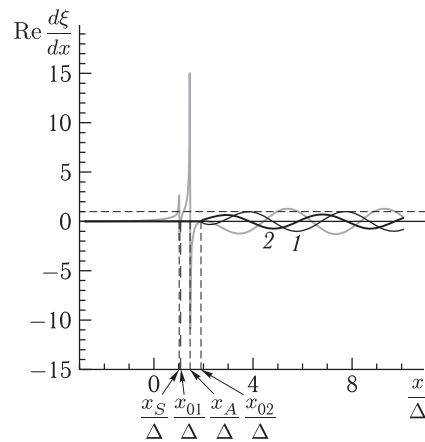


Рис. 2.7. Распределение производной  $\partial\xi/\partial x$  в задаче о падении-отражении БМЗ-волны от переходного слоя с резонансными поверхностями для альфвеновских ( $x = x_A$ ) и ММЗ-волн ( $x = x_s$ ). Серая линия — полное поле колебаний (численный расчет), 1 — падающая на переходной слой БМЗ-волна, 2 — отраженная от переходного слоя БМЗ-волна (ВКБ-приближение)

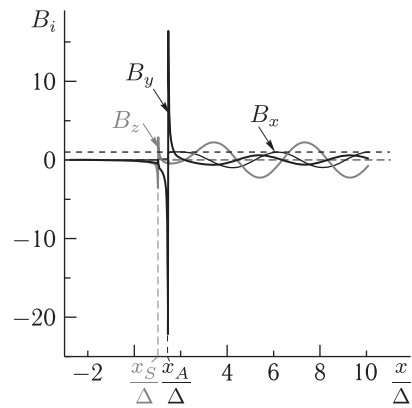


Рис. 2.8. Распределение компонент магнитного поля МГД-колебаний ( $\text{Re}(B_x, B_y, B_z)$ ) в задаче о падении-отражении БМЗ-волны от переходного слоя с резонансными поверхностями для альфвеновских ( $x = x_A$ ) и ММЗ-волн ( $x = x_s$ )

при  $\gamma_A, \gamma_s \ll \omega$  выполняется при переходе через каждую резонансную поверхность  $x = x_A$  и  $x = x_s$ .

Посмотрим, однако, что происходит, когда декременты  $\gamma_A$  и  $\gamma_s$  не слишком малы. На рис. 2.9 приведено распределение производной  $\partial\xi/\partial x$ , рассчитанное при  $\gamma_A/\omega = 0,1$  и трех значениях  $\gamma_s/\omega = 0,01; 0,1; 1$ . Здесь же окружностями со стрелками, указывающими направление вращения, показано условное поведение годографа в плоскости  $(B_x, B_y)$ . При малом значении  $\gamma_s/\omega = 0,01$  ( $T_e/T_i \gg 1$ ), поведение годографа соответствует ожидаемому (кривая 1). При увеличении  $\gamma_s/\omega$  до 0,1 ( $T_e \sim T_i$ ) точки смены направления вращения годографа смещаются в сторону от резонансных поверхностей на величину, порядка расстояния между ними (кривая 2). При дальнейшем увеличении  $\gamma_s/\omega$  до 1 ( $T_e/T_i \approx 0,1$ ) смены направления вращения годографа вообще не происходит (кривая 3). Этот пример показывает, что присутствие в системе сильно затухающих резонансных ММЗ-колебаний может существенно изменить поведение компонент поля даже в окрестности резонансной поверхности для альфвеновских волн.

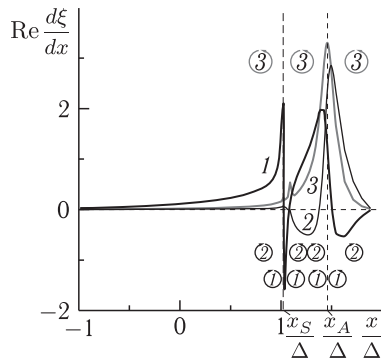


Рис. 2.9. Поведение годографов резонансных МГД-колебаний в окрестности резонансных поверхностей  $x_A$  и  $x_s$  при различных декрементах альфвеновских ( $\gamma_A/\omega = 0,1$ ) и ММЗ-колебаний. Кривые и окружности с направлениями вращения годографов, обозначенные цифрами 1, 2 и 3, соответствуют трем величинам декремента ММЗ-колебаний:  $\gamma_s/\omega = 0,01$ ,  $\gamma_s/\omega = 0,1$  и  $\gamma_s/\omega = 1$

Теперь рассмотрим поведение коэффициента поглощения падающих на переходный слой БМЗ-волн, определяемого формулой (2.3.15). Рассмотрим его зависимость от характерных значений компонент волнового вектора  $k_y, k_z$ , а также от параметра  $\beta^*$  и декремента  $\gamma_s$ , связанного с диссипацией ММЗ-волн вблизи резонансной поверхности. При этом декремент, связанный с диссипацией альфвеновских волн, выберем предельно малым,  $\gamma_s = 10^{-6}\omega$ , так чтобы коэффициент поглощения  $D$  не зависел от его величины.

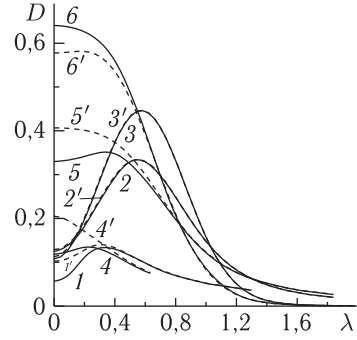
Следует отметить, что поскольку при  $T_e/T_i \gtrsim 1$  декремент ( $\gamma_s \sim \omega$ ) достаточно большой, его необходимо локализовать вблизи  $x = x_s$  на таком масштабе, который позволяет рассматривать МГД-колебания здесь как ММЗ-волну. Очевидно, что этот масштаб задается размером области прозрачности для ММЗ-волн  $\Delta_s = x_s - x_{01}$ . Если вблизи точек  $x_s, x_{01}$  применимо линейное разложение для альфвеновской скорости вида  $v_A^2(x) \approx v_{As}^2[1 - (x - x_s)/a_s]$ , то имеем

$\Delta_s \approx k_z^2 a_s \beta^* / [(k_z^2 + k_y^2)(1 + \beta^*)^2 - 2k_z^2 \beta^*]$ . При малых значениях  $\beta^* \ll 1$  этот масштаб  $\Delta_s \approx a_s \beta^* k_z^2 / (k_z^2 + k_y^2)$  много меньше масштаба  $a_s = (\partial \ln(v_A^2(x)) / \partial x)_{x=x_s}^{-1}$ , а при  $\beta^* \sim 1$  они сравнимы. Для того, чтобы локализовать декремент  $\gamma_s$  вблизи  $x = x_s$ , используем для него модельное выражение

$$\gamma_s = -\bar{\gamma}_s \exp(-(x - x_s)^2 / \Delta_s^2), \quad (2.6.10)$$

где  $\bar{\gamma}_s$  — значение декремента, соответствующего параметрам плазмы в точке магнитозвукового резонанса (см. рис. 1.2). Очевидно, что такой подход нельзя использовать для случая падающих на переходной слой ММЗ-волн. Эти волны будут сильно затухающими во всей области их существования. Решение такой задачи требует специальной постановки, в которой источник ММЗ-волн должен располагаться на конечном расстоянии от переходного слоя.

Рис. 2.10. Зависимость коэффициента поглощения БМЗ-волн, падающих на переходной слой с двумя резонансными поверхностями для альфвеновских и ММЗ-волн. Представлены распределения  $D(k_y \tilde{\Delta})$  для плазменного слоя с  $\beta^* = 0,3$  (для волн с  $k_z \Delta = 0,1; 1; 3,5$  — кривые 1, 2, 3 при  $\bar{\gamma}_s = 0,01\omega$  и кривые 1', 2', 3' при  $\bar{\gamma}_s = \omega$ ) и плазменного слоя с  $\beta^* = 1$  (для  $k_z \Delta = 0,1; 1; 3,5$  — кривые 4, 5, 6 при  $\bar{\gamma}_s = 0,01\omega$  и кривые 4', 5', 6' при  $\bar{\gamma}_s = \omega$ )



На рис. 2.10 представлено распределение  $D(k_y \tilde{\Delta})$ , где  $\tilde{\Delta} = [\Delta_2 / (k_z^2 + k_y^2)]^{1/3}$ ,  $\Delta_2 = |\partial \ln(v_A^2) / \partial x|_{x=x_{02}}$  — характерный масштаб изменения  $v_A^2(x)$  в точке поворота  $x_{02}$ . Рассмотрены модели переходного слоя плазмы с  $\beta^* = 0,3; 1$  и колебания с различными значениями декремента  $\bar{\gamma}_s = 0,01\omega; \omega$  и параметра  $k_z \Delta = 0,1; 1; 3,5$ . Верхнее и нижнее значения последнего параметра близки к предельным, при которых в рассматриваемой системе присутствуют обе резонансные поверхности  $x_A$  и  $x_s$ . Видно, что при увеличении  $k_z \Delta$  существенно возрастает величина  $D(0)$ , а максимум  $D(k_y \tilde{\Delta})$  смещается к  $k_y \tilde{\Delta} = 0$ . При этом максимальное значение  $D$  может существенно превысить то, которое было предельным в холодной плазме (см. рис. 2.4). Этот вывод может быть существенным для задач, связанных с проблемами нагрева плазмы в солнечной короне и в установках УТР.

Присутствие резонансной поверхности для ММЗ-волн приводит к полному поглощению энергии дошедших до нее колебаний, а максимум поглощения смещается в сторону малых значений азимутальной компоненты волнового вектора  $k_y$  и, наоборот, больших значений продольной компоненты  $k_z$ . Интересно отметить, что при  $\beta^* = 1$

и  $k_z \Delta = 3,5$ , в отличие от других рассмотренных случаев, величина  $D$  оказывается больше при меньшем значении декремента (при  $\bar{\gamma}_s = 0,01\omega$ , а не при  $\bar{\gamma}_s = \omega$ ). Это можно объяснить введенной нами локализацией декремента  $\gamma_s$  (см. (2.6.10)), которая ограничивает интегральный рост поглощаемой энергии, получаемый за счет уширения резонансной области.

Основным отличием поглощения энергии колебаний в плазме с конечным  $\beta^*$  от случая холодной плазмы является отличное от нуля значение  $D(0)$ . Это объясняется включением механизма диссипации резонансных ММЗ-колебаний, которые, в отличие от резонансных альфвеновских волн, не исчезают при  $k_y = 0$ . Эффективность этой диссипации растет при увеличении  $\beta^*$ , что можно объяснить следующим образом. Чем больше значение  $\beta^*$ , тем дальше расположена точка поворота  $x_{01}$  от резонансной поверхности  $x_s$ , и ближе к альфвеновской резонансной поверхности  $x_A$ . В результате амплитуда и, соответственно, энергия колебаний, прошедших через область непрозрачности  $x_{01} < x < x_A$ , увеличивается. Вся эта энергия поглощается в окрестности резонансной поверхности  $x_s$ , что приводит к увеличению коэффициента поглощения  $D$ .

## 2.7. Альфвеновский резонанс в неидеальной плазме. Кинетические альфвеновские волны

В предыдущих разделах мы рассмотрели резонанс альфвеновских и ММЗ-волн с монохроматической БМЗ-волной в одномерно-неоднородной плазме в приближении идеальной МГД. Рассмотрим теперь эффекты, возникающие при резонансном взаимодействии альфвеновских и БМЗ-волн, выходящие за рамки идеальной МГД. Наиболее важны эти эффекты именно для альфвеновских волн, поскольку приводят к их поперечной дисперсии. В результате у альфвеновских волн появляется поперечная составляющая групповой скорости и, соответственно, возможность их распространения поперек магнитных оболочек. Магнитозвуковые волны, в отличие от альфвеновских, обладают поперечной дисперсией даже в приближении идеальной МГД. Поэтому рассматриваемые ниже эффекты дают только малый вклад в их структуру и динамику.

Наиболее простой способ исследовать эффекты, приводящие к малой поперечной дисперсии альфвеновских волн, является использование приближения двухжидкостной МГД. В этом приближении плазма рассматривается как среда, состоящая из двух жидкостей — электронной и ионной. Для описания поля МГД-колебаний используем систему уравнений (1.0.16), которую можно свести к векторному уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (2.7.1)$$

Тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}$  для МГД-волн в системе координат  $(x, y, z)$ , использованной в предыдущих разделах, имеет вид (см. [23] и выражение (1.0.17) в гл. 1):

$$\hat{\varepsilon} = \frac{c^2}{v_A^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4}k_x^2\rho_i^2 & -\frac{3}{4}k_xk_y\rho_i^2 + iu & 0 \\ -\frac{3}{4}k_xk_y\rho_i^2 - iu & 1 - \frac{3}{4}k_y^2\rho_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{G}(s_e/\rho_s)}{k_z^2\rho_s^2} \end{pmatrix}, \quad (2.7.2)$$

где обозначено  $u = \omega/\omega_i$ ,  $\rho_i = v_i/\omega_i$  — ларморовский радиус ионов,  $\rho_s = v_{es}/\omega_i$  (где  $v_s = v_i\sqrt{T_e/T_i}$ ),  $s_e = c/\omega_{pe}$  — характерная скин-овая длина электронов в плазме, а свойства функции  $\tilde{G}(z)$  описаны в гл. 1. Отметим, что в выражении (2.7.2) учтены только малые параметры, приводящие к поперечной дисперсии альфвеновских волн ( $u, k_\perp^2\rho_i^2, k_\perp^2\rho_s^2, k_\perp^2s_e^2 \ll 1$ ). В нем также отсутствуют слагаемые, связанные с медленными магнитозвуковыми волнами.

Рассмотрим задачу об альфвеновском резонансе в модели среды в виде переходного слоя, описанной в разд. 2.2 и 2.5. Будем считать силовые линии магнитного поля прямыми, направленными по оси  $z$ , а плотность плазмы неоднородной по координате  $x$ . В такой модели при подстановке тензора (2.7.2) в (2.7.1) компоненту волнового вектора  $k_x$  следует рассматривать как производную  $k_x = -i\nabla_x$ , действующую на компоненты поля колебаний  $\mathbf{E}$ . При этом мы ограничимся исследованием структуры волнового поля в области альфвеновского резонанса, где характерный масштаб колебаний по координате  $x$  много меньше масштаба неоднородности фоновой плазмы.

Из  $z$ -компоненты уравнения (2.7.1) в главном порядке теории возмущений получим следующее выражение для продольной компоненты электрического поля колебаний:

$$E_z \approx ik_z \frac{\rho_s^2}{\tilde{G}(s_e/\rho_s)} (\nabla_x E_x + ik_y E_y). \quad (2.7.3)$$

Напомним, что в выражении (2.7.3) учтена поперечная дисперсия альфвеновских волн, где

$$\frac{\rho_s^2}{\tilde{G}(s_e/\rho_s)} \approx \begin{cases} \rho_s^2, & s_e \ll \rho_s \ (\beta \gg m_e/m_i), \\ -s_e^2, & s_e \gg \rho_s \ (\beta \ll m_e/m_i), \end{cases}$$

и  $|(k_\perp\rho_s)^2/\tilde{G}(s_e/\rho_s)| \ll 1$ . Для магнитозвуковых волн  $E_z = 0$ . Подставляя (2.7.3) в два других уравнения (2.7.1), получим для поперечных компонент электрического поля колебаний  $\mathbf{E}_\perp = (E_x, E_y)$  следующую

систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \nabla_x^2 E_x + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) E_x &= ik_y \left( 1 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \right) \nabla_x E_y - iu \frac{\omega^2}{v_A^2} E_y, \\ \nabla_x^2 E_y + \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} (1 - k_y^2 \Lambda^2) - k_z^2 \right] E_y &= ik_y \left( 1 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \right) \nabla_x E_x + iu \frac{\omega^2}{v_A^2} E_x, \end{aligned}$$

где  $\Lambda^2 = (3/4)\rho_i^2 + \rho_s^2/\tilde{G}(s_e/\rho_s)$ .

Для дальнейших расчетов удобнее перейти к другим переменным. Как следует из теоремы разложения Гельмгольца, произвольное векторное поле, в каждой точке которого определены его дивергенция и ротор, можно представить в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [60]. В частности, двумерное векторное поле  $\mathbf{E}_\perp$  можно представить в виде

$$\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi + [\nabla_\perp \times \Psi], \quad (2.7.4)$$

где  $\varphi(x, y, z)$  — скалярный потенциал, а  $\Psi$  — векторный потенциал. В этом разложении присутствуют производные только от продольной компоненты векторного потенциала. Поэтому без потери общности можно выбрать  $\Psi = (0, 0, \psi(x, y, z))$ . Подставляя разложение (2.7.4) в уравнения для поперечных компонент электрического поля, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \nabla_x^3 \varphi + \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} (1 - k_y^2 \Lambda^2) - k_z^2 \right] \nabla_x \varphi - uk_y \frac{\omega^2}{v_A^2} \varphi &= \\ = ik_y \left[ \nabla_x^2 \psi + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \psi \right] - iu \frac{\omega^2}{v_A^2} \nabla_x \psi, \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla_x^3 \psi + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \nabla_x \psi - uk_y \frac{\omega^2}{v_A^2} \psi &= \\ - ik_y \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \nabla_x^2 \varphi + \frac{\omega^2}{v_A^2} (1 - k_y^2 \Lambda^2) \varphi - k_z^2 \varphi \right] + iu \frac{\omega^2}{v_A^2} \nabla_x \varphi. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Решение системы уравнений (2.7.5)–(2.7.6) в общем виде является достаточно сложной задачей. Поэтому для простоты мы ограничимся двумя предельными случаями. У квазипродольных альфвеновских волн ( $k_\perp \ll \sqrt{u} k_\parallel$ ) поперечная дисперсия обусловлена гиротропией плазмы, т.е. вращением ионов в магнитном поле. В МГД-уравнениях этот эффект описывается членами, пропорциональными малому параметру  $u = \omega/\omega_i \ll 1$ . В этом приближении в (2.7.5)–(2.7.6) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными параметру  $\Lambda^2$ . Мы, кроме того, ограничимся рассмотрением колебаний с  $k_y = 0$ , для которых эффекты гиротропии являются основными. Для таких колебаний система уравнений (2.7.5)–(2.7.6) сводится к

$$\left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2 \right) \varphi' = -iu \frac{\omega^2}{v_A^2} \psi', \quad (2.7.7)$$

$$\nabla_x^2 \psi' + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2 \right) \psi' = iu \frac{\omega^2}{v_A^2} \varphi', \quad (2.7.8)$$



где обозначено  $\varphi' \equiv \nabla_x \varphi$ ,  $\psi' \equiv \nabla_x \psi$ . Легко проверить, что при переходе к модели однородной плазмы из системы уравнений (2.7.7)–(2.7.8) получается дисперсионное уравнение для МГД-волн в холодной гиротропной плазме, одним из корней которого является дисперсионное соотношение для БМЗ-волн  $\omega^2 = k^2 v_f^2$ , а другим — дисперсионное уравнение (1.0.21) для квазипродольных альфвеновских волн.

В обратном предельном случае ( $k_\perp \gg \sqrt{u} k_\parallel$ ) в (2.7.5)–(2.7.6) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными  $u$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \nabla_x^2 \varphi' + \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} (1 - k_y^2 \Lambda^2) - k_z^2 \right] \varphi' = \\ = ik_y \left[ \nabla_x^2 \psi + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \psi \right], \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 \psi' + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \psi' = \\ = -ik_y \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \nabla_x^2 \varphi + \frac{\omega^2}{v_A^2} (1 - k_y^2 \Lambda^2) \varphi - k_z^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

При переходе к модели однородной плазмы из (2.7.9)–(2.7.10) получают дисперсионное уравнение для БМЗ-волн  $\omega^2 = k^2 v_f^2$  и дисперсионное уравнение (1.0.22) для кинетических альфвеновских волн.

Системы уравнений (2.7.7)–(2.7.8) и (2.7.9)–(2.7.10) имеют вид, аналогичный уравнениям для двух связанных осцилляторов (см. [61]). В левых частях уравнений (2.7.7) и (2.7.8) стоят операторы, которые при переходе к однородной плазме при действии на скалярный потенциал  $\varphi$  дают дисперсионные уравнения для альфвеновских волн, а в уравнениях (2.7.8) и (2.7.10) — операторы, дающие при действии на компоненту векторного потенциала  $\psi$  дисперсионное уравнение для БМЗ-волн. В правых частях этих уравнений стоят члены, определяющие связь между этими модами МГД-колебаний. Таким образом, можно считать, что скалярный потенциал  $\varphi$  полного поля МГД-колебаний описывает альфвеновские волны, а продольная компонента векторного потенциала  $\psi$  — магнитозвуковые волны.

Найдем решение (2.7.7)–(2.7.8) для квазипродольных МГД-колебаний с  $k_y = 0$  вблизи точки альфвеновского резонанса  $x_A$  (см. [62]). Выразив  $\varphi'$  из (2.7.7) и подставляя в (2.7.8), получим уравнение

$$\nabla_x^2 \psi' - V(x) \psi' = 0, \quad (2.7.11)$$

имеющее вид уравнения Шредингера с потенциалом

$$V(x) = -k_x^2 = -\frac{\omega^2}{v_A^2} + k_z^2 + \frac{u^2 k_z^4}{(\omega^2/v_A^2) - k_z^2}, \quad (2.7.12)$$

где  $k_x$  —  $x$ -компонента волнового вектора в ВКБ-приближении. Вблизи точки альфвеновского резонанса используем линейное разложение

для скорости Альфвена

$$v_A^2(x) \approx \bar{v}_A^2 \left[ 1 - \frac{x - x_A}{a_A} \right] \quad (2.7.13)$$

и для регуляризации особенности уравнения (2.7.11) учтем малый инкремент колебаний, произведя замену  $\omega \rightarrow \omega + i\bar{\gamma}$ . В результате в главном порядке теории возмущений получим

$$\nabla_x^2 \psi' + \frac{u^2 k_z^2 a_A}{x - x_A + i\varepsilon_A} \psi' = 0, \quad (2.7.14)$$

где  $\varepsilon_A = 2a_A \bar{\gamma}_A / \omega$ . Отметим, что в рассматриваемом случае точка альфвеновского резонанса также расположена в области непрозрачности БМЗ-волны на расстоянии  $\Delta_A = x_f - x_A = ua_A$  от точки поворота  $x_f$ , определяемой из условия  $V(x_f) = 0$ . Общее решение (2.7.14) имеет вид

$$\psi' = \sqrt{\frac{x - x_A + i\varepsilon_A}{\tilde{a}}} \times \left[ C_1 I_1 \left( 2\tilde{U} \sqrt{\frac{x - x_A + i\varepsilon_A}{\tilde{a}}} \right) + C_2 K_1 \left( 2\tilde{U} \sqrt{\frac{x - x_A + i\varepsilon_A}{\tilde{a}}} \right) \right],$$

где обозначено  $\tilde{a} = (a_A/k_z^2)^{1/3}$ ,  $\tilde{U} = u(k_z a_A)^{2/3}$ ,  $I_1(z)$ ,  $K_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя,  $C_{1,2}$  — произвольные константы. Роль слагаемого  $i\varepsilon_A$  в этом выражении сводится только к заданию правила обхода особой точки  $x = x_A$ :

$$\lim_{\varepsilon_A \rightarrow 0} \sqrt{x - x_A + i\varepsilon_A} = \begin{cases} \sqrt{x - x_A}, & x > x_A, \\ i\sqrt{x_A - x}, & x < x_A, \end{cases} \quad (2.7.15)$$

принимая которое параметр  $\varepsilon_A$  можно вообще опустить, поскольку решение для  $\psi'$  не имеет особенности при  $x \rightarrow x_A$ .

Однако особенность имеет скалярный потенциал  $\varphi$ , который при  $x \rightarrow x_A$  можно выразить из (2.7.7) как

$$\varphi' = -i \frac{ua_A \psi'}{x - x_A + i\varepsilon_A},$$

откуда

$$\varphi = -iua_A \psi' \ln \frac{x - x_A + i\varepsilon_A}{a_A}. \quad (2.7.16)$$

Таким образом, поле альфвеновских колебаний имеет на резонансной магнитной оболочке те же особенности, что и МГД-колебания с  $k_y \neq 0$  в идеальной плазме. То есть в холодной гиротропной плазме альфвеновский резонанс существует даже при  $k_y = 0$  (см. [62, 63]).  $E_y$ - и  $B_x$ -компоненты поля альфвеновских колебаний имеют логарифмическую особенность на резонансной магнитной оболочке, а  $E_x$ - и  $B_y$ -компоненты — особенность вида  $x^{-1}$ . Параметр  $u$  при  $k_y = 0$

обеспечивает сцепление альфвеновских и БМЗ-волн на резонансной поверхности, но не регуляризует особенность волнового поля.

Рассмотрим теперь альфвеновский резонанс для квазипоперечных альфвеновских волн, описываемый системой уравнений (2.7.9)–(2.7.10). Такие волны называются кинетическими альфвеновскими волнами. В окрестности точки альфвеновского резонанса, где  $v_A^2(x) \approx \bar{v}_A^2[1 - (x - x_A)/a_A]$ , имеем

$$\Lambda^2 \nabla_x^2 \varphi' + \frac{x - x_A}{a_A} \varphi' = i \frac{k_y}{k_z^2} \Delta_{\perp} \psi, \quad (2.7.17)$$

$$\nabla_x^2 \psi' + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \psi = -i k_y k_z^2 \Lambda^2 \Delta_{\perp} \varphi, \quad (2.7.18)$$

где  $\Delta_{\perp} = \nabla_x^2 - k_y^2$ . Рассмотрим задачу о возбуждении резонансных альфвеновских колебаний БМЗ-волной в неоднородной плазме. В уравнении (2.7.17) правая часть определяется полем крупномасштабной БМЗ-волны, которая является источником резонансных альфвеновских волн. В (2.7.18) правая часть описывает обратное влияние альфвеновской волны на поле БМЗ-колебаний. Поскольку она пропорциональна малому параметру  $|k_z^2 \Lambda^2| \ll 1$ , будем в нулевом приближении считать ее равной нулю. Тогда поле БМЗ-волны описывается однородным уравнением (2.7.18), которое не имеет особенностей на резонансной поверхности. Характерный масштаб изменения правой части в (2.7.17) определяется полем крупномасштабных БМЗ-колебаний и в окрестности резонансной поверхности ее можно считать постоянной.

В этом случае решение (2.7.17), удовлетворяющее граничным условиям (ограниченности на асимптотиках  $x - x_A \rightarrow \pm\infty$ ), имеет вид

$$\varphi' = \tilde{\varphi}' G \left( \frac{x - x_A}{\tilde{a}} \right), \quad (2.7.19)$$

где  $\tilde{\varphi}' = i k_y (\Delta_{\perp} \psi)_{x_A} / k_z^2$ ,  $\tilde{a} = \Lambda^{2/3} a_A^{1/3}$ , а функция  $G(z)$  является решением неоднородного уравнения Эйри

$$\nabla_z^2 G + zG = 1 \quad (2.7.20)$$

и имеет следующее интегральное представление:

$$G(z) = -i \int_0^{\infty} \exp \left( -i \frac{v^3}{3} + ivz \right) dv. \quad (2.7.21)$$

Ее асимптотики на действительной оси комплексной переменной  $z$  имеют вид

$$G(z) = \begin{cases} -\sqrt{\pi} z^{-1/4} \exp \left( \frac{2}{3} iz^{3/2} + i\pi/4 \right), & z \rightarrow \infty, \\ z^{-1}, & z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.7.22)$$

Это асимптотическое представление применимо и для комплексных значений  $z$  в секторах  $|\arg z| < 2\pi/3$ . Распределение реальной и мнимой

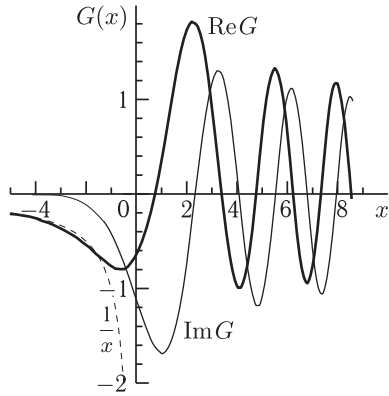


Рис. 2.11. Распределение действительной и мнимой частей функции  $G(x)$  действительного аргумента

частей функции  $G(x)$  от действительного аргумента  $z = x$  представлено на рис. 2.11.

Для отрицательных значений  $\Lambda^2 = -s_e^2$  (где  $s_e = c/\omega_{pe}$  — скин-овая длина электронов) решение (2.7.17) имеет вид

$$\varphi' = -\tilde{\varphi}' G\left(-\frac{x-x_A}{\tilde{a}}\right), \quad (2.7.23)$$

где  $\tilde{a} = s_e^{2/3} a_A^{1/3}$ . Таким образом, как видно из асимптотических выражений (2.7.22), для действительных положительных значений параметра  $\Lambda^2 = (3/4)\rho_i^2 + \rho_s^2$  решение (2.7.19) описывает альфвеновскую волну, которая при  $x > x_A$  имеет вид волны, убегающей поперек маг-

нитных оболочек от резонансной поверхности  $x = x_A$  и убывает как  $x^{-1}$  внутрь области непрозрачности, расположенной при  $x < x_A$ . Для действительных отрицательных значений  $\Lambda^2 = -s_e^2$ , как следует из (2.7.23), область непрозрачности для альфвеновских волн расположена при  $x > x_A$ , а в области прозрачности  $x < x_A$  волна убегает поперек магнитных оболочек. Структура волнового поля в этих двух предельных случаях представлена на рис. 2.12.

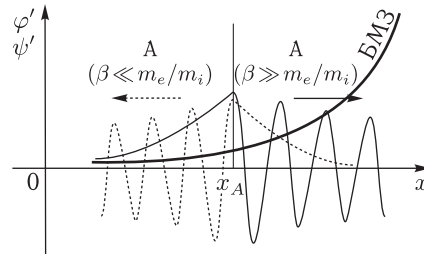


Рис. 2.12. Структура МГД-колебаний поперек магнитных оболочек при резонансе БМЗ-волны с кинетическими альфвеновскими волнами. Амплитуда БМЗ-волны экспоненциально убывает внутрь области непрозрачности. В «холодной» плазме ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) на резонансной магнитной оболочке  $x = x_A$  возбуждается кинетическая альфвеновская волна, убегаящая от резонансной магнитной оболочки влево, а в «теплой» плазме ( $\beta \gg m_e/m_i$ ) — альфвеновская волна, убегаящая от резонансной оболочки вправо

Отметим, что учет малого параметра  $\Lambda^2$  в уравнении (2.7.17) не только обеспечивает связь альфвеновских и БМЗ-волн, но и регулирует особенность волнового поля в точке альфвеновского резонанса. Регуляризация особенности связана с тем, что энергия колебаний уносится

из области резонанса убегающими от резонансной поверхности кинетическими альфвеновскими волнами. При комплексных значениях параметра  $\Lambda = \lambda e^{-i\alpha}$  (где  $0 < \alpha < \pi$ ) амплитуда убегающих от резонансной поверхности альфвеновских волн убывает как  $\exp[-(2/3)((x - x_A)/\tilde{a})^{3/2} \sin(\alpha/2)]$ , где  $\tilde{a} = \lambda^{2/3} a_A^{1/3}$ . Это связано с поглощением энергии волн в процессе их распространения поперек магнитных оболочек резонансными электронами фоновой плазмы. Отметим также, что величина продольной компоненты электрического поля колебаний максимальна именно для квазипоперечных кинетических альфвеновских волн ( $E_z \sim E_{\perp} k_{\perp} \omega \rho_s^2 / v_A$ , см. (2.7.3)).

## 2.8. Волновод для БМЗ-волн

В предшествующих разделах мы рассматривали распространение МГД-волн в плазме, имеющей монотонную неоднородность по одной из координат, поперечных к направлению фонового магнитного поля. Посмотрим теперь к чему приводит наличие в среде плазменных неоднородностей с немонотонным профилем. Одной из наиболее очевидных особенностей распространения волн в таких средах является возможность захвата волн в волноводы, образованные неоднородностью среды.

Волноводное распространение различных типов волн — явление, хорошо известное в геофизике. Достаточно указать на акустические волноводы в атмосфере и океане и волновод Земля–ионосфера для радиоволн. Интерес к волноводному распространению колебаний вполне понятен. Волновод в значительной мере ограничивает рассеяние волн в пространстве и создает возможность их дальнего распространения. Несомненный интерес представляет и возможность волноводного распространения МГД-волн в околоземной плазме [64].

Волноводное распространение связано с ограничением возможности распространения волны в определенных направлениях. В искусственных волноводах (в технике) это осуществляется с помощью отражающих стенок. В естественных волноводах, как правило, таких стенок (резких границ) нет, и «волноводообразующим» фактором является плавная неоднородность среды совместно с дисперсией волны. Проще всего это утверждение пояснить на языке волновых пакетов. Уравнения движения волнового пакета в лучевом приближении имеют вид (0.0.1). Предположим, что зависимость центральной частоты пакета  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  от поперечной (по отношению к волноводу) координаты  $x$  и соответствующего волнового вектора  $k_x$  имеет квадратичный вид:

$$\omega = \omega_0 + \frac{ax^2}{2} + \frac{bk_x^2}{2}. \quad (2.8.1)$$

Здесь второе слагаемое в правой части обусловлено неоднородностью среды, а третье — дисперсией волны. Соотношение типа (2.8.1),

как правило, применимо вблизи оси волновода. Тогда уравнения (0.0.1) сводятся к одному уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -abx,$$

которое при  $ab > 0$  описывает гармонические колебания пакета, что, совместно со свободным распространением вдоль волновода, приводит к волнообразному движению пакета вблизи его оси.

Существование волновода можно продемонстрировать и на языке возмущенных полей. Реконструируем по дисперсионному уравнению (2.8.1) дифференциальное уравнение, описывающее пространственную структуру поля. Для этого умножим левую и правую части на полевую величину  $\Phi$  (ею может быть определенная компонента возмущенного электрического или магнитного поля) и сделаем замену  $k_x \rightarrow -d^2/dx^2$ . В результате получаем уравнение типа стационарного уравнения Шредингера

$$b \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + [2(\omega - \omega_0) - ax^2] \Phi = 0, \quad (2.8.2)$$

которое при  $ab > 0$  описывает квантовый осциллятор (см. [65]). Оно дает спектр собственных частот волновода

$$\omega = \omega_n \equiv \omega_0 + \sqrt{ab} \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — квантовое число, нумерующее собственные моды волновода. Соответствующие собственные функции имеют масштаб локализации по оси  $x$  порядка  $(ab)^{1/4}$ . Переход от уравнения (2.8.1) к уравнению (2.8.2) вполне подобен переходу от классической механики к квантовой.

Основываясь на этих аргументах, нетрудно убедиться, что для БМЗ-волн возможно волноводное распространение. Дисперсионное уравнение для них имеет вид  $\omega = kv_A$ , где  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  — модуль полного волнового вектора. Предположим, что магнитное поле  $B_0$  однородно, а плотность плазмы зависит от координаты  $x$  и имеет максимум при  $x = x_0$ . Вблизи этого максимума можно использовать следующее разложение

$$v_A^2 \approx \bar{v}_A^2 \left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2}{a_0^2} \right], \quad (2.8.3)$$

где  $a_0 = (\sqrt{v_A^2(x)/|\nabla_x^2 v_A^2(x)|_{x=x_0}})$  — характерный масштаб неоднородности. Предполагая, что  $k_x$  достаточно мало, имеем

$$\omega \approx \bar{v}_A \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \left( 1 + \frac{(x - x_0)^2}{2a_0^2} + \frac{k_x^2}{2(k_y^2 + k_z^2)} \right).$$

Это выражение имеет точно такую же форму как и (2.8.1), где  $ab = \bar{v}_A^2/a_0^2 > 0$ . Это означает, что в одномерно неоднородной плазме

вблизи максимума ее плотности возможно волноводное распространение БМЗ-волн (в направлениях  $y$  и  $z$  осей координат).

Рассмотрим эту возможность более подробно для квазипродольных МГД-волн, описываемых уравнениями (2.7.11), (2.7.12), где вблизи максимума плотности альфвеновская скорость описывается приближенно как (2.8.3). Напомним, что для таких колебаний  $k_y = 0$  и выполняется следующее соотношение  $k_{\perp} \lesssim \sqrt{u} k_z$ , где под  $k_{\perp}$  в данном случае следует понимать величину, обратную характерной длине волны рассматриваемых колебаний по координате  $x$ . Как мы увидим далее, характерная собственная частота основных гармоник БМЗ-волн, распространяющихся в волноводе, близка к локальной альфвеновской частоте в точке максимума плотности плазмы и ее можно представить в виде

$$\omega = k_z \bar{v}_A (1 + \delta),$$

где  $|\delta| \ll 1$ . Таким образом, для колебаний, распространяющихся вблизи максимума плотности плазмы, потенциал в уравнении (2.7.11) можно записать в виде

$$V(x) = k_z^2 \left[ \frac{(x - x_0)^2}{a_0^2} - \delta - \frac{u^2}{((x - x_0)/a_0)^2 - \delta} \right]. \quad (2.8.4)$$

Вид потенциала  $V(x)$  для значений  $\delta > 0$  и  $\delta < 0$  представлен на рис. 2.13.

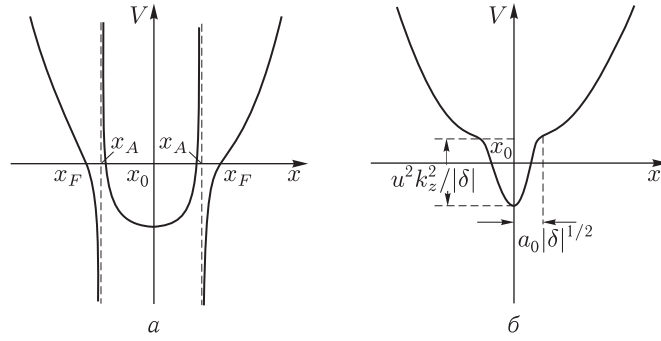


Рис. 2.13. Потенциал в уравнении (2.7.11) для квазипродольных МГД-колебаний:  $a$  — вид потенциала  $V(x)$  с точками альфвеновского резонанса ( $x_A$ ) для волноводных БМЗ-колебаний ( $\delta > 0$ );  $b$  — потенциал  $V(x)$  для квазипродольных альфвеновских волн ( $\delta < 0$ ), распространяющихся в волноводе

При  $\delta > 0$  уравнение (2.7.11) описывает квазипродольные БМЗ-волны, локализованные между точками поворота  $x_f = x_0 \pm \sqrt{\delta \pm u} a_0$ . Внутри волновода имеются также две точки альфвеновского резонанса  $x_A = x_0 \pm \sqrt{\delta} a_0$  (см. рис. 2.13,  $a$ ). Как мы знаем из разд. 2.5, в этих точках происходит резонансное возбуждение альфвеновских волн и частичное поглощение энергии БМЗ-волн, распространяющихся в волноводе.

При  $u \ll 1$  это поглощение мало. Как и в случае с альфвеновским резонансом, будем искать решение (2.7.11) методом последовательных приближений. В главном порядке теории возмущений положим  $u = 0$  в потенциале (2.8.4). Тогда уравнение (2.7.11) можно представить в виде

$$\nabla_x^2 \psi' - k_z^2 \left[ \frac{(x - x_0)^2}{a_0^2} - \delta \right] \psi' = 0. \quad (2.8.5)$$

Решение (2.8.5), удовлетворяющее граничным условиям (ограниченности амплитуды колебаний на асимптотиках  $x \rightarrow \pm\infty$ ), имеет вид (см. [65])

$$\psi'_n(x) = C_n y_n \left( \frac{x - x_0}{\tilde{a}} \right), \quad \delta_n = \frac{2n + 1}{k_z a_0}, \quad (2.8.6)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники волноводной моды,  $C_n$  произвольная константа,  $\tilde{a} = \sqrt{a_0/k_z}$ ,

$$y_n(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (2.8.7)$$

$H_n(\xi)$  — полиномы Эрмита ( $H_0 = 1$ ,  $H_1 = 2\xi, \dots$ ). Собственные функции  $\psi'_n(x)$  в (2.8.6) с собственными значениями  $\delta = \delta_n$  описывают гармоники волноводных БМЗ-мод, имеющих  $n$  узлов по координате  $x$  внутри волновода. В ВКБ-приближении по координате  $x$  волноводные моды представляют собой стоячие волны, локализованные между точками поворота  $x_f = x_0 \pm \sqrt{\delta + u} a_0$ .

Определим теперь затухание собственных мод в точках альфвеновского резонанса. Для определения декремента затухания  $n$ -й гармоники  $\gamma_n$  используем уравнение

$$\gamma_n = \frac{1}{W_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial t} dx, \quad (2.8.8)$$

где

$$W_n = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B|^2 dx \quad (2.8.9)$$

— интегральная плотность энергии волноводной моды в заданном сечении плоскости  $(y, z)$ ,  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$  — квадрат напряженности магнитного поля БМЗ-волны,

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = 4\bar{\gamma} F_n = 4\bar{\gamma} \frac{|B|^2}{8\pi} \quad (2.8.10)$$

— мощность, диссипируемая в точках альфвеновского резонанса,  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$  — декремент затухания альфвеновских волн в окрестности резонансных поверхностей. В этом выражении учтено наличие двух точек альфвеновского резонанса внутри волновода. Пределы интегрирования в (2.8.8) распространены до  $\pm\infty$ , поскольку область локализа-



ции альфвеновской волны, определяемая малым инкрементом  $\bar{\gamma}$ , много меньше области локализации волноводной моды.

Из разложения (2.7.4) и уравнения Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.8.11)$$

имеем следующие представления для компонент магнитного поля МГД-волн:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{k_z c}{\omega}(ik_y \varphi + \nabla_x \psi), & B_y &= -\frac{k_z c}{\omega}(\nabla_x \varphi - ik_y \psi), \\ B_z &= i\frac{c}{\omega}(\nabla_x^2 \psi - k_y^2 \psi). \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Представляя в окрестностях точек альфвеновского резонанса разложение для альфвеновской скорости  $v_A^2(x) \approx \bar{v}_A^2[1 - (x - x_A)/a_A]$  и добавляя к частоте собственных колебаний малый инкремент  $\omega \rightarrow \omega + i\bar{\gamma}$  (при  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ ), получаем для скалярного потенциала  $\varphi$  выражение вида (2.7.16). Ограничимся рассмотрением основной моды БМЗ-колебаний, распространяющихся в волноводе ( $n = 0$ ). Так, для плотности энергии основной гармоники имеем

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{c^2}{8\pi\omega_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} (k_z^2 \psi_0'^2 + (\nabla_x \psi_0')^2) dx = \\ &= C_0^2 \frac{c^2}{8\pi\omega_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( k_z^2 + \frac{1}{\tilde{a}^2} + \frac{(x - x_0)^2}{\tilde{a}^4} \right) \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\tilde{a}^2}\right) dx \approx \\ &\approx C_0^2 \frac{k_z^2 c^2 \tilde{a}}{8\sqrt{\pi} \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

где  $\omega_0 = \omega + \delta_0$ , а для мощности, диссипируемой в окрестности точек альфвеновского резонанса:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\gamma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B|^2 dx &\approx \frac{\bar{\gamma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B_y(x)|^2 dx = \frac{\bar{\gamma} k_z^2 c^2}{2\pi\omega_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0'(x)|^2 dx = \\ &= \frac{(C_0 k_z c u)^2 a_A}{4\pi\omega_0} \lim_{\varepsilon_A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\tilde{a}^2}\right)}{(x - x_A)^2 + \varepsilon_A^2} dx \approx \\ &\approx C_0^2 \frac{k_z^2 c^2 u^2 a_A}{4\omega_0} e^{-1}. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

В этих выражениях учтено, что для рассматриваемых квазипродольных МГД-волн  $k_z a_0 \gg 1$  и  $|x_A - x_0| = \tilde{a} = \sqrt{a_0/k_z}$  (это следует из представления (2.8.3) и условия альфвеновского резонанса для основной гармоники  $\omega_0 = k_z v_A(x_A)$ ). Приравнивая производные  $\nabla_x v_A^2(x)$ ,

следующие из разложений (2.7.13) и (2.8.3), получим следующее выражение, связывающее характерные масштабы:

$$a_A = a_0^2/\tilde{a} = a_0\sqrt{k_z a_0}/2.$$

Подставляя (2.8.13) и (2.8.14) в (2.8.8), получаем следующее выражение для декремента основной моды волноводных БМЗ-колебаний:

$$\gamma_0 = 4\sqrt{\pi} e^{-1} u^2 k_z a_0 \omega_0. \quad (2.8.15)$$

При достаточно малых значениях  $u$  (во всяком случае при  $u k_z a_0 \ll 1$ ) имеем  $\gamma_0 \ll \omega_0$ , т. е. БМЗ-волны, распространяющиеся в волноводе, слабо затухают из-за взаимодействия с альфвеновскими волнами на резонансных поверхностях.

## 2.9. Волновод для квазипродольных альфвеновских волн

Рассмотрим задачу о распространении квазипродольных альфвеновских волн в волноводе, образованном неоднородностью плотности плазмы (см. [66]). Используем модель среды, аналогичную той, что была представлена в разд. 2.8. Как мы видели ранее, поперечная дисперсия альфвеновских волн обусловлена малыми эффектами. Для квазипродольных альфвеновских волн она связана с учетом конечной гиротропии плазмы, описываемой малым параметром  $u = \omega/\omega_i \ll 1$ . Как и волноводные БМЗ-моды, альфвеновские волны, распространяющиеся в волноводе, локализованы вблизи максимума плотности плазмы. Структура волнового поля таких мод описывается уравнением (2.7.11) с потенциалом (2.8.4), где, в отличие от волноводных БМЗ-мод,  $\delta < 0$ . В этом случае потенциал (2.8.4) не имеет особенностей (см. рис. 2.13, б).

Существование волноводных мод в таком потенциале возможно только, если дно «потенциальной ямы» опускается ниже нуля ( $V(x_0) < 0$ ), что возможно при  $-\delta < u$ . Найдем решение (2.7.11) в двух предельных случаях. Параметром, характеризующим потенциальную яму, является произведение ее глубины на квадрат ширины. Для узкой ямы в центре потенциала (см. рис. 2.13б) он равен  $(u k_z a_0)^2$ . Если  $u k_z a_0 \gg 1$ , то потенциальная яма «глубокая» и в ней существует много собственных мод распространяющихся в волноводе колебаний. Число собственных мод дискретного спектра «глубокой ямы» по порядку величины равно  $n \sim u k_z a_0 \gg 1$ . При  $u k_z a_0 \ll 1$  потенциальная яма «мелкая» и в ней существует только одна собственная мода.

В случае «глубокой ямы» для основных гармоник колебаний, локализованных вблизи ее дна, характерный масштаб их локализации  $\Delta$  много меньше ширины ямы  $\sqrt{|\delta|} a_0$ . Для них потенциал можно считать

квадратичным и решения (2.7.11) имеют тот же вид, что и для БМЗ-мод (2.8.6) с собственными значениями

$$\delta = \delta_n = -u + \frac{2n+1}{k_z a_0}, \quad \omega_n = k_z v_A(x_0) \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{n+1/2}{k_z a_0}\right).$$

Характерный масштаб локализации основных мод  $\Delta = \sqrt{a_0/k_z}$ , и, таким образом, условие локализации мод вблизи дна потенциальной ямы ( $\Delta^2 \ll |\delta| a_0^2$ ) имеет вид  $u k_z a_0 \gg 1$ . Квадратичное представление потенциала (2.8.4) применимо при  $\Delta \ll a_0$ , что означает  $k_z a_0 \gg 1$ . Выполнение этого условия мы далее будем предполагать.

В случае «мелкой ямы» ( $u k_z a_0 \ll 1$ ) размер локализации собственной моды много больше ширины ямы. Решение (2.7.11) при этом можно получить, сшивая решения внутри узкой центральной ямы и вне ее. При описании структуры волнового поля вне центральной ямы в потенциале уравнения (2.7.11) можно пренебречь слагаемым с малым параметром  $u$ . В результате уравнение принимает вид (2.8.5), где  $\delta < 0$ . Его решение, амплитуда которого убывает при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\psi'_+ = D_p[\sqrt{2}(x-x_0)/\tilde{a}], \quad p = -(1 - \delta k_z a_0)/2, \quad (2.9.1)$$

где  $D_p(z)$  – функция параболического цилиндра (см. например [67]),  $\tilde{a} = \sqrt{a_0/k_z}$ . Для решения внутри потенциальной ямы при  $x \rightarrow x_0$ , наоборот, основной вклад в потенциал дает слагаемое с  $u^2$ . Уравнение (2.7.11) в этом случае имеет вид

$$\nabla_x^2 \psi' + \frac{u^2 k_z^2}{((x-x_0)/a_0)^2 - \delta} \psi' = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение между точками  $x_{\pm}$ , расстояние между которыми значительно превышает характерную ширину потенциальной ямы  $\sqrt{|\delta|} a_0$ , но много меньше характерного масштаба локализации собственной функции  $\sqrt{|\delta|} a_0 \ll |x_{\pm} - x_0| \ll \sqrt{a_0/k_z}$ . Учитывая, что на данном масштабе собственная функция меняется мало, получим следующее выражение для скачка логарифмической производной рассматриваемого решения:

$$\nabla_x \ln \psi' \Big|_{x_-}^{x_+} \approx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2 k_z^2}{((x-x_0)/a_0)^2 - \delta} dx. \quad (2.9.2)$$

Здесь интегрирование в правой части распространено до  $\pm\infty$ , поскольку интеграл в правой части сходится, а подынтегральное выражение локализовано на значительно меньших масштабах, чем пределы интегрирования.

Приравнивая этот скачок логарифмической производной к тому, что получается из внешнего решения (2.9.1), и используя предельные

выражения для функций параболического цилиндра при  $x \rightarrow x_0$ , получим следующее собственное значение для единственного решения:

$$\delta = -\frac{\pi^2}{4} \frac{\Gamma^2(1/4)}{\Gamma^2(3/4)} u^4 (k_z a_0)^3, \quad (2.9.3)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Решение внутри узкой центральной ямы фактически сводится к резкому изменению производной и может трактоваться как излом решения (2.9.1) в точке  $x = x_0$ . Характерный масштаб этого решения  $\Delta = \sqrt{a_0/k_z}$ .

Представляет интерес поляризация найденных альфвеновских волноводных мод в рассмотренных выше двух предельных случаях. Из (2.8.12) и (2.7.7) имеем

$$B_y = -i \frac{u}{((x - x_0)/a_0)^2 - \delta} B_x.$$

Отсюда следует, что в случае «глубокой ямы» ( $uk_z a_0 \gg 1$ ) поляризация почти круговая:  $B_y(x)/B_x(x) \approx -i$ . Это соответствует тому, что в глубокой яме характерный волновой вектор  $k_x \sim \sqrt{k_z/a_0}$  удовлетворяет условию квазипродольного распространения

$$k_x/k_z \sim (k_z a_0)^{-1/2} \ll \sqrt{u}.$$

В случае «мелкой ямы» поляризация эллиптическая, а отношения полуосей эллипса поляризации сильно зависят от координаты  $x$ . В центре волновода, при  $x = x_0$ , имеем

$$|B_x/B_y| \sim (uk_z a_0)^{-3} \gg 1,$$

но уже при  $|x - x_0| = \sqrt{u} a_0 \ll \Delta$  соотношение полуосей меняется на обратное:  $|B_x/B_y| < 1$ .

## 2.10. Волноводы для кинетических альфвеновских волн в «холодной» плазме. Затухание волноводных мод

Поскольку кинетические альфвеновские волны обладают малой поперечной дисперсией, они могут медленно (со скоростями много меньше альфвеновской скорости) распространяться поперек силовых линий магнитного поля. Для этих волн экстремумы в распределении альфвеновской скорости по поперечной координате  $x$  также могут служить волноводами (см. [63, 68]). Для описания волноводного распространения кинетических альфвеновских волн с  $k_y = 0$  в «холодной плазме» ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) вблизи таких экстремумов (где  $v_A^2(x) \approx \bar{v}_A^2 [1 \pm (x -$

$-x_0)^2/a_0^2]$ ), действуя как и в разд. 2.8 и 2.9, из (2.7.5), (2.7.6) получаем систему уравнений

$$\mu^4 \nabla_{\zeta}^2 \varphi' - (\lambda - \sigma \zeta^2) \varphi' = -i\epsilon \psi', \quad (2.10.1)$$

$$\nabla_{\zeta}^2 \psi' + (\lambda - \sigma \zeta^2) \psi' = -i\epsilon \varphi', \quad (2.10.2)$$

где обозначено  $\mu^4 = k_z^2 s_e^2 \ll 1$  ( $s_e = c/\omega_{pe}$  — электронная скин-длина),  $\zeta = (x - x_0)/\tilde{a}$  ( $\tilde{a} = \sqrt{a_0/k_z}$ ),  $\lambda = \delta k_z a_0$ ,  $\epsilon = uk_z a_0$ ,  $\sigma = \pm 1$  (знак плюс для минимума, а минус — для максимума в распределении  $v_A^2(x)$ ).

Рассмотрим случай  $\epsilon \ll 1$ . Тогда решение системы уравнений (2.10.1), (2.10.2) можно искать методом последовательных приближений. В нулевом приближении,  $\epsilon = 0$ , получаем два набора собственных мод. Вблизи минимума альфвеновской скорости это волноводная БМЗ-мода (2.8.6). Вблизи максимума имеется набор решений для волноводных кинетических альфвеновских волн:

$$\varphi'_m(x) = C_m y_m(\zeta/\mu), \quad \lambda_m = -(2m + 1)\mu^2, \quad (2.10.3)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер волноводной моды, а функция  $y_m(x)$ , описывающая структуру волноводных мод по координате  $x$ , определяется как (2.8.7).

В следующем порядке теории возмущений учет правых частей в уравнениях (2.10.1), (2.10.2) приводит к трансформации волноводных мод (2.8.6) и (2.10.3) в убегающие из волновода МГД-волны. Эти волны уносят часть энергии собственных мод, распространяющихся в волноводе. Из БМЗ-волновода (как и из волновода для квазипродольных альфвеновских волн) энергия уносится кинетической альфвеновской волной, а из волновода для кинетических альфвеновских волн — крупномасштабной БМЗ-волной (рис. 2.14). В результате этого волны в волноводе затухают с декрементом  $\bar{\gamma} = S_x/W$ , где  $S_x$  — вектор Пойнтинга убегающих волн, а  $W$  — плотность энергии волноводной моды. Поскольку, как мы предполагаем, слагаемые в правых частях уравнений (2.10.1), (2.10.2) малы, декременты затухания собственных мод также малы.

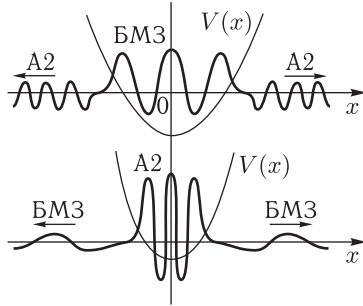


Рис. 2.14. Структура волноводных мод в потенциале  $V(x)$ , затухающих из-за убегания связанных с ними МГД-волн. В верхней части — волноводная БМЗ-мода и связанная с ней убегающая кинетическая альфвеновская волна (А2) (см. рис. А.1, а в Прилож. А), в нижней части — волноводная мода кинетических альфвеновских волн, затухающая из-за убегания из волновода БМЗ-волны

Решение для убегающих из волновода волн можно найти, используя метод функции Грина. Функция Грина строится из решений однородного уравнения, удовлетворяющих граничным условиям (отсутствие волн, прибегающих к волноводу). Например, для определения структуры БМЗ-волны, уносящей энергию из волновода для кинетических альфвеновских волн, подставим решение нулевого приближения (2.10.3) в правую часть уравнения для БМЗ-волн (2.10.2). Решение уравнения (2.10.2) с заданной правой частью можно записать в виде

$$\psi' = -i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\zeta, \zeta') \varphi_m(\zeta') d\zeta', \quad (2.10.4)$$

где

$$\bar{G} = \frac{1}{\mu^4 \bar{W}} \begin{cases} \psi'_+(\zeta) \psi'_-(\zeta'), & \zeta > \zeta', \\ \psi'_-(\zeta) \psi'_+(\zeta'), & \zeta < \zeta', \end{cases} \quad (2.10.5)$$

— функция Грина уравнения (2.10.2),  $\psi'_\pm(\zeta)$  — решения однородного уравнения, удовлетворяющие граничным условиям на асимптотиках  $x \rightarrow \pm\infty$  (наличие волн, уносящих энергию из волновода),  $\bar{W}$  — их вронскиан. В рассматриваемом нами квадратичном потенциале решения однородного уравнения, описывающие БМЗ-волны, уносящие энергию  $m$ -й гармоники волноводных кинетических альфвеновских волн, имеют вид

$$\psi_\pm(\zeta) = C D_{-(1-i\lambda_m)/2}(\pm\sqrt{2} e^{i\pi/4} \zeta),$$

где  $C$  — произвольная константа,  $D_p(z)$  — функция параболического цилиндра.

Подставляя (2.10.5) в (2.10.4), получаем при  $\zeta \rightarrow +\infty$

$$\psi' = -i \frac{\epsilon \bar{N}}{\mu^4 \bar{W}} \psi'_+(\zeta)$$

— БМЗ-волна, уносящая энергию  $m$ -й гармоники волноводных кинетических альфвеновских волн, где

$$\bar{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'_-(\zeta') \varphi_m(\zeta') d\zeta'.$$

Не углубляясь в детали расчетов, аналогичных тем, что были проведены в разд. 2.5 и 2.8 (см. также [63]), приведем выражения для декрементов собственных мод в различных волноводах, обусловленных их частичной трансформацией в убегающие из волновода МГД-волны. В рассмотренном выше случае декремент затухания кинетических альфвеновских волн за счет их вытекания из волновода в виде крупномасштабной БМЗ-волны имеет вид

$$\gamma_m = \omega_m \frac{\mu \epsilon^2}{k_z a_0}.$$

Это выражение справедливо для четных мод  $t = 0, 2, 4, \dots$ . Нечетные моды трансформируются в БМЗ-волны, имеющие узел в точке  $x = x_0$ , в узкой окрестности которой локализована волноводная кинетическая альфвеновская волна. В результате, для нечетных мод декремент затухания в  $\mu^2$  раз меньше.

Для волноводных БМЗ-мод, декремент которых обусловлен их трансформацией в убегающие кинетические альфвеновские волны, имеем

$$\gamma_n = \omega_n \frac{\epsilon^2}{k_z a_0}.$$

Отметим, что декремент затухания БМЗ-волн в волноводе не зависит от малого параметра  $\mu$  и практически совпадает с декрементом затухания из-за джоулевой диссипации в резонансных точках (2.8.15). Это означает, что он не зависит от конкретного механизма потерь энергии в БМЗ-волноводе. Для единственной волноводной моды крупномасштабной квазипродольной альфвеновской волны при  $\epsilon^2 \gg \mu$  получаем

$$\bar{\gamma} = \omega \frac{\epsilon^4}{k_z a_0} \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{4\mu^2}\right).$$

где  $\lambda = \delta k_z a_0$ , а  $\delta$  определяется выражением (2.9.3). В обратном предельном случае  $\epsilon^2 \ll \mu$  имеем

$$\bar{\gamma} = \omega \frac{\epsilon^6}{\mu k_z a_0}.$$

Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях декременты затухания малы  $\bar{\gamma} \ll \omega$ . Только при этом условии можно вообще говорить о возможности волноводного распространения МГД-волн.

### 2.11. Волновод для кинетических альфвеновских и БМЗ волн в «теплой» плазме. Резонанс волноводных мод

В разд. 2.10 мы рассмотрели возможность волноводного распространения кинетических альфвеновских волн в «холодной» плазме с  $\beta \ll m_e/m_i$ . Однако существует еще один тип поперечной дисперсии кинетических альфвеновских волн, приводящий к их распространению поперек магнитных оболочек. Это альфвеновские волны в «теплой» плазме с  $\beta \gg m_e/m_i$ . Волноводами для таких альфвеновских волн, как и для БМЗ, служат области, где альфвеновская скорость имеет локальный минимум в направлении поперек магнитных оболочек. Волноводные моды из таких волноводов не утекают и не затухают. При этом локализация двух типов волноводных мод (альфвеновских и БМЗ) в одной области пространства, как мы увидим дальше, приводит к возможности их внутреннего резонанса.

Рассмотрим возможность канализации кинетических альфвеновских и БМЗ-волн в волноводе, образованном локальным минимумом в распределении скорости Альфвена  $v_A(x)$  (вблизи  $x = x_0$ ), вытянутом вдоль магнитных силовых линий. Используем для описания структуры рассматриваемых колебаний, как и в предыдущем разделе, уравнения (2.7.5), (2.7.6). Для основных мод с  $k_y = 0$ , локализованных вблизи минимума «потенциальной ямы», где для  $v_A^2(x)$  применимо квадратичное разложение (2.8.3), получим систему связанных уравнений

$$\kappa^4 \nabla_\zeta^2 \varphi' + (\lambda - \sigma \zeta^2) \varphi' = i \epsilon \psi', \quad (2.11.1)$$

$$\nabla_\zeta^2 \psi' + (\lambda - \sigma \zeta^2) \psi' = -i \epsilon \varphi', \quad (2.11.2)$$

где обозначено  $\kappa^4 = \omega^2 [(3/4)\rho_i^2 + \rho_s^2]/v_A^2 = u^2 \beta^{*2}$  ( $\beta^{*2} = v_s^2/v_A^2$ ,  $v_s$  — скорость звука в плазме),  $\zeta = (x - x_0)/\tilde{a}$  — безразмерная координата ( $\tilde{a} = \sqrt{a_0/k_z}$ ),  $\epsilon = uk_z a_0$ . Параметр  $\lambda$  вводится соотношением

$$\omega = k_z v_A(x_0)(1 + \lambda/k_z a_0),$$

которое определяет частоту МГД-колебаний, распространяющихся в волноводе. При характерных для магнитосферы Земли параметрах рассматриваемых величин имеем  $\kappa, \epsilon, u \ll 1$ . У системы уравнений (2.11.1), (2.11.2) есть два предельных случая. При  $\kappa = 0$  вновь приходим к системе уравнений (2.7.7), (2.7.8), описывающей крупномасштабный альфвеновский волновод. При  $\epsilon = 0$  одним из решений системы уравнений (2.11.1), (2.11.2) является волноводная магнитозвуковая мода (2.8.6). Другое решение в этом случае описывает волноводную мелкомасштабную альфвеновскую моду:

$$\varphi' = C y_n \left( \frac{\zeta}{\kappa} \right), \quad \lambda = \kappa^2 \lambda_n = (2n + 1) \kappa^2. \quad (2.11.3)$$

Здесь  $C$  — произвольная константа,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер гармоники волноводной моды,  $y_n(z) = a_n \exp(-z^2/2) H_n(z)$  — нормированные на единицу собственные функции вида (2.8.7),  $a_n = \pi^{1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2}$  — нормировочный коэффициент,  $H_n(z)$  — полиномы Эрмита. Будем искать решение системы уравнений (2.11.1), (2.11.2) методом функции Грина, которая для бесконечного дискретного набора решений однородного уравнения (2.11.2), удовлетворяющих заданным граничным условиям, имеет вид

$$G(\zeta, \zeta') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i(\zeta) y_i(\zeta')}{\lambda - \lambda_i}.$$

Если существуют решения системы уравнений (2.11.1), (2.11.2) такие, что в них  $|\lambda - \lambda_n| \ll 1$ , то в сумме доминирует член с  $i = n$  и решение уравнения (2.11.2) имеет вид

$$\psi'(\zeta) = \frac{c_n y_n(\zeta)}{\lambda - \lambda_n}, \quad (2.11.4)$$



где

$$c_n = -i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\zeta) y_n(\zeta) d\zeta. \quad (2.11.5)$$

Аналогично получаем решение уравнения (2.11.1):

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i y_i(\zeta/\kappa)}{\lambda - \kappa^2 \lambda_i}, \quad (2.11.6)$$

где

$$c_i = i \frac{\epsilon}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(\zeta) y_i(\zeta/\kappa) d\zeta = i \frac{\epsilon}{\kappa} \frac{c_n \alpha_{ni}}{\lambda - \lambda_n}, \quad \alpha_{ni} = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(\zeta) y_i(\zeta/\kappa) d\zeta. \quad (2.11.7)$$

Подставляя (2.11.6), (2.11.7) в (2.11.5), получаем следующее дисперсионное уравнение

$$\lambda - \lambda_n = \frac{\epsilon^2}{\kappa} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ni}^2}{\lambda - \kappa^2 \lambda_i}. \quad (2.11.8)$$

При удалении от точки  $\lambda = \lambda_n$  собственные значения, наоборот, приближаются к  $\lambda = \kappa^2 \lambda_i$ , где дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$\lambda - \kappa^2 \lambda_i = \frac{\epsilon^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ni}^2}{\lambda - \lambda_i}. \quad (2.11.9)$$

Используя это выражение для дисперсионного уравнения, можно представить его решения в области  $|\lambda - \lambda_n| \sim 1$ . Полное графическое решение дисперсионного уравнения представлено на рис. 2.15. Крупномасштабные кривые на этом рисунке соответствуют правой части (2.11.9), которая вблизи  $\lambda = \lambda_n$  описывается левой частью уравнения (2.11.8), а «гребенка» котангенсообразных кривых — его правой частью. Собственные значения параметра  $\lambda$  определяются точками пересечения этих кривых.

Особый интерес представляют решения, для которых одновременно выполняются соотношения  $|\lambda - \kappa^2 \lambda_m| \ll \kappa^2$  и  $|\lambda - \lambda_n| \ll 1$ . В этом случае дисперсионные уравнения (2.11.8), (2.11.9) можно представить в виде квадратного уравнения, решения которого имеют вид

$$\lambda \approx \frac{\lambda_n + \kappa^2 \lambda_m}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_n - \kappa^2 \lambda_m)^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{\kappa} \alpha_{mn}^2} = \kappa^2 \lambda_m + \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{\kappa} \alpha_{mn}^2},$$

где обозначено  $\delta = \lambda_n - \kappa^2 \lambda_m$ . Прямым вычислением нетрудно показать, что в этом случае можно представить  $\alpha_{mn}^2 = \kappa^3 \sigma_{mn} \tau_{mn}$ , где  $\sigma_{mn} = 1$ , если  $m$  и  $n$  одной четности, и  $\sigma_{mn} = 0$  — если разной, а числа  $\tau_{mn}$  порядка единицы для основных мод ( $n \sim 1$ ) и слабо зависят от  $m$ .

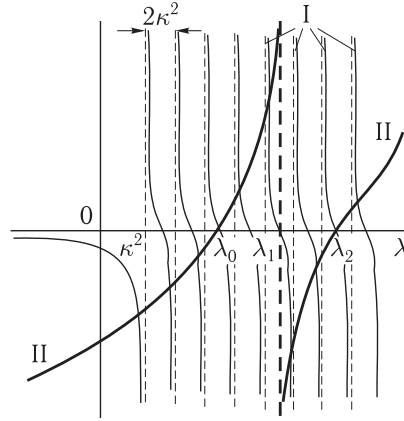


Рис. 2.15. Графическое решение дисперсионных уравнений (2.11.8), (2.11.9). Кривые I соответствуют правой части (2.11.8), а кривые II — правой части (2.11.9)

Рассмотрим теперь поляризацию полученных волноводных мод. Из (2.8.12) имеем следующие выражения для компонент магнитного поля колебаний:

$$B_x = \frac{k_z c}{\omega} \psi' = \frac{k_z c}{\omega} \frac{c_n y_n(\zeta)}{\lambda - \lambda_n}, \quad B_y = -\frac{k_z c}{\omega} \varphi' = -\frac{\epsilon k_z c}{\kappa \omega} \frac{c_n \alpha_{mn} y_n(\zeta/\kappa)}{(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \kappa^2 \lambda_m)}.$$

Учитывая, что для основных мод  $y_n(\zeta) \sim 1$ , а  $y_m(\zeta/\kappa) \sim \sqrt{\kappa}$ , для рассматриваемых колебаний имеем

$$\left| \frac{B_y}{B_x} \right| \sim \frac{\epsilon}{\kappa^{1/2}} \frac{\alpha_{mn}}{\lambda - \kappa^2 \lambda_m} \approx \left[ \sqrt{1 + \frac{\delta^2 \kappa}{4\epsilon^2 \alpha_{mn}^2}} \pm \frac{\delta \kappa^{1/2}}{2\epsilon \alpha_{mn}} \right]^{-1}.$$

Если  $\delta^2 \gg (\epsilon \kappa)^2$ , то для двух корней дисперсионного уравнения имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_y}{B_x} \right|^{(1)} &\sim \frac{\epsilon \kappa}{|\delta|} \ll 1, \\ \left| \frac{B_y}{B_x} \right|^{(2)} &\sim \frac{|\delta|}{\epsilon \kappa} \gg 1. \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений соответствует волноводной БМЗ-моду, у которой доминирующей является крупномасштабная  $B_x$  компонента магнитного поля колебаний, а мелкомасштабная  $B_y$  компонента имеет малую амплитуду. Второе соотношение описывает волноводную альфвеновскую моду, состоящую из доминирующей мелкомасштабной  $B_y$  компоненты и крупномасштабной  $B_x$  компоненты малой амплитуды.

В случае  $\delta = 0$  ( $\lambda_n = \kappa^2 \lambda_m$ ) соотношение амплитуд для каждой из этих мод становится одинаковым:

$$\left| \frac{B_y}{B_x} \right|^{(1,2)} \sim 1.$$

Это можно интерпретировать как резонанс альфвеновских и БМЗ-мод волновода, когда у каждой из них крупномасштабная и мелкомасштабная компоненты имеют сопоставимую амплитуду, а сами моды одинаково поляризованы.

## 2.12. Волноводы в плазменных волокнах

В предшествующих разделах были рассмотрены волноводы для МГД-волн в среде, имеющей одномерную неоднородность в распределении альфвеновской скорости поперек магнитных силовых линий. Рассмотренные выше волноводы можно было описать, используя декартову систему координат  $(x, y, z)$ , в которой неоднородность среды направлена по одной из поперечных координат (скажем по  $x$ ), а в двух других направлениях среда однородна. Волноводы с таким типом неоднородности в магнитосфере Земли существуют, например, на плазмопаузе [68, 69], во внутренней плазмосфере [70], а также в прилегающей к магнитопаузе части внешней магнитосферы [71–75]. Конечно, такие волноводы нельзя считать строго одномерно-неоднородными. Они неоднородны и по двум другим координатам. Однако масштаб неоднородности плазмы в них поперек магнитных оболочек (по координате  $x$ ) много меньше масштабов неоднородности в двух других направлениях ( $y$  и  $z$ ), и в главном порядке теории возмущений можно считать плазму в этих направлениях однородной.

Однако в магнитосфере Земли и на Солнце имеются плазменные образования с другим типом неоднородности, которые могут служить волноводами для МГД-волн. Речь идет о плазменных волокнах, вытянутых вдоль магнитных силовых линий. На Солнце — это магнитные петли (см. например [76, 77]), а в магнитосфере Земли — плазменные волокна, отделяющиеся от вечернего выступа плазмосферы и дрейфующие к магнитопаузе [78] (рис. 2.16). Эти волокна получили название магнитосферных каналов (ducts, plumes), поскольку внутри них канализируются свистовые моды электромагнитных колебаний, БМЗ- и альфвеновские волны, распространяющиеся в магнитосфере [79, 80]. Таким образом, эти области пространства играют роль волнопроводов для альфвеновских и БМЗ-волн. Теория волноводного распространения альфвеновских волн нашла эффективное применение в исследованиях, посвященных распространению геомагнитных пульсаций в магнитосфере Земли. Установлено, что с высокоширотными областями Земли, куда вдоль силовых линий геомагнитного поля проецируются ионосферные основания магнитосферных каналов, связан высокоширотный пик в частоте регистрации локализованных геомагнитных пульсаций

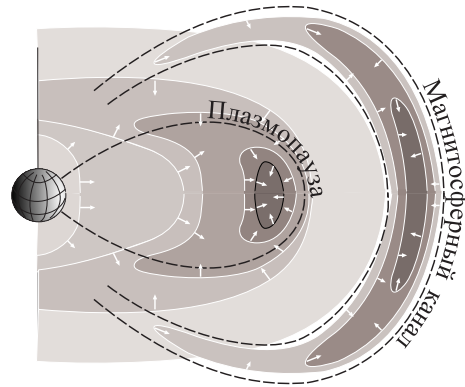


Рис. 2.16. Распределение альфвеновской скорости в дневной части магнитосферы (градации серого цвета). Показано распределение  $v_A$  в меридиональном сечении внутри плазменной паузы и в плазменном волокне (канале для МГД-волн) во внешней магнитосфере. Меньшим значениям  $v_A$  соответствуют более темные оттенки серого. Белые стрелки показывают направление групповой скорости БМЗ-волн в меридиональном сечении

Pc1 [81]. Имеются также работы, в которых наблюдалась тонкая структура геомагнитных пульсаций Pc1 [82], что интерпретировалось как распространение их в плазменных волокнах [83].

Пульсации Pc1 рассматриваются как пакеты альфвеновских волн, движущиеся вдоль силовых линий геомагнитного поля [1]. Они усиливаются в результате циклотронной неустойчивости, связанной с высокоэнергичными анизотропными протонами кольцевого тока или внешнего радиационного пояса, при каждом прохождении области неустойчивости, расположенной вблизи геомагнитного экватора [84, 85].

Однако циклотронная неустойчивость эффективно усиливает только волны, распространяющиеся в квазипродольном режиме (у которых  $k_{\perp} < \sqrt{u} k_{\parallel}$ , см. [23, с. 309]). Как было показано во Введении, при движении в поперечно неоднородной среде волновой вектор пакета растет и пакет быстро (за период одного баунс-колебания между магнитосопрежженными ионосферами) выходит из этого режима. Таким образом, если начальная амплитуда пакета недостаточно велика, то, исходя из выше изложенного, можно заключить, что она не сможет вырасти до величин, необходимых для его обнаружения. Однако наличие волновода дает возможность взглянуть на этот процесс с другой точки зрения. Распространение альфвеновских волн в волноводном режиме происходит без нарастания  $k_{\perp}$ . Это позволяет волнам многократно (после отражений от ионосферы) пробегать область неустойчивости в режиме непрерывного усиления, достигая необходимой амплитуды. В настоящем разделе будут рассмотрены волноводы для альфвеновских волн, распространяющихся в магнитосферных каналах.

**2.12.1. Аксиально-симметричный плазменный волновод для квазипродольных альфвеновских волн.** Рассмотрим возможность волноводного распространения квазипродольных альфвеновских волн в магнитосферных каналах (см. [86]). Для плазменных волокон, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля, используем модель в виде бесконечного аксиально-симметричного плазменного цилиндра. Для описания МГД-колебаний, распространяющихся в таком волноводе, используем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \phi, z)$ , в которой магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , а неоднородность плотности плазмы — по радиусу  $\rho_0 = \rho_0(\rho)$  (рис. 2.17, а).

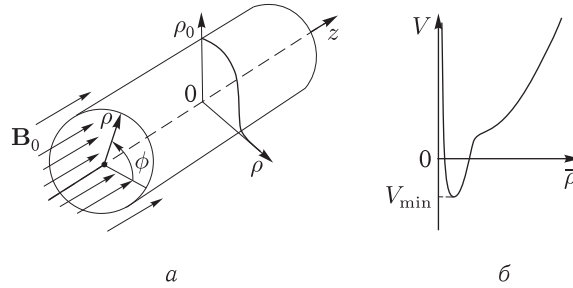


Рис. 2.17. Схематическая модель магнитосферного канала в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$ : а — направление внешнего магнитного поля  $B_0$  и распределения плотности плазмы в плазменном волокне  $\rho_0(\rho)$ ; б — вид потенциала в уравнении (2.12.5)

Описание МГД-колебаний в такой модели проведем, используя уравнения для компонент возмущенного магнитного поля  $\mathbf{B} = (B_\rho, B_\phi, B_z)$ . Поскольку плазма в рассматриваемой модели среды однородна по координатам  $\phi$  и  $z$ , будем искать решения для гармоник колебаний вида  $\exp(im\phi + ik_z z - i\omega t)$  (где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — азимутальное волновое число), по которым можно разложить произвольное возмущение. С помощью разложения (2.7.4) и уравнения Максвелла (2.8.11) можно связать компоненты возмущенного магнитного поля в цилиндрической системе координат с компонентами скалярного и векторного потенциалов:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{k_z c}{\omega} \left( i \frac{m}{\rho} \varphi + \nabla_\rho \psi \right), & B_\phi &= -\frac{k_z c}{\omega} \left( \nabla_\rho \varphi - i \frac{m}{\rho} \psi \right), \\ B_z &= i \frac{c}{\omega} \left( \frac{1}{\rho} \nabla_\rho \rho \nabla_\rho \psi - \frac{m^2}{\rho^2} \psi \right). \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

Используя также уравнение (2.7.1) с тензором диэлектрической проницаемости вида (2.7.2), для аксиально-симметричных гармоник ( $m = 0$ ) квазипродольных альфвеновских волн получим систему уравнений,

аналогичную (2.7.7), (2.7.8):

$$\left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2\right) B_\phi = iu \frac{\omega^2}{v_A} B_\rho, \quad (2.12.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho B_\rho}{\partial \rho} + \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2\right) B_\rho = -iu \frac{\omega^2}{v_A} B_\phi. \quad (2.12.3)$$

Подставляя  $B_\phi$  из (2.12.2) в (2.12.3), имеем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho B_\rho}{\partial \rho} + \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2 - \frac{u^2 k_z^4}{(\omega^2/v_A^2) - k_z^2}\right) B_\rho = 0. \quad (2.12.4)$$

Чтобы получить наглядное представление о свойствах решений уравнения (2.12.4), перейдем в нем с помощью подстановки  $\bar{B} = \rho^{1/2} B_\rho$  к уравнению, имеющему вид уравнения Шредингера,

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \rho^2} - V(\rho) \bar{B} = 0, \quad (2.12.5)$$

с потенциалом

$$V(\rho) = k_z^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} + \frac{u^2 k_z^4}{(\omega^2/v_A^2) - k_z^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{\rho^2}. \quad (2.12.6)$$

В зависимости от вида потенциала  $V(\rho)$  уравнение (2.12.5) может иметь при заданных граничных условиях как непрерывный, так и дискретный набор решений. Граничными условиями в рассматриваемой задаче служит требование конечности амплитуды колебаний на оси плазменного цилиндра и на асимптотике  $\rho \rightarrow \infty$ . При этом дискретный набор решений существует только при выполнении условия

$$V_{\min} \equiv \min V(\rho) < 0. \quad (2.12.7)$$

Вблизи оси плазменного цилиндра используем разложение профиля альфвеновской скорости

$$v_A^2(\rho) = v_A^2(0) \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right), \quad (2.12.8)$$

которое применимо при  $\rho \ll R$ , где  $R = \sqrt{v_A^2 / |\nabla_\rho^2 v_A^2|_{\rho=0}}$  — характерный масштаб изменения  $v_A(\rho)$  вблизи оси плазменного цилиндра. Тогда, представляя в потенциале (2.12.6) локальную частоту альфвеновских колебаний, распространяющихся в волноводе, в виде

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2(0) \left(1 - \frac{\lambda}{k_z^2 R^2}\right),$$

получаем

$$V(\rho) = \frac{\bar{\rho}^2 + \lambda}{(k_z R)^2} - \frac{\epsilon^2}{\bar{\rho}^2 + \lambda} + \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{\rho}^2}, \quad (2.12.9)$$

где  $\epsilon = ik_z R$ ,  $\bar{\rho} = k_z \rho$  — безразмерная радиальная координата. Характерный вид такого потенциала показан на рис. 2.17, б. Условие существования дискретного набора собственных решений уравнения (2.12.5) с потенциалом (2.12.9) сводится к требованию

$$\epsilon > \frac{3}{4}. \quad (2.12.10)$$

Таким образом, для крупномасштабной альфвеновской волны при  $\epsilon \ll 1$  (приближение «мелкой ямы») волновод в аксиально симметричном плазменном волокне не существует. При  $\epsilon \gg 1$ , как мы увидим далее, основные волноводные моды локализованы вблизи дна потенциальной ямы и для них в потенциале можно использовать следующее приближенное представление:

$$\frac{\epsilon^2}{\bar{\rho}^2 + \lambda} \approx \frac{\epsilon^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\lambda}\right),$$

применимое при  $\Delta \ll \sqrt{\lambda}$ , где  $\Delta$  — размер локализации решения по безразмерной координате  $\bar{\rho}$ . После этого уравнение (2.12.4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 B_\rho}{\partial \bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial B_\rho}{\partial \bar{\rho}} + \left[ \frac{\epsilon^2}{\lambda} - \lambda - \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) \bar{\rho}^2 - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \right] B_\rho = 0. \quad (2.12.11)$$

Переходя к новой независимой переменной  $\zeta = (1 + \epsilon^2/\lambda^2)\bar{\rho}^2$ , получаем

$$\zeta \frac{\partial^2 B_\rho}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial B_\rho}{\partial \zeta} + \left[ D - \frac{\zeta}{4} - \frac{1}{4\zeta} \right] B_\rho = 0, \quad (2.12.12)$$

где  $D = (1/4)[(\epsilon^2/\lambda) - \lambda]/\sqrt{1 + \epsilon^2/\lambda^2}$ . Решение уравнения (2.12.12), удовлетворяющее граничному условию при  $\zeta = 0$ , имеет вид

$$B_\rho = \zeta^{1/2} \exp(-\zeta^2/2) \Phi(-(D-1), 2, \zeta), \quad (2.12.13)$$

где  $\Phi(x, y, z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. При  $\rho \rightarrow \infty$  это решение удовлетворяет граничному условию только в случае

$$D - 1 = n, \quad (2.12.14)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , когда  $\Phi(-n, 2, \zeta)$  представляет собой полином степени  $n$ , а решение (2.12.13) описывает собственные функции рассматриваемой задачи. Разрешая (2.12.14) относительно  $\lambda$ , получаем

$$\lambda_n = \epsilon - 2\sqrt{2}(n+1)$$

— собственные значения задачи, определяющие собственные частоты распространяющихся в волноводе колебаний. Характерный размер локализации собственных функций по переменной  $\zeta$  порядка единицы, что соответствует  $\Delta \sim 1$ . Таким образом, для основных гармоник колебаний ( $n \sim 1$ ) сделанные выше предположения об их локализации вблизи дна потенциальной ямы ( $\sqrt{\lambda} \approx \sqrt{\epsilon} \gg \Delta \sim 1$ ) выполняются.

Поляризацию рассматриваемых волноводных мод легко получить из выражения (2.12.2), которое представим в виде

$$\frac{B_\phi}{B_\rho} = -i \frac{u}{\left(\rho^2/R^2\right) + \lambda/k_z R}.$$

При  $\epsilon \gg 1$  для основных волноводных мод имеем  $B_\phi/B_\rho \approx -i$ , т.е. поляризация почти круговая и направление вращения вектора поляризации соответствует альфвеновским волнам. Эти же условия обеспечивают возможность эффективного усиления альфвеновских колебаний при их прохождении области ионно-циклотронной неустойчивости, расположенной вблизи геомагнитного экватора.

**2.12.2. Аксиально-симметричный плазменный волновод для кинетических альфвеновских и БМЗ-волн.** Рассмотрим возможность канализации кинетических альфвеновских и БМЗ-волн в цилиндрическом плазменном волокне, модель которого представлена в предшествующем разделе (см. [87]). Во внешней магнитосфере, где расположены рассматриваемые здесь плазменные волноводы, поперечная структура кинетических альфвеновских волн определяется дисперсионными эффектами, связанными с учетом малого конечного давления плазмы (здесь  $1 > \beta \gg m_e/m_i$ ). Используя, как и в предыдущем разделе, для описания структуры рассматриваемых колебаний компоненты возмущенного магнитного поля в цилиндрической системе координат (2.12.1), из уравнения (2.7.1) с тензором диэлектрической проницаемости (2.7.2) получаем для аксиально-симметричных мод ( $m = 0$ ) систему связанных уравнений, аналогичную (2.11.1), (2.11.2):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} B_\rho}{\partial \bar{\rho}} - (\bar{\rho}^2 - \lambda) B_\rho = -i\epsilon B_\phi, \quad (2.12.15)$$

$$\kappa^4 \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} B_\phi}{\partial \bar{\rho}} - (\bar{\rho}^2 - \lambda) B_\phi = i\epsilon B_\rho. \quad (2.12.16)$$

Здесь для первых гармоник волноводных мод, локализованных вблизи дна «потенциальной ямы», использовано квадратичное разложение альфвеновской скорости (2.12.8) и введены обозначения:  $\bar{\rho} = r\sqrt{k_z}/R$  – безразмерная радиальная координата,  $\kappa^4 = \omega^2[(3/4)\rho_i^2 + \rho_s^2]/v_A^2 = u^2\beta^{*2}$  ( $\beta^{*2} = v_s^2/v_A^2$ ),  $\epsilon = uk_z R$ ,  $u = \omega/\omega_i$ , а параметр  $\lambda$  вводится соотношением

$$\omega = k_z v_A(0)(1 + \lambda/k_z R),$$

которое определяет частоту собственных МГД-колебаний, распространяющихся в волноводе. При значениях параметров  $\kappa, \epsilon, u \ll 1$ , характерных для магнитосферы Земли, у системы уравнений (2.12.15), (2.12.16) есть два предельных случая. При  $\kappa = 0$  вновь приходим к системе уравнений (2.12.2), (2.12.3), описывающей крупномасштабный альфвеновский волновод в плазменных волокнах. При  $\epsilon = 0$  одним



из решений системы уравнений (2.12.15), (2.12.16) является крупномасштабная волноводная магнитозвуковая мода

$$B_\rho = C y_n(\bar{\rho}), \quad \lambda = \lambda_n = 4(n+1), \quad B_\phi = B_z = 0, \quad (2.12.17)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер волноводной БМЗ-моды,  $C$  — произвольная константа,  $y_n(z) = c_n z \exp(-z^2/2) L_n^1(z^2)$  — собственные функции, нормированные на единицу,  $c_n$  — нормировочный коэффициент,  $L_n^1(x)$  — обобщенные полиномы Лагерра. Другое решение в этом случае описывает мелкомасштабную альфвеновскую моду с компонентами

$$B_\rho = B_z = 0, \quad B_\phi = C y_m\left(\frac{\bar{\rho}}{\kappa}\right), \quad \lambda = \kappa^2 \lambda_m = 4(m+1)\kappa^2, \quad (2.12.18)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер волноводной альфвеновской моды. Будем искать решение системы уравнений (2.12.15), (2.12.16), используя функцию Грина, которая для уравнения (2.12.15) имеет вид

$$G(\bar{\rho}, \bar{\rho}') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i(\bar{\rho}) y_i(\bar{\rho}')}{\lambda - \lambda_i}.$$

Тогда решение (2.12.15), удовлетворяющее граничным условиям (ограниченность амплитуды на оси волновода  $\bar{\rho} = 0$  и на асимптотике  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ ), есть

$$B_\rho(\bar{\rho}) = -i\epsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i y_i(\bar{\rho})}{\lambda - \lambda_i}, \quad (2.12.19)$$

где

$$c_i = \int_0^{\infty} B_\phi(\bar{\rho}) y_i(\bar{\rho}) d\bar{\rho}. \quad (2.12.20)$$

Аналогично получаем решение уравнения (2.12.16):

$$B_\phi(\bar{\rho}) = i \frac{\epsilon}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n y_n(\bar{\rho}/\kappa)}{\lambda - \kappa^2 \lambda_n}, \quad (2.12.21)$$

где

$$c_n = -i\epsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i \alpha_{ni}}{\lambda - \lambda_i}, \quad \alpha_{ni} = \int_0^{\infty} y_n(\bar{\rho}/\kappa) y_i(\bar{\rho}) d\bar{\rho}. \quad (2.12.22)$$

Подставляя (2.12.21) в (2.12.20), получаем уравнение на коэффициенты

$$c_i = \frac{\epsilon^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ni}}{\lambda - \kappa^2 \lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j \alpha_{nj}}{\lambda - \lambda_j}. \quad (2.12.23)$$

Из этого уравнения можно получить в различных предельных случаях дисперсионные уравнения на параметр  $\lambda$ , определяющий собственные частоты волноводных мод. Анализ этих дисперсионных уравнений вполне аналогичен тому, что был сделан в разд. 2.11.

Рассмотрим, как и в разд. 2.11, решения, для которых одновременно выполняются соотношения  $|\lambda - \kappa^2 \lambda_m| \ll \kappa^2$  и  $|\lambda - \lambda_i| \ll 1$ . В этом

случае из уравнения на коэффициенты (2.12.23) получается квадратное дисперсионное уравнение, решения которого

$$\lambda \approx \frac{\lambda_i + \kappa^2 \lambda_m}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_i - \kappa^2 \lambda_m)^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{\kappa} \alpha_{mi}^2} = \kappa^2 \lambda_m + \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{\kappa} \alpha_{mi}^2}$$

определяют частоты собственных волноводных мод, распространяющихся в волноводе. Здесь обозначено  $\delta = \lambda_i - \kappa^2 \lambda_m$ . Если  $\delta \gg \gg \alpha_{mi} \epsilon / \sqrt{\kappa}$ , то для двух корней дисперсионного уравнения имеем следующие отношения амплитуд компонент магнитного поля колебаний в волноводе:

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_\phi}{B_\rho} \right|^{(1)} &\sim \frac{\epsilon \alpha_{mi}}{\kappa^{1/2} (\lambda^{(1)} - \kappa^2 \lambda_m)} \approx \frac{\epsilon \alpha_{mi}}{\kappa^{1/2} |\delta|} \ll 1, \\ \left| \frac{B_\phi}{B_\rho} \right|^{(2)} &\sim \frac{\epsilon \alpha_{mi}}{\kappa^{1/2} (\lambda^{(2)} - \kappa^2 \lambda_m)} \approx \frac{\kappa^{1/2} |\delta|}{\epsilon \alpha_{mi}} \gg 1. \end{aligned}$$

В этом случае волноводные моды достаточно далеки от внутреннего резонанса, так, что соотношение амплитуд компонент магнитного поля в них различно. Верхнее из этих соотношений описывает крупномасштабные волноводные БМЗ-моды с малой добавкой мелкомасштабной компоненты  $B_\rho$ , а нижнее — мелкомасштабные волноводные альфвеновские моды с добавкой крупномасштабной компоненты  $B_\phi$  малой амплитуды. Если  $|\lambda_i - \kappa^2 \lambda_m| \ll \alpha_{mi} \epsilon / \sqrt{\kappa}$ , то волноводные альфвеновские и БМЗ-моды находятся в состоянии внутреннего резонанса, а соотношение амплитуд компонент магнитного поля для каждого из решений становится одинаковым:

$$\left| \frac{B_\phi}{B_\rho} \right|^{(1,2)} \sim 1,$$

и определить тип волноводной моды (альфвеновские волны или БМЗ) невозможно. Механизм такого резонансного взаимодействия может оказаться эффективным для генерации мелкомасштабных альфвеновских волн в магнитосферных каналах.

**2.12.3. О возможности волноводного распространения геомагнитных пульсаций во внешней магнитосфере.** В разд. 2.12.1 и 2.12.2 были получены решения МГД-уравнений, описывающие альфвеновские колебания, распространяющиеся в цилиндрическом плазменном волноводе. При этом предполагалось, что характеристики такого волновода однородны в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля. Однако в магнитосфере свойства плазменных волокон, которые могут служить волноводами для МГД-волн, меняются в продольном направлении. Рассмотрим возможность распространения волн в этих плазменных волокнах, когда параметры волны успевают адиабатически подстраиваться вслед за меняющимися характеристиками плазмы и магнитного поля.

Это означает, что в каждый данный момент времени альфвеновские волны будут иметь такую пространственную структуру, которая определяется локальными характеристиками волноводного канала. Чтобы оценить волноводные свойства магнитосферных каналов, зададим зависимость параметров плазменного волокна от двух координат: радиальной и продольной. В [78] и [88] предложен следующий механизм образования и дальнейшей эволюции плазменного волокна. Во время магнитных бурь от вечернего выступа плазмосферы отслаиваются плазменные волокна, которые затем сносятся к дневной магнитопаузе системой магнитосферной конвекции. Предположим, что в момент отрыва плазменного волокна от плазмосферы его продольные характеристики (распределение плотности и напряженность геомагнитного поля) совпадают с соответствующими характеристиками плазмопаузы. Для магнитного поля используем дипольное приближение

$$B(\theta) = B_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 P(\theta), \quad (2.12.24)$$

где  $a$  — экваториальный радиус силовой линии,  $P(\theta) = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta} / \cos^6 \theta$ ,  $\theta$  — широта, отсчитываемая от геомагнитного экватора, а индекс 0 соответствует параметрам на плазмопаузе в экваториальной плоскости. Профиль плотности будем описывать функцией  $n(\theta) = n(0)P(\theta)$ , а для текущего волнового вектора альфвеновских волн примем  $k_z(\theta) = \omega/v_A(\theta)$ . Поскольку типичное время изменения концентрации плазмы на рассматриваемых магнитных оболочках во внешней магнитосфере достаточно велико (порядка суток, см. [89, с. 287]) по сравнению с периодами геомагнитных пульсаций, будем полагать, что концентрация меняется обратно пропорционально объему плазменного волокна.

Параметром, характеризующим волноводные свойства плазменного волокна, является  $\epsilon = uk_z R$ , который можно записать в виде

$$\epsilon(a, \theta) = \frac{\omega^2 R}{\omega_i v_A} = \frac{m_i c}{e B_0^2} \omega^2 R \sqrt{4\pi n m_i}. \quad (2.12.25)$$

Из условия сохранения полного числа частиц в плазменном волокне имеем

$$N \sim \pi a_0 R_0^2 n_0 = \pi a R^2 n,$$

откуда

$$n^{1/2} R = n_0^{1/2} R_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (2.12.26)$$

Подставляя (2.12.26) в (2.12.25), получаем

$$\epsilon(a, \theta) = \epsilon_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{11/2} Q(\theta), \quad (2.12.27)$$

где  $\epsilon_0$  — экваториальное значение параметра  $\epsilon$  на плазмопаузе вблизи вечернего выступа, а функция  $Q(\theta) = \cos^9 \theta / (1 + 3 \sin^2 \theta)^{3/4}$  описывает

зависимость  $\epsilon$  от широты  $\theta$ . Как было показано в разд. 2.12.1, крупномасштабный альфвеновский волновод существует в плазменном волокне только при выполнении условия (2.12.10). Если это условие выполняется при  $\theta = 0$ , то вблизи экваториальной плоскости в магнитосферном канале существуют условия для канализации крупномасштабных альфвеновских волн. Однако, как следует из (2.12.27), при удалении от экватора величина  $\epsilon$  быстро уменьшается с увеличением  $\theta$ . При этом на некоторой широте  $\theta = \theta_{cr}$  условие (2.12.10) нарушается и волновод исчезает.

Оценим величину  $\theta_{cr}$  для магнитосферных каналов, расположенных в различных областях магнитосферы. Зададим следующие величины параметров среды на плазмопаузе:  $n_0 = 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 = 200 \text{ нТл}$ ,  $R_0 = R_E/2$ . Для геомагнитных пульсаций в частотном диапазоне Pc1 с  $\omega \sim 0,1 \text{ рад/с}$  в области отрыва плазменного волокна от вечернего выступа плазмосферы ( $a = 5,5R_E$ ), получаем  $\epsilon_0 \approx 5$ , что соответствует  $\theta_{cr} \approx 30^\circ$ . Для наиболее удаленных от Земли каналов ( $a = 10R_E$ ) имеем  $\epsilon(a, 0) \approx 200$  и  $\theta_{cr} \approx 50^\circ$ . Таким образом видно, что угловые размеры областей существования волновода превышают размер области, в которой действует механизм ионно-циклотронной неустойчивости ( $\Delta\theta \approx 20^\circ$ ); (см. [90]), что позволяет альфвеновским волнам пробегать всю область неустойчивости в режиме квазипродольного распространения (условие  $\epsilon > 1$  соответствует  $k_\perp < \sqrt{u} k_\parallel$ ) и эффективно усиливаться.

Теперь оценим критическую частоту, при которой в плазменном волокне в области его отрыва от плазмосферы существует крупномасштабный альфвеновский волновод. Критическая частота, при которой исчезают волноводные свойства плазменного волокна, находится из условия  $\epsilon = 3/4$  при  $\theta = 0$ . При выбранных выше параметрах критическая частота лежит в диапазоне от 0,1 Гц (при  $a = 5,5R_E$ ) до 0,03 Гц (при  $a = 10R_E$ ), т.е. охватывает диапазон геомагнитных пульсаций от Pc1 до Pc3. Если высокоширотные локализованные геомагнитные пульсации в частотном диапазоне Pc1 изучены достаточно хорошо [81, 91], то локализованные пульсации в диапазоне Pc3, которые обнаружены в [92], исследованы сравнительно слабо.

Условием существования мелкомасштабного альфвеновского волновода в магнитосферных дактах является требование  $\beta > m_e/m_i$ . Используя для магнитного поля дипольную модель, а для распределения концентрации плазмы функцию  $n(\theta) = n(0)P(\theta)$ , представим параметр  $\beta$  следующим образом:

$$\beta = 8\pi n(0)(T_e + T_i)a^6/B_0^2 P^{3/2}(\theta).$$

Здесь  $T_e, T_i$  — температуры ионов и электронов фоновой плазмы,  $B_0$  — экваториальная напряженность геомагнитного поля на Земле. Зададим следующие величины параметров:  $m_e/m_i = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $B_0 = 0,32 \text{ Гс}$ ,  $T_e = T_i = 5 \text{ эв} = 8 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ ,  $n(0) = 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Тогда для критической широты  $\theta_{cr}$ , при которой волноводные свойства плазменного волокна

исчезают, имеем:  $\theta_{cr} \approx 60^\circ$  при  $a = 5,5R_E$  и  $\theta_{cr} \approx 69^\circ$  при  $a = 10R_E$ . Ширина пересечения силовой линии с ионосферой определяется как

$$\theta_i = \arccos \sqrt{r_i/a},$$

где  $r_i$  — радиус ионосферы. При  $a = 5,5R_E$  имеем  $\theta_i = 62^\circ$ , а при  $a = 10R_E$  имеем  $\theta_i = 68^\circ$ . Таким образом, можно считать, что мелкомасштабный альфвеновский волновод существует в магнитосферных каналах практически по всей их длине.

### 2.13. Прохождение БМЗ-волн через тангенциальный разрыв

В предшествующих разделах мы рассматривали МГД-колебания в моделях среды с неподвижной плазмой. Однако в реальной магнитосфере плазма находится в непрерывном движении, что влияет на свойства распространяющихся в ней волн. Наиболее существенно такое влияние в областях с резким изменением скорости движения плазмы — в сдвиговых течениях. Наиболее известным из них является течение плазмы в окрестности магнитопаузы, которая представляет собой достаточно резкую границу между солнечным ветром и магнитосферой. Влияние сдвигового течения на МГД-волны в магнитосфере может проявляться следующим образом.

Волны из солнечного ветра (как правило — это БМЗ-волны) могут проникать через магнитопаузу внутрь магнитосферы. При этом они частично отражаются от магнитопаузы. Коэффициент отражения зависит от пространственной структуры волны. В приближении лучевой теории, в частности в оптике, обычно говорят об угле падения–отражения волны от границы раздела двух сред, который определяется структурой волнового поля.

Другим эффектом, связанным со сдвиговыми течениями, является неустойчивость границы раздела движущейся и неподвижной сред относительно колебаний, которые могут в них возбуждаться. Такая неустойчивость называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Она может возбуждать как поверхностные волны, когда обе разделяемые сдвиговым течением среды непрозрачны для раскачиваемых на границе раздела колебаний, так и волны, убегające от границы раздела, когда одна или обе среды прозрачны.

Предположение о том, что МГД-колебания солнечного ветра могут играть заметную роль в энергетике магнитосферы Земли, было высказано в работе [93]. Вслед за этой появился ряд теоретических работ, посвященных исследованию проникновения МГД-волн из солнечного ветра в магнитосферу. Отметим работу [94], где была построена теория проникновения магнитозвуковых волн через магнитопаузу, рассматриваемую как тангенциальный разрыв параметров среды. В последующих работах [95] и [96] был оценен поток энергии,

переносимый магнитозвуковыми волнами из солнечного ветра в магнитосферу. По этим оценкам оказалось, что внутрь дневной части магнитосферы проникает не более 1–2% потока энергии колебаний солнечного ветра, а результирующий поток составляет  $10^9$  Вт. Однако, как было показано в [97], значительно больший поток волновой энергии проникает в геомагнитный хвост.

В данном разделе мы рассмотрим задачу о прохождении БМЗ-волн через магнитопаузу, которую смоделируем тангенциальным разрывом параметров среды.

### 2.13.1. Модель среды и сшивка решений МГД-уравнений.

Выберем плоскоструйную модель среды (см. рис. 2.18), в которой граница, имеющая вид тангенциального разрыва ( $x = 0$ ), разделяет солнечный ветер (область  $I$ ,  $x < 0$ ) и магнитосферу (область  $II$ ,  $x > 0$ ). Декартову систему координат ( $x, y, z$ ) выберем так, что ось  $x$  направлена нормально к границе раздела внутрь магнитосферы, ось  $z$  — вдоль фонового магнитного поля, а ось  $y$  дополняет систему координат до правосторонней. В дальнейших расчетах верхний индекс  $i = I, II$  в обозначениях параметров среды указывает на номер области, представленной на рис. 2.18.

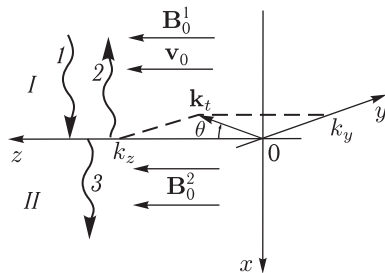


Рис. 2.18. Модель среды и система координат. Римскими цифрами пронумерованы области:  $I$  — солнечный ветер,  $II$  — магнитосфера. Пронумерованы БМЗ-волны:  $1$  — падающая на магнитопаузу,  $2$  — отраженная от магнитопаузы,  $3$  — прошедшая в магнитосферу

Будем считать, что параметры плазмы и магнитного поля однородны в каждой из областей  $I$ – $II$  и меняют свои значения скачком при переходе через границу  $x = 0$ . Будем считать, что векторы скорости фоновой плазмы  $\mathbf{v}_0^i$  и магнитного поля  $\mathbf{B}_0^i$  направлены вдоль оси  $z$ . Внутри магнитосферы ( $i = II$ ) плазма покоится:  $v^{II} = 0$ , а в области  $I$  движется со скоростью  $v^I = v_0$ .

Учитывая однородность невозмущенных параметров среды, будем искать решение системы линеаризованных МГД-уравнений (1.0.5) для произвольного возмущения в виде разложения по фурье-гармоникам:

$$\Phi = \tilde{\Phi} \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}_t \mathbf{r}_t + ik_x x],$$

где  $\tilde{\Phi}$  — амплитуда любого из возмущенных параметров среды,  $\omega$  — частота колебания,  $\mathbf{k}_t = (k_y, k_z)$  — тангенциальная, а  $k_x$  — нормальная

составляющие волнового вектора. Дисперсионное уравнение для магнитозвуковых волн в движущейся среде имеет вид

$$(\bar{\omega}^{(i)})^4 - (\bar{\omega}^{(i)})^2 k^2 (v_A^{(i)2} + v_s^{(i)2}) + k^2 k_z^2 v_A^{(i)2} v_s^{(i)2} = 0, \quad (2.13.1)$$

где  $\bar{\omega}^{(i)} = \omega - k_z v^{(i)}$  — частота колебаний с учетом доплеровского сдвига,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $v_s^{(i)} = \sqrt{\gamma P_0^{(i)} / \rho_0^{(i)}}$  — скорость звука, а  $v_A^{(i)} = B_0^{(i)} / \sqrt{4\pi \rho_0^{(i)}}$  — скорость Альфвена в области  $i$ .

Рассмотрим следующую задачу. Из солнечного ветра на магнитопаузу падает магнитозвуковая волна, которая частично отражается, и частично проникает внутрь магнитосферы (см. рис. 2.18). Поток волновой энергии, проникающий в магнитосферу из солнечного ветра, определяется величиной нормальной компоненты волнового вектора  $k_x$  (см. следующий раздел). Поэтому особый интерес представляет анализ поведения функции  $k_x^2(\mathbf{k}_t, \bar{\omega}^{(i)})$ .

Поток энергии переносится через магнитопаузу только теми волнами, у которых  $k_x^2 > 0$ . Определим набор параметров волн, для которых это условие выполняется. Можно показать, что ширина зон прозрачности (диапазона параметров, определяемых условием  $k_x^2 > 0$ ) для быстрого магнитного звука много больше, чем у медленного звука. Поэтому в дальнейшем анализе мы пренебрегаем вкладом медленных магнитозвуковых волн.

Наиболее простое поведение функция  $k_x^2(\mathbf{k}_t, \bar{\omega}^{(i)})$  имеет в неподвижной среде — магнитосфере. Будем описывать вектор  $\mathbf{k}_t$  в полярной системе координат  $\mathbf{k}_t = (k_t, \theta)$ , где  $k_t = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$  — модуль тангенциального волнового вектора,  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси  $k_z$  (см. рис. 2.18). Тогда из (2.13.1) получаем

$$k_x^2 = -k_t^2 + \frac{\omega^4}{(\omega^2 - k_t^2 c_s^2 \cos^2 \theta) v_f^2}, \quad (2.13.2)$$

где для простоты опущены верхние индексы, указывающие на параметры магнитосферы, и обозначено:  $v_f = \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$  — скорость распространения БМЗ-волн,  $c_s = v_A v_s / v_f$  — скорость распространения ММЗ-волн. Из (2.13.2) видно, что  $|k_x^2| = \infty$  при  $k_t = |\omega / c_s \cos \theta|$ . Кроме того, при фиксированном  $\theta$  имеются две точки:

$$\tilde{k}_t^{(1,2)} = \frac{\omega}{\sqrt{2} c_s |\cos \theta|} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{c_s^2}{v_f^2} \cos^2 \theta} \right]^{1/2}, \quad (2.13.3)$$

где  $k_x^2 = 0$ . Знак «-» в этом выражении соответствует верхнему индексу (1) у  $\tilde{k}_t^{(1,2)}$ , а знак «+» — индексу (2). Зависимость  $k_x^2(k_t)$  в магнитосфере представлена на рис. 2.19, а. Видно, что существует одна зона прозрачности для быстрых магнитозвуковых волн  $0 \leq k_t \leq \tilde{k}_t^{(1)}$ .

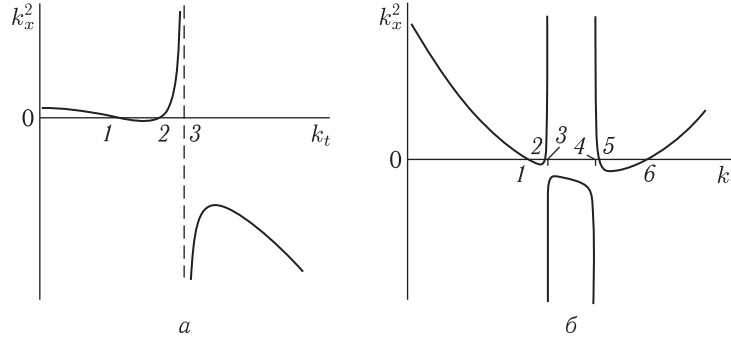


Рис. 2.19. Зависимость функции  $k_x^2$  от  $k_t$  при фиксированных  $\omega$  и  $\theta$ . а —  $k_x^2(k_t)$  в магнитосфере, пронумерованы точки: 1 —  $\tilde{k}_t^{(1)}$ , 2 —  $\tilde{k}_t^{(2)}$ , 3 —  $k_t = |\omega/c_s \cos \theta|$ . б —  $k_x^2(k_t)$  в солнечном ветре, пронумерованы точки: 1 —  $k_t^{(1)}$ , 2 —  $k_t^{(3)}$ , 3 —  $\bar{k}_t^{(1)}$ , 4 —  $\bar{k}_t^{(2)}$ , 5 —  $k_t^{(4)}$ , 6 —  $k_t^{(2)}$

В движущейся среде структура  $k_x^2$  более сложная. В уравнении (2.13.1) для движущейся среды есть две сингулярные точки:

$$\bar{k}_t^{(1,2)} = \frac{\omega}{(v_0 \pm c_s) |\cos \theta|},$$

где  $|k_x^2| = \infty$ . Верхний индекс (1) у  $\bar{k}_t^{(1,2)}$  соответствует знаку плюс, а индекс (2) — знаку минус в знаменателе этого выражения. Кроме того в (2.13.1) есть четыре точки:

$$k_t^{(j)} = \frac{\omega \tilde{k}_t^{(1,2)}}{\bar{k}_t^{(1,2)} v_0 \cos \theta \pm \omega}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.13.4)$$

где  $k_x^2 = 0$ . Нумерация корней в (2.13.4) следующая. Верхний индекс  $j = 1$  соответствует  $\tilde{k}_t^{(2)}$  в числителе и знаку «+» в знаменателе (2.13.4),  $j = 2$  —  $\tilde{k}_t^{(2)}$  в числителе и знаку «-» в знаменателе,  $j = 3$  —  $\tilde{k}_t^{(1)}$  и знаку «+»,  $j = 4$  —  $\tilde{k}_t^{(1)}$  и «-». Здесь  $\tilde{k}_t^{(1,2)}$  определяется выражением, аналогичным (2.13.3), с той разницей, что  $v_f$  и  $c_s$  соответствуют параметрам солнечного ветра. При  $k_t = 0$  имеем  $k_x^2 = \omega^2/v_f^2$ , а при  $k_t \rightarrow \infty$

$$k_x^2 \cong k_t^2 \frac{c_s^2 - v_0^2}{(1 - v_0^2 \cos^2 \theta / v_f^2) v_0^2 - c_s^2}.$$

Поведение  $k_x^2$  при  $k_t \rightarrow \infty$  зависит от направления  $\mathbf{k}_t$ , т.е. от величины угла  $\theta$ . При  $|\cos \theta| > |\cos \theta^*| \equiv (v_f/v_0) \sqrt{1 - (c_s/v_0)^2}$  имеем  $k_x^2 > 0$  (считаем  $c_s < v_0$ ), и  $k_x^2 < 0$  при  $|\cos \theta| < |\cos \theta^*|$ . Зависимость  $k_x^2(k_t)$  в солнечном ветре представлена на рис. 2.19, б.

Имеются две зоны прозрачности для быстрых магнитозвуковых волн  $0 \leq k_t \leq k_t^{(1)}$  и  $k_t^{(2)} \leq k_t$ , когда  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ . При  $\theta^* \leq \theta \leq \pi - \theta^*$  вторая зона прозрачности для быстрых магнитозвуковых волн исчезает.



При этом зона прозрачности соответствует интервалу  $0 \leq k_t \leq k_t^{(1)}$ . Как и в магнитосфере, ширина зон прозрачности для быстрых магнитозвуковых волн много больше ширины зон прозрачности для медленных магнитозвуковых волн. Если  $\pi \geq \theta \geq \pi - \theta^*$ , то  $k_x^2 > 0$  при  $k_t \geq 0$  и быстрые магнитозвуковые волны могут распространяться во всем диапазоне  $0 \leq k_t < \infty$ .

Проведем теперь сшивку решений, описывающих БМЗ-волны в солнечном ветре и в магнитосфере. При падении волны на магнитопаузу она меняет свою форму, определяемую структурой падающей и отраженной волн. Условия сшивки на возмущенной границе имеют вид (см. [94]):

$$\left\{ P + \frac{B_0^{(i)} B_z}{4\pi} \right\}_{\pm} = 0, \quad (2.13.5)$$

$$\left( \tilde{B}_x + B_0^{(i)} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_{\pm} = 0, \quad (2.13.6)$$

$$\left( \frac{d\xi}{dt} - v_x \right)_{\pm} = 0, \quad (2.13.7)$$

где фигурные скобки обозначают сохранение величины стоящего в них выражения при переходе через возмущенную границу (при скачке стоящих внутри них величин), а круглые скобки соответствуют равенству нулю стоящего внутри них выражения с каждой из сторон границы (обозначенных здесь нижними индексами  $\pm$ ). Здесь  $P$  — возмущенное газокINETическое давление плазмы,  $B_z$  — продольная (вдоль невозмущенного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ) компонента магнитного поля колебаний,  $\xi$  — нормальная компонента смещения плазмы в волне ( $v_x = d\xi/dt$  — нормальная компонента возмущенной скорости). Уравнения (2.13.5) и (2.13.6) получаются прямо из линеаризованных МГД-уравнений (1.0.5) при их интегрировании поперек возмущенной границы по бесконечно малому интервалу. Уравнение (2.13.7) определяется предположением о том, что при переходе через границу сохраняется тангенциальная составляющая волнового вектора, т. е. колебание границы можно представить в виде

$$\xi|_{x=0} = \eta \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}_t \mathbf{r}_t - \mathbf{i}\omega t), \quad (2.13.8)$$

где  $\eta$  — амплитуда колебания границы. Используя (2.13.8) и исключая из уравнений (2.13.6), (2.13.7) амплитуду  $\eta$ , получаем из условий сшивки на границе

$$\omega(v_{x1} + v_{x2}) = \bar{\omega}v_{x3}, \quad (2.13.9)$$

$$B_0^{\text{II}}(B_{x1} + B_{x2}) = B_0^{\text{I}}B_{x3}, \quad (2.13.10)$$

$$P_1 + P_2 + B_0^{\text{I}} \frac{B_{z1} + B_{z2}}{4\pi} = P_3 + B_0^{\text{II}} \frac{B_{z3}}{4\pi}, \quad (2.13.11)$$

где нижние индексы 1, 2, 3 соответствуют падающей, отраженной и прошедшей БМЗ-волнам (см. рис. 2.18).

Из системы возмущенных уравнений идеальной МГД (1.0.5) можно получить уравнение

$$k_x \left( P + B_0 \frac{B_z}{4\pi} \right) = \frac{\bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^2}{\bar{\omega}} \rho_0 v_x,$$

при подстановке которого в (2.13.11) получаем замкнутую систему уравнений, из которой имеем следующие соотношения между компонентами скоростей падающей, отраженной и прошедшей волн (см. [94]):

$$v_{x2} = R v_{x1}, \quad v_{x3} = T v_{x1}, \quad (2.13.12)$$

где сделаны обозначения:

$$R = \frac{1 - Z}{1 + Z}, \quad (2.13.13)$$

$$T = \frac{\omega}{\bar{\omega}} \frac{2}{1 + Z} \quad (2.13.14)$$

— коэффициенты отражения и прохождения монохроматической БМЗ-волны через магнитопаузу, моделируемую тангенциальным разрывом

$$Z = \frac{\rho_0^{II} k_x^I \omega^2 - k_z^2 v_A^{II2}}{\rho_0^I k_x^{II} \bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^I{}^2}.$$

При  $B_0 = 0$  и  $v_0 = 0$  из выражений (2.13.13) и (2.13.14) получаются коэффициенты отражения и прохождения звука через плоский переходной слой [98].

**2.13.2. Поток энергии, переносимой БМЗ-волнами через магнитопаузу.** Плотность потока энергии является квадратичной функцией амплитуды волны. Используем для его нормальной компоненты выражение (см. [94, 99])

$$\tilde{f}_x = \rho_0 \frac{\omega(\bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^2)}{\bar{\omega}^2 k_x} |v_x|^2 = \frac{\omega \bar{\omega}^4}{k^4} \frac{k_x}{\bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^2} \frac{|\rho|^2}{\rho_0}, \quad (2.13.15)$$

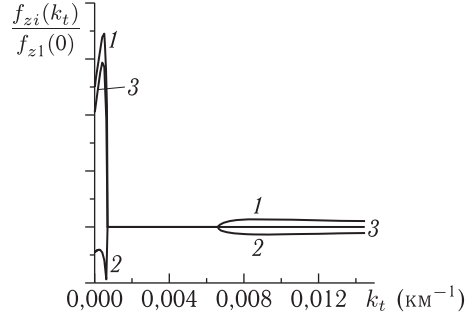
где  $\rho$  — возмущенная плотность плазмы. Используя связь амплитуд падающей, отраженной и прошедшей БМЗ-волн (2.13.12), можно показать, что при падении монохроматической БМЗ-волны на тангенциальный разрыв имеет место следующий закон сохранения полного потока энергии:

$$\tilde{f}_{x3} = \tilde{f}_{x1} + \tilde{f}_{x2},$$

где нижние индексы 1,2,3 нумеруют падающую, отраженную и прошедшую волны.

Характерная зависимость плотностей потока энергии падающей, отраженной и прошедшей БМЗ-волн  $\tilde{f}_{zi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) от  $k_t$ , нормированных на плотность потока энергии падающей волны при  $\theta = 0$ , представлена на рис. 2.20. Имеются две зоны прозрачности для быстрого магнитного звука в солнечном ветре и одна зона прозрачности в магнитосфере. Видно, что в первой зоне прозрачности солнечного ветра внутрь магнитосферы проникает около 75 % потока энергии падающих волн.

Рис. 2.20. Характерный вид зависимостей относительных плотностей потока энергии монохроматических БМЗ-волн в солнечном ветре и в магнитосфере от  $k_t$  в секторе  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ . Пронумерованы плотности потоков энергии: 1 — падающей на магнитопазу БМЗ-волны; 2 — волны, отраженной от магнитопазу; 3 — волны, прошедшей в магнитосферу



Для волн во второй области магнитосфера оказывается непрозрачной, и они полностью отражаются.

Выражение (2.13.15) записано для плотности потока энергии одной гармоники волны с определенной частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_t$ . Чтобы найти полную плотность энергии, необходимо провести обратное фурье-преобразование (2.13.15) по всему спектру частот и волновых векторов рассматриваемых колебаний. Предположим, что спектр колебаний симметричен относительно изменения знака  $\omega$ . Тогда обратное фурье-преобразование имеет вид

$$f_x = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty \tilde{f}_x(k_t, \theta, \omega) k_t dk_t. \quad (2.13.16)$$

Как следует из (2.13.15), при фиксированном значении  $\rho^2$  интеграл (2.13.16) оказывается расходящимся. Чтобы избежать этого, следует определить спектр  $\rho^2$ , обеспечивающий сходимость этого интеграла. Модель спектральной функции, основанная на данных спутниковых наблюдений и удовлетворяющая указанным условиям, представлена в приложении В и имеет вид

$$\rho^2 = C\omega^{-\alpha} k_t^{-2\beta}. \quad (2.13.17)$$

Здесь  $C = \tilde{C}\bar{\rho}^2\Phi(\mathbf{k}_t, \omega)$  — амплитуда колебаний, определенная через их среднюю амплитуду  $\bar{\rho}^2$ ,  $\Phi(\mathbf{k}_t, \omega)$  — функция фильтра, учитывающая пороги обрезания спектра и наличие «зон прозрачности» в магнитосфере и в солнечном ветре,  $\tilde{C}$  — нормирующий множитель, а показатели степени  $\alpha \approx \beta \approx 5/3$  соответствуют колмогоровскому спектру развитых турбулентных колебаний.

Проинтегрируем (2.13.16) численно, используя для  $\rho^2$  модельное выражение (2.13.17). Для этого необходимо задать параметры среды. Для солнечного ветра (область I) используем параметры, усредненные по многим наблюдениям, а для магнитосферы (область II) выберем параметры, сбалансированные с параметрами солнечного ветра в соответствии с условием сохранения полного давления (2.6.1). Соответствующие наборы параметров представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Усредненные параметры плазмы и магнитного поля в солнечном ветре (*I*) и в магнитосфере (*II*), удовлетворяющие условию сохранения полного давления (2.6.1)

Область	$v^{(i)}$	$B^{(i)}$	$n^{(i)}$	$T^{(i)}$
( <i>i</i> )	(км/с)	(нТ)	(см <sup>-3</sup> )	(К°) × 10 <sup>-5</sup>
<i>I</i>	400	5	5	50.8
<i>II</i>	0	30	1	2

Отметим, что температура плазмы солнечного ветра в данной модели оказывается несколько выше наблюдаемой. Это связано с тем, что температура солнечного ветра выбирается исходя из условия баланса давлений (2.6.1) при заданной температуре магнитосферной плазмы. Отсутствие в нашей модели среды динамического давления потока солнечного ветра на магнитопаузу приводит к завышению температуры плазмы солнечного ветра, что, однако, мало сказывается на конечных численных оценках.

Кроме равновесных параметров необходимо задать среднюю амплитуду магнитозвуковых колебаний плотности плазмы в солнечном ветре —  $\bar{\rho}$ . По спутниковым наблюдениям амплитуда турбулентных колебаний концентрации плазмы солнечного ветра составляет 20–50 % от ее среднего значения. Выберем для средней амплитуды колебаний в падающих на магнитосферу БМЗ-волнах  $\bar{n}_1 = 1 \text{ см}^{-3}$ , что составляет 20 % от средней концентрации плазмы солнечного ветра  $n^I = 5 \text{ см}^{-3}$ . Среднее значение амплитуды плотности колебаний определяется как  $\bar{\rho}_1 = \bar{n}_1 m_p$ , где  $m_p$  — масса протона.

В различных моделях взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли рассматриваются процессы, связанные с изменением длины геомагнитного хвоста. В [100] изменение магнитного потока в течение подготовительной фазы суббури в области полярной шапки определяется через изменение длины замкнутой части геомагнитного хвоста от  $30R_E$  до  $\sim 200R_E$ , связанное с накоплением энергии магнитного поля. Представленная выше модель среды не учитывает конечные размеры магнитосферы. Для того, чтобы как-то учесть их, определим «геоэффективный» поток энергии колебаний так, что при интегрировании в (2.13.16) по  $k_t$  в качестве нижнего предела используем величину  $\hat{k}_t = 2\pi/l$ , где  $l$  — характерный максимальный размер хвоста магнитосферы. Конечно, это следует делать только в случае, если  $l$  меньше характерного масштаба корреляции параметров колебаний солнечного ветра  $l \leq \hat{l}$  (см. приложение В).

Теперь можно оценить общую энергию, поступившую в магнитосферу с «геоэффективным» потоком магнитозвуковых волн за время порядка длительности подготовительной фазы суббури —  $\Delta t \approx 3 \times 10^3 \text{ с}$ . Будем рассматривать геомагнитный хвост в виде цилиндра радиуса  $R = 16R_E$  и длиной  $l$ . Необходимо задать модель изменения длины гео-

магнитного хвоста в период подготовительной фазы от  $l = l_{\min} \approx 30R_E$  до  $l = l_{\max} \approx 150R_E$ . Примем следующую модель изменения длины хвоста:

$$l = l_{\min} + \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^\gamma \Delta l, \quad (2.13.18)$$

где  $\Delta l = l_{\max} - l_{\min}$ . Общая энергия, поступившая в магнитосферу за время  $\Delta t$  с «геоэффективным» потоком БМЗ-волн:

$$W = 2\pi R \int_0^{\Delta t} f_{x3}(l(t))l(t)dt = 2\pi R \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_{x3}(l) \left(\frac{dl}{dt}\right)^{-1} l dl.$$

Из (2.13.18) имеем

$$\frac{dl}{dt} = \gamma \left(\frac{l - l_{\min}}{\Delta l}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Существенную роль в этой оценке играет показатель интенсивности роста длины геомагнитного хвоста  $\gamma$ . В различных суббуревых событиях могут реализовываться разные сценарии роста длины замкнутой части геомагнитного хвоста, как медленные ( $\gamma < 1$ ), так и быстрые ( $\gamma > 1$ ). На рис. 2.21 представлена зависимость полной энергии, поступившей в магнитосферу с потоком БМЗ-волн за характерное время подготовительной фазы суббури  $\Delta t \approx 3 \cdot 10^3$  с от величины  $\gamma$ . При  $\gamma = 0,5$  имеем  $W \approx 6 \cdot 10^{15}$  Дж, а при  $\gamma = 5$  —  $W \approx 10^{15}$  Дж, что вполне сопоставимо с энергией, выделяющейся в магнитосфере в течение единичной суббури средней интенсивности ( $W \sim 10^{15}$  Дж).

Слабая эффективность переноса волновой энергии через дневную магнитопаузу, что было фактически показано в [95, 96], обусловлена дозвуковым характером ее обтекания и относительно малыми размерами по сравнению с геомагнитным хвостом. Величина потока волновой энергии через поверхность геомагнитного хвоста гораздо больше из-за высокой проницаемости ночной магнитопаузы вследствие сверхзвукового характера ее обтекания и значительно большей площади поникновения волн.

Однако значительный поток БМЗ-волн, проникающих в магнитосферу, еще не означает, что они могут вносить существенный вклад в ее энергетический баланс. Для того, чтобы этот поток был геоэффективным, необходимо как-то передать его энергию магнитосферной

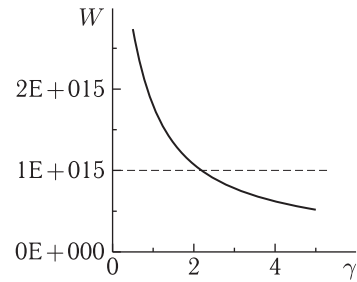


Рис. 2.21. Зависимость полной энергии  $W$ , поступившей в магнитосферу с «геоэффективным» потоком БМЗ-волн за время  $\Delta t \approx 3 \cdot 10^3$  с от показателя интенсивности роста хвоста  $\gamma$  в модельном уравнении (2.13.18)

плазме. Механизмом такой передачи может служить резонансное взаимодействие МГД-волн в неоднородной магнитосферной плазме. В следующем разделе мы рассмотрим такой механизм, связанный с раскачкой ММЗ-волн на резонансных магнитных оболочках.

#### **2.14. Перенос импульса из солнечного ветра в магнитосферу потоком БМЗ-волн. Прохождение БМЗ-волн через плавный переходной слой**

Как показано в разд. 2.13, в геомагнитный хвост из солнечного ветра может проникать достаточно мощный поток БМЗ-волн, способный оказывать влияние на магнитосферные процессы. Однако это только потенциальная возможность. Оказалось, что нагрев магнитосферной плазмы такими волнами оказывается мало эффективным [101]. Тем не менее, имеется магнитосферный процесс, в котором волны, проникающие из солнечного ветра, могут играть существенную роль. Речь идет о системе магнитосферной плазменной конвекции.

Структура магнитосферной конвекции существенно зависит от ориентации межпланетного магнитного поля (ММП) [102]. В магнитосфере Земли наиболее интенсивная конвекция наблюдается в периоды, когда ММП имеет южную компоненту [103]. При этом движение плазмы в областях, прилегающих к границе магнитосферы, направлено в геомагнитный хвост, а во внутренних областях, включающих плазменный слой, оно направлено к Земле. Электрическое поле магнитосферной конвекции проникает вдоль силовых линий геомагнитного поля в ионосферу, где проявляется в виде конвективных ячеек движения плазмы в полярной шапке и в авроральной зоне [104]. Магнитосферная конвекция обязана своим существованием потоку солнечного ветра, импульс которого частично переносится в магнитосферную плазму.

Для объяснения механизма переноса импульса были предложены две основные концепции, которые используются до настоящего времени. Первая из них была предложена Данжи [19]. Согласно ей плазма солнечного ветра поступает во внешние слои магнитосферы при пересоединении силовых линий геомагнитного поля и ММП в лобовой области магнитопаузы, которые затем переносятся солнечным ветром в геомагнитный хвост. Это движение формирует ветвь магнитосферной конвекции «в хвост». В дальней области хвоста происходит обратное пересоединение силовых линий геомагнитного поля и ММП, которые здесь вновь становятся замкнутыми. В плазменном слое геомагнитного хвоста движение плазмы «к Земле» определяется дрейфовым механизмом, связанным с электрическим полем «утро-вечер», возникающим при обтекании магнитосферы потоком плазмы солнечного ветра. Эта модель магнитосферной конвекции, с формированием двух конвекционных ячеек, хорошо согласуется с поведением компонент ММП. Конвекция в магнитосфере усиливается при появлении южной

(так называемой  $B_2$ -) компоненты ММП, которая и создает условия для эффективного процесса пересоединения.

Однако, эта модель не может объяснить все особенности магнитосферной конвекции. Например, она не объясняет магнитосферную конвекцию в отсутствие южной компоненты ММП. В периоды, когда ММП в течение длительного времени имеет северную компоненту, в магнитосфере формируется новый тип конвективного движения — с тремя или четырьмя конвективными ячейками [105, 106]. Две из них представляют собой те же ячейки, что и при южной компоненте ММП, с затухающим конвективным движением. На их фоне формируются 1–2 новых ячейки в области открытых магнитных силовых линий (на геомагнитных широтах выше  $75^\circ$ ). При этом направление движения плазмы в них противоположно тому, что происходит в двух первых ячейках (так называемая обратная конвекция). Для объяснения этого явления в рамках концепции Данжи используется представление о высокоширотном пересоединении геомагнитного поля и ММП в каспе магнитосферы [107]. Однако остается непонятным процесс замыкания конвективных ячеек в области открытых магнитных силовых линий потоком плазмы, направленным к Земле.

В работе [108] была предложена другая концепция магнитосферной конвекции. В ней было выдвинуто предположение о переносе момента движения из солнечного ветра в магнитосферу через механизм, сходный с вязким взаимодействием в жидкостях со сдвиговыми течениями. Наличие такого взаимодействия в бесстолкновительной плазме магнитосферы и солнечного ветра является допущением, которое обосновывается турбулентным характером обтекания магнитосферы [109]. Если принять это допущение, то, в отличие от механизма Данжи, условия для такого квазивязкого взаимодействия реализуются в магнитосфере всегда. При этом эффективность переноса момента движения связана в основном со скоростью солнечного ветра.

Эта модель также не может претендовать на полное описание магнитосферной конвекции. Например, она не объясняет зависимость режима магнитосферной конвекции от ориентации ММП. Также в ней не объясняется механизм поворота направления скорости конвекции внутри геомагнитного хвоста (ветви конвекции «в хвост» и «к Земле» рассматриваются отдельно). Также остается без ответа вопрос об указанных выше особенностях конвекции при северной компоненте ММП. Однако перенос импульса из солнечного ветра в магнитосферу может осуществляться и рассмотренным выше потоком БМЗ-волн. В разд. 2.13 мы рассмотрели процесс проникновения БМЗ-волн из солнечного ветра в магнитосферу в простейшей модели среды в виде двух однородных полупространств, разделенных переходным слоем.

Реальная магнитосфера сильно неоднородна, а сечение геомагнитного хвоста ограничено в пространстве. Для каждой гармоники магнитозвуковых волн внутри магнитосферы имеется поверхность, от которой происходит ее полное отражение. Таким образом, если на пути

от магнитопаузы до точки поворота не произойдет существенного поглощения энергии магнитозвуковых колебаний, они должны почти полностью отразиться назад в солнечный ветер. Известно, что эффективное поглощение энергии МГД-колебаний происходит на резонансных поверхностях для альфвеновских и медленных магнитозвуковых (ММЗ) волн [53]. Особенно интересны в этом отношении ММЗ-волны. Они способны взаимодействовать с ионами фоновой плазмы, составляющими основную часть функции их распределения. Далее рассмотрим этот процесс подробно.

**2.14.1. Модель среды и основные уравнения.** Рассмотрим модель магнитосферного хвоста в виде неоднородного плазменного цилиндра, представленную на рис. 2.22. Распределение плазмы по радиусу в этой модели соответствует долям геомагнитного хвоста. Здесь не учитывается в явном виде плазменный слой. Его присутствие смоделировано распределением альфвеновской скорости и скорости ММЗ-волн по радиусу. При удалении от оси цилиндра они меняются от величин, характерных для плазменного слоя, до величин, типичных для долей геомагнитного хвоста. Распределение альфвеновской скорости по радиусу построено в [110] на основании спутниковых данных о распределении концентрации плазмы и напряженности магнитного поля в магнитосфере [111, 112]. Поскольку основные результаты данной работы относятся к области открытых силовых линий, присутствие плазменного слоя не должно быть существенным элементом проводимых расчетов.

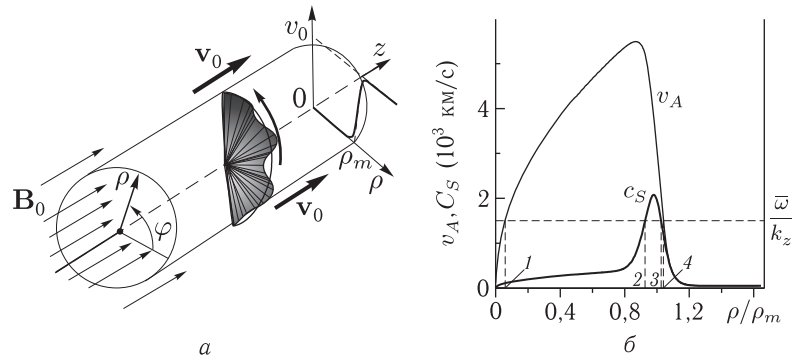


Рис. 2.22. *а* — цилиндрическая модель магнитосферного хвоста, обтекаемого потоком плазмы солнечного ветра и схематическая структура колебаний неустойчивых «глобальных мод» геомагнитного хвоста. *б* — распределение альфвеновской скорости  $v_A(\rho)$  и скорости ММЗ-волн  $c_s(\rho)$  в магнитосферном хвосте и в солнечном ветре. На резонансных оболочках  $\rho = \rho_s$  (точки 2 и 3) и  $\rho = \rho_A$  (точки 1 и 4) продольная фазовая скорость монохроматической волны  $\bar{\omega}/k_z$  совпадает соответственно с локальной скоростью ММЗ-волн  $c_s$  и с альфвеновской скоростью  $v_A$



Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \phi, z)$ , в которой начало координат  $\rho = 0$  совпадает с осью плазменного цилиндра. Фоновое магнитное поле направлено по оси  $z$ . Будем считать плазму в магнитослое движущейся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_0$ , а плазму в геомагнитном хвосте в отсутствие волн — покоящейся (рис. 2.22, а).

Переход от параметров плазмы магнитосферы к параметрам в магнитослое осуществляется в узком переходном слое толщиной  $\Delta\rho \ll \rho_m$ , где  $\rho_m$  — характерный радиус геомагнитного хвоста. Распределение плотности плазмы по радиусу будем полагать таким, что ее максимум достигается на оси плазменного цилиндра и спадает до минимума к его границе. Напряженность магнитного поля в магнитосферном хвосте больше, чем в солнечном ветре. Распределение альфвеновской скорости  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  по радиусу в рассматриваемой модели геомагнитного хвоста представлено на рис. 2.22, б.

Здесь же представлено распределение скорости ММЗ-волн  $c_s = v_A v_s / \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$ , в котором скорость звука в плазме  $v_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$  определяется по давлению фоновой плазмы  $P_0$ , удовлетворяющему условию равновесия плазменной конфигурации (2.6.1). Будем предполагать, что напряженности магнитного поля практически однородны внутри и вне плазменного цилиндра и изменяются только внутри тонкого переходного слоя толщиной  $\Delta\rho \ll \rho_m$ . В последующих численных расчетах используются следующие значения параметров:  $\rho_m = 30R_E$ ,  $\Delta\rho = 2R_E$ , где  $R_E = 6370$  км — радиус Земли. Такое распределение параметров типично для плазмы в долях геомагнитного хвоста.

Из условия равновесия (2.6.1) следует, что давление плазмы меняется только внутри переходного слоя. Значения основных параметров плазмы и магнитного поля на границе геомагнитного хвоста, использованные в численных расчетах, представлены в табл. 2.2. Эти параметры обеспечивают выполнение условия равновесия плазменной конфигурации.

Таблица 2.2. Основные параметры модели среды на границе геомагнитного хвоста

Параметр\область	Доли хвоста	Магнитослой
$B_0$ (нТл)	20	5
$v_A$ (км/с)	6000	50
$v_s$ (км/с)	420	177
$\beta^* = v_s^2/v_A^2$	0,005	12,6

Определим пространственную структуру монохроматической МГД-волны в рассматриваемой модели геомагнитного хвоста. Обозначим  $v_\rho = d\xi/dt = \partial\xi/\partial t + (\mathbf{v}_0 \nabla)\xi$  — радиальную компоненту вектора скорости плазмы в волне, где  $\xi$  — радиальное смещение элемента плазмы. Рассмотрим монохроматическую волну вида  $\exp(ik_z z + im\phi - i\omega t)$ ,

где  $k_z$  — компонента волнового вектора в направлении оси  $z$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — азимутальное волновое число,  $\omega$  — частота волны. Расписывая покомпонентно систему линейаризованных МГД-уравнений (1.0.5) в цилиндрической системе координат, так же, как это сделано в приложении Б, получим следующее уравнение для радиальной компоненты смещения плазменного элемента:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \xi}{\partial \rho} + \rho_0 \Omega^2 \xi = 0, \quad (2.14.1)$$

аналогичное (2.2.2), где обозначено  $\Omega^2 = \bar{\omega}^2 - k_z^2 v_A^2$ ,  $\bar{\omega} = \omega - k_z v_0$  — частота колебаний, модифицированная эффектом Доплера,

$$\begin{aligned} k_\rho^2 &= \frac{\bar{\omega}^4}{\bar{\omega}^2(v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} - k_z^2 - \frac{m^2}{\rho^2} = k_z^2 \left( \frac{\bar{\omega}_A^4 / (1 + \beta^*)}{(\bar{\omega}_A^2 - \bar{\omega}_s^2)} - 1 - \frac{m^2}{k_z^2 \rho^2} \right) = \\ &= \frac{k_z^2}{1 + \beta^*} \frac{(\bar{\omega}_A^2 - \bar{\omega}_{A1}^2)(\bar{\omega}_A^2 - \bar{\omega}_{A2}^2)}{(\bar{\omega}_A^2 - \bar{\omega}_s^2)} \end{aligned} \quad (2.14.2)$$

— радиальная компонента волнового вектора в ВКБ-приближении, когда решение (2.14.1) можно представить в виде  $\xi \sim \exp(i \int k_\rho d\rho)$ ,  $\beta^* = v_s^2/v_A^2$ ,  $\bar{\omega}_A = \bar{\omega}/k_z v_A(\rho)$ ,  $\bar{\omega}_s = \sqrt{\beta^*/(1 + \beta^*)}$ , а  $\bar{\omega}_{A1}^2, \bar{\omega}_{A2}^2$  являются корнями биквадратного (относительно  $\bar{\omega}_A$ ) уравнения  $k_\rho^2 = 0$ . Отметим, что  $\beta^*$  с точностью до множителя, близкого к единице, совпадает с плазменным параметром  $\beta = 8\pi P_0/B_0^2$  — отношением газокинетического давления плазмы к магнитному.

Другие компоненты поля МГД-колебаний выражаются через  $\xi$  следующим образом:

$$v_\rho = -i\bar{\omega}\xi, \quad v_\phi = -\frac{1}{K_s^2} \left( v_A^2 + \frac{K_A^2 v_s^2}{\chi_s^2} \right) \frac{m}{\bar{\omega} \rho^2} \frac{\partial \rho \xi}{\partial \rho}, \quad (2.14.3)$$

$$v_z = -\frac{k_z K_A^2 v_s^2}{\bar{\omega} \chi_s^2 \rho} \frac{\partial \rho \xi}{\partial \rho} - \xi \frac{dv_0}{d\rho},$$

$$B_\rho = ik_z B_0 \xi, \quad B_\phi = -\frac{k_z B_0}{\bar{\omega}} v_\phi, \quad (2.14.4)$$

$$B_z = -\frac{K_A^2 B_0}{\chi_s^2} \left( 1 - \frac{k_z^2 v_s^2}{\bar{\omega}^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \xi}{\partial \rho} - \xi \frac{dB_0}{d\rho},$$

$$P = -\gamma P_0 \frac{K_A^2}{\chi_s^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \xi}{\partial \rho} + \xi \frac{d}{d\rho} \left( \frac{B_0^2}{8\pi} \right), \quad (2.14.5)$$

где обозначено

$$K_A^2 = 1 - \frac{k_z^2 v_A^2}{\bar{\omega}^2}, \quad K_s^2 = K_A^2 - \frac{m^2 v_A^2}{\rho^2 \bar{\omega}^2}, \quad \chi_s^2 = K_s^2 - K_A^2 \frac{k_z^2 + m^2/\rho^2}{\bar{\omega}^2} v_s^2.$$

Точки поворота БМЗ-волны определяются нулями функции  $k_\rho^2(\rho)$ , а резонансные поверхности для альфвеновских и ММЗ-волн — особыми точками уравнения (2.14.1), в которых коэффициент при стар-

шей производной обращается в нуль. В точке альфвеновского резонанса  $\rho = \rho_A$  имеем  $\Omega^2(\rho_A) = 0$ . В точке магнитозвукового резонанса  $\rho = \rho_s$  в нуль обращается знаменатель в выражении (2.14.2), что дает локальное дисперсионное уравнение для ММЗ-волн при  $|k_\rho^2| \rightarrow \infty$ :  $\bar{\omega}^2 = k_z^2 c_s^2(\rho_s)$ . На резонансных поверхностях фазовая скорость рассматриваемой МГД-волны в направлении магнитного поля  $\bar{\omega}/k_z$  совпадает с локальной скоростью альфвеновских или ММЗ-волн (см. рис. 2.22, б).

В численном решении уравнения (2.14.1) используем следующие граничные условия. При  $\rho \rightarrow 0$  выбирается ограниченное по амплитуде решение уравнения (2.14.1), которое в этом пределе можно приближенно представить в виде:

$$\rho^2 \xi'' + \sigma \rho \xi' + (k_{\rho 0}^2 \rho^2 - 2 + \sigma) \xi = 0, \quad (2.14.6)$$

где  $\xi' = \nabla_\rho \xi$ ,  $k_{\rho 0}^2 \equiv k_\rho^2(\rho \rightarrow 0)$  (для  $m \neq 0$  имеем  $k_{\rho 0}^2 \approx -m^2/\rho^2$ ). Здесь  $\sigma = 1$  при  $m = 0$  и  $\sigma = 3$  при  $m \neq 0$ . Решение (2.14.1), ограниченное при  $\rho \rightarrow 0$ , имеет вид:

$$\xi = C \begin{cases} \rho, & \text{для } m = 0, \\ \rho^{m-1}, & \text{для } m \neq 0, \end{cases} \quad (2.14.7)$$

где  $C$  — произвольная константа. Второе граничное условие определим в магнитослое при  $\rho = 2\rho_m$ . Оно заключается в том, что амплитуда колебаний здесь выбирается равной амплитуде гармоники, задаваемой модельным спектром БМЗ-волн в магнитослое (см. раздел 2.13.2 и приложение В), из чего определяется константа  $C$  и амплитуда колебаний во всем пространстве.

Решение уравнения (2.14.1) вблизи резонансной поверхности для ММЗ-волн  $\rho = \rho_s$  вполне аналогично (2.6.5), являющемуся решением уравнения (2.6.4). При  $\rho \rightarrow \rho_s$  оно имеет вид

$$\xi = -C \ln \left( \frac{\rho - \rho_s}{a_s} + i\varepsilon_s \right),$$

где  $C$  — константа интегрирования,  $a_s$  — характерный масштаб изменения параметров плазмы вблизи резонансной поверхности,  $\varepsilon_s$  — регуляризирующий фактор, связанный с диссипацией колебаний вблизи резонансной поверхности. При  $\varepsilon_s = 0$  решение имеет логарифмическую особенность на резонансной поверхности для ММЗ-волн. Для регуляризации особенностей уравнения (2.14.1) в определении  $\Omega^2$  и в знаменателе выражения (2.14.2) переопределим выражения для частоты колебаний добавлением мнимых добавок для учета диссипации альфвеновских и ММЗ-колебаний на резонансных поверхностях. В определении  $\Omega^2$  положим  $\bar{\omega} = \omega - k_z v_0 + i\gamma_A$ , а в знаменателе (2.14.1)  $\bar{\omega} = \omega - k_z v_0 + i\gamma_s$ , где  $\gamma_{A,s}$  — декременты затухания альфвеновских и ММЗ-волн вблизи соответствующих резонансных поверхностей.

Декременты затухания определяют величину амплитуды и характерный масштаб локализации альфвеновских и ММЗ-волн на резонансных оболочках. Для альфвеновских волн декремент затухания мал ( $\gamma_A \sim 10^{-3}\omega$ ), что определяет большую амплитуду резонансных колебаний и узкую область их локализации по радиусу. Декремент затухания ММЗ-волн сильно зависит от отношения температур ионов и электронов плазмы (см. рис. 1.2 в гл. 1). В солнечном ветре электроны плазмы горячее ионов ( $T_e \approx 3T_i$ ), поэтому в магнитослое мы полагаем  $\gamma_s \approx 10^{-2}\omega$ . В долях хвоста, наоборот, ионы плазмы горячее электронов ( $T_i \approx 8T_e$ ), что соответствует  $\gamma_s \approx 0,8\omega$ . Переход от декремента ММЗ-волн, выбранного для магнитослоя, к декременту, типичному для магнитосферы, осуществляется в том же переходном слое, что и у других параметров плазмы.

На рис. 2.23 представлена радиальная структура двух монохроматических волн, для одной из которых в магнитосфере имеются резонансные поверхности для ММЗ-колебаний (рис. 2.23, а), а для другой таких поверхностей нет (рис. 2.23, б). На этих рисунках приведена нормированная на единицу структура производной  $d\xi/d\rho$ , которая определяет амплитуду колебаний на резонансных поверхностях. Резонансные поверхности для ММЗ-волн определяются точками пересечения функций  $\text{Re}(\bar{\omega}_A(\rho))$  и  $\bar{\omega}_s(\rho)$ , где реальная часть знаменателя в (2.14.2) обращается в нуль.

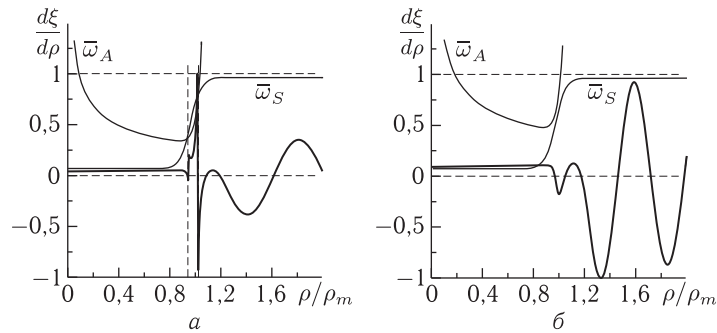


Рис. 2.23. Пространственная структура монохроматических МГД-волн с  $m = 1$  и разными значениями продольной фазовой скорости  $\bar{\omega}/k_z$ : а — колебания, для которых в геомагнитном хвосте имеются резонансные оболочки для ММЗ-волн  $\bar{\omega}_A(\rho_s) = \bar{\omega}_s(\rho_s)$ , б — колебания не имеющие резонансных оболочек внутри геомагнитного хвоста

**2.14.2. Расчет изменения функции распределения ионов потоком БМЗ-волн в квазилинейном приближении.** Рассмотрим задачу о деформации функции распределения ионов фоновой плазмы под действием потока БМЗ-волн, проникающих в магнитосферу из магнитослоя. Используем уравнения кинетической теории, полученные в локальном квазилинейном приближении. Это означает, что на каждой ре-

зональной оболочке внутри геомагнитного хвоста мы будем рассматривать функцию распределения так, как если бы она была определена во всем пространстве, а амплитуда МГД-колебаний соответствовала данной оболочке. Будем считать, что плазма состоит из ионов водорода и электронов. Уравнение для функции распределения ионов при наличии МГД-волн с линейной дисперсией (таких как альфвеновские с  $\omega = k_{\parallel}v_A$ , или ММЗ-волны с законом дисперсии  $\omega \approx k_{\parallel}c_s$ ) имеет вид (см. [23])

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{e}{m_i}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \int d^3\mathbf{k} \left[ \bar{E}_{\parallel} J_0(\lambda) + i \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} J'_0(\lambda) \bar{E}_b \right]^* \times \int_0^t \left[ \bar{E}_{\parallel}(t') J_0(\lambda) + i \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} J'_0(\lambda) \bar{E}_b(t') \right] \frac{\partial f(t')}{\partial v_{\parallel}} e^{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)(t-t')} dt'. \quad (2.14.8)$$

Здесь  $f(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  — функция распределения ионов по скоростям,  $v_{\parallel, \perp}$  — скорости ионов вдоль и поперек силовых линий магнитного поля,  $J_0(\lambda)$  — функции Бесселя,  $\lambda = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_i$ ,  $k_{\parallel}$ ,  $\mathbf{k}_{\perp}$  — продольная и поперечные компоненты волнового вектора,  $\omega_i$  — ионная гирочастота, а нижние индексы  $\parallel, \perp, b$  нумеруют различные компоненты поля колебаний:  $\bar{E}_{\parallel} \equiv \langle E_{\parallel} \rangle$  — средняя амплитуда электрического поля колебаний вдоль магнитного поля, усредненная по спектру волновых чисел,  $\bar{E}_{\perp}$  — средняя амплитуда компоненты поля вдоль  $\mathbf{k}_{\perp}$ , а  $\bar{E}_b$  — средняя амплитуда вдоль направления вектора  $[\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k}_{\perp}]$ . При этом связь частоты с компонентами волнового вектора колебаний определяется локальным дисперсионным уравнением. Интегрирование в (2.14.8) осуществляется по трем компонентам волнового вектора и по всему интервалу времени, предшествующему текущему моменту. То есть, в общем случае это уравнение не локально по времени.

**2.14.2. Расчет изменения функции распределения ионов потоком БМЗ-волн в квазилинейном приближении.** Найти его решение в общем виде достаточно сложно. Мы здесь рассмотрим более простую задачу об определении вида функции распределения при  $t \rightarrow \infty$ . При этом в интеграл по  $t'$  основной вклад вносят асимптотические значения  $E_{\parallel, \perp, b}$  (так как источником служит постоянное поле колебаний в магнитослое, то эти значения остаются неизменными на протяжении всего рассматриваемого интервала времени) при мало меняющейся на асимптотике функции распределения  $f$ . Вынося в (2.14.8) из-под интеграла по  $t'$  функции  $E_{\parallel, b}$  и  $f$  при  $t' \rightarrow t$ , получаем следующее уравнение [113]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}, \quad (2.14.9)$$

где

$$D = \pi \left(\frac{e}{m_i}\right)^2 \int d^3\mathbf{k} \left| \bar{E}_{\parallel} J_0(\lambda) + i \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} J'_0(\lambda) \bar{E}_b \right|^2 \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})$$

— коэффициент диффузии ионов в пространстве скоростей. Таким образом видно, что взаимодействие происходит при совпадении

продольной фазовой скорости волны  $\omega/k_{\parallel}$  с продольной скоростью ионов плазмы  $v_{\parallel}$ .

Поскольку уравнение на функцию распределения получено в декартовой системе координат, необходимо его преобразовать для применения в цилиндрической модели, использованной нами для геомагнитного хвоста. Связь электрических и магнитных компонент поля МГД-колебаний определяется уравнением (2.8.11). В приближении идеальной МГД  $E_{\parallel} = 0$  для всех типов МГД-волн, а для компоненты  $\bar{E}_b$  имеем:

$$\bar{E}_b = \left\langle -\frac{\omega}{k_z c} \frac{k_{\rho} \tilde{B}_{\rho} + k_{\phi} \tilde{B}_{\phi}}{k_{\perp}} \right\rangle,$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по фазам волновых векторов,  $k_{\rho}$ ,  $k_{\phi}$ ,  $k_z$  — радиальная, азимутальная и продольная компоненты локальной декартовой системы координат в цилиндрической модели, а тильда сверху обозначает пространственную фурье-гармонику, например

$$\tilde{B}_{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{r} B_{\rho}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Используя естественное предположение о малости ларморовского радиуса ионов  $\rho_i$  по сравнению с длиной волны  $k_{\perp} \rho_i = k_{\perp} v_i / \omega_i \ll 1$ , где  $v_i \sim v_{\perp}$  — тепловая скорость ионов, получаем для коэффициента диффузии

$$D \approx \frac{\pi}{4} \frac{v_{\perp}^4}{B_0^2} \int d^3 \mathbf{k} \left\langle \left| k_{\rho} \tilde{B}_{\rho} + k_{\phi} \tilde{B}_{\phi} \right|^2 \right\rangle \delta(\omega - k_z v_{\parallel}).$$

Отметим, что у альфвеновских волн  $E_b = 0$  (см. табл. 1.1), а у ММЗ-волн на резонансной поверхности в отсутствие диссипации  $B_{\rho}$ -компонента поля сингулярна, а  $B_{\phi}$ -компонента имеет конечную амплитуду. Из решения уравнения (2.14.1) нам известна структура волнового поля гармоник вида

$$\bar{B}_{\rho}(\rho, m, k_z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int B_{\rho}(\mathbf{r}, t) e^{-i(k_z z + m\phi - \omega t)} d\phi dz dt.$$

Оставляя в выражении для коэффициента диффузии только сингулярную  $B_{\rho}$ -компоненту магнитного поля, можем его представить в виде

$$D \approx \frac{\pi}{4} \frac{v_{\perp}^4}{v_{\parallel} B_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\langle \left| \nabla_{\rho} \bar{B}_{\rho}(\rho, m, k_z = \omega/v_{\parallel}, \omega) \right|^2 \right\rangle d\omega. \quad (2.14.10)$$

Здесь подынтегральная  $\delta$ -функция использована для снятия интеграла по  $k_z$ . При этом усреднение проводится по фазам гармоники с заданной частотой, а также азимутальной и продольной компонентами волнового вектора.

В качестве начального условия при решении (2.14.9) используем максвелловскую функцию распределения

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_i^3} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{v_i^2}\right), \quad (2.14.11)$$

где  $n_0$  — концентрация ионов плазмы,  $v_i = \sqrt{2T_i/m_i}$  — их тепловая скорость на рассматриваемой магнитной оболочке. Эта функция описывает равновесное состояние плазмы в отсутствие волн. Можно считать, что такое состояние плазмы в долях геомагнитного хвоста устанавливается на восстановительной фазе суббури.

Как следует из вида коэффициента диффузии (2.14.10), уравнение (2.14.9) не меняет зависимость функции распределения от  $v_{\perp}$ . Интегрируя (2.14.9) по поперечным компонентам скорости частиц, получаем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \bar{D} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_{\parallel}}, \quad (2.14.12)$$

где

$$\bar{f}(v_{\parallel}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} v_{\perp} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) dv_{\perp} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_i} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{v_i^2}\right), \quad (2.14.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{\pi v_i^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} v_{\perp} D e^{-v_{\perp}^2/v_i^2} dv_{\perp} \approx \\ &\approx \frac{\pi}{2} \frac{v_i^4}{v_{\parallel} B_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \langle |\nabla_{\rho} \bar{B}_{\rho}(\rho, m, k_z = \omega/v_{\parallel}, \omega)|^2 \rangle d\omega. \end{aligned} \quad (2.14.14)$$

Умножая (2.14.12) слева на  $\bar{f}$  и интегрируя по  $v_{\parallel}$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^2 dv_{\parallel} \approx - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_{\parallel}} \right)^2 dv_{\parallel}. \quad (2.14.15)$$

Отсюда следует, что если на асимптотике по  $t$  достигается новое равновесное состояние ( $\partial \bar{f} / \partial t = 0$ ), то в интервалах  $v_{\parallel}$ , в которых  $\bar{D}$  отлична от нуля на функции распределения должно образоваться плато ( $\partial \bar{f} / \partial v_{\parallel} = 0$ ).

Рассмотрим условия, при которых происходит модификация функции распределения ионов магнитосферной плазмы под действием потока МГД-волн из магнитослоя. Интервалы  $v_{\parallel}$ , в которых  $\bar{D} \neq 0$  определяются наличием магнитозвуковых волн в солнечном ветре вдали от магнитосферы (при  $\rho \rightarrow \infty$ ). Как следует из (2.14.2), солнечный ветер является областью прозрачности для магнитозвуковых волн ( $\text{Re}(k_{\rho}^2) > 0$ ) при  $\omega_s^2 < \bar{\omega}_A^2 < \omega_{A1}^2$  и при  $\bar{\omega}_A^2 < \omega_{A2}^2$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  имеем  $\omega_{A1}^2 = 1$ ,  $\omega_{A2}^2 = \beta^*$ . Первое из этих условий определяет очень узкую область допустимых параметров волн, и ее наличием

мы пренебрежем. Из второго условия получаем, что солнечный ветер прозрачен в интервалах продольных волновых чисел  $k_z < \min(k_{z1}, k_{z2})$  и  $k_z > \max(k_{z1}, k_{z2})$ , где  $k_{z1,z2} = \omega/v_{z1,z2}$ ,  $v_{z1} = v_0 + v_{sw}$ ,  $v_{z2} = v_0 - v_{sw}$ . В рассматриваемой модели среды скорость звука в магнитослое  $v_{sw} = 177$  км/с. При исследовании течений плазмы солнечного ветра с  $v_0 > 200$  км/с имеем  $v_{z1} > v_{z2} > 0$  и солнечный ветер непрозрачен для БМЗ-волн при  $0 < k_{z1} < k_z < k_{z2}$ . Учитывая резонансные условия для частиц плазмы, взаимодействующих с волнами ( $k_z = \omega/v_{||}$ ), получаем, что функция распределения остается неизменной в интервале  $v_{z2} < v_{||} < v_{z1}$ .

Кроме того, следует учесть наличие резонансных поверхностей для ММЗ-волн внутри геомагнитного хвоста. Учитывая локальное дисперсионное уравнение для ММЗ-волн  $\omega^2 = k_z^2 c_s^2$ , имеем  $c_{s\max} > |v_{||}| > c_{s\min}$ . В нашей модели значение  $c_{s\min} \approx 8$  км/с достигается на оси плазменного цилиндра, а  $c_{s\max} \approx 2000$  км/с — в окрестности переходного слоя. Таким образом, имеются три области, где на функции распределения  $\bar{f}$  образуется плато:  $-c_{s\max} < v_{||} < -c_{s\min}$ ,  $c_{s\min} < v_{||} < v_{z2}$  и  $v_{z1} > v_{||} > c_{s\max}$ . При этом область  $c_{s\min} < v_{||} < v_{z2}$  соответствует БМЗ-волнам, бегущим в солнечном ветре «по потоку», а две другие области — волнам, бегущим «против потока». Соответствующее распределение  $f(v_{||})$  представлено на рис. 2.24.

Уровень плато в каждой из этих областей определяется условием сохранения полного числа частиц и может быть выражен следующим соотношением:

$$\bar{f}_j = \int_{v_{||\min}}^{v_{||\max}} \bar{f}(v_{||}) dv_{||} / (v_{||\max} - v_{||\min}),$$

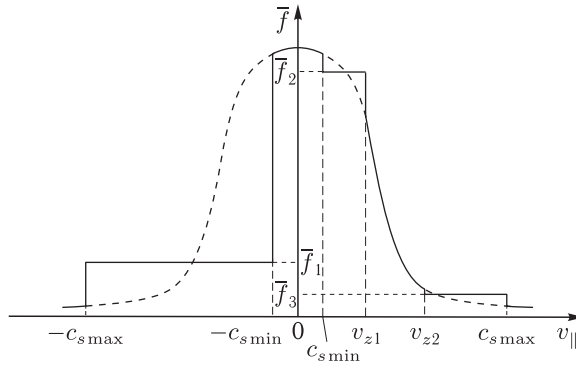


Рис. 2.24. Образование «плато» на графике функции распределения ионов плазмы под действием МГД-волн, проникающих в доли геомагнитного хвоста из магнитослоя. Область  $c_{s\min} < v_{||} < v_{z1}$  соответствует БМЗ-волнам, бегущим в магнитослое «по потоку», а области  $-c_{s\max} < v_{||} < -c_{s\min}$  и  $v_{z2} < v_{||} < c_{s\max}$  — волнам, бегущим «против потока»



где  $j = 1, 2, 3$  — номер области с плато на функции распределения (см. рис. 2.24), а значения  $v_{\parallel \max, \min}$  соответствуют максимальному и минимальному значению продольной скорости частиц в каждом из этих интервалов. Выполнение этих соотношений обеспечивает сохранение баланса полного равновесного давления и, следовательно, неизменность профилей скорости Альфвена и скорости звука в плазме.

**2.14.3. Расчет скорости, приобретаемой магнитосферной плазмой при ее взаимодействии с МГД-волнами из магнитослоя.** Средняя скорость плазмы, связанная с ее взаимодействием с МГД-волнами в квазилинейном приближении определяется как

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \bar{f}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}.$$

Очевидно, что вклад от симметричных относительно  $v_{\parallel} = 0$  частей  $\bar{f}(v_{\parallel})$  равен нулю. На рис. 2.25 представлены распределения  $v_0(\rho)$ , рассчитанные при заданных в настоящей работе параметрах цилиндрической модели геомагнитного хвоста для различных скоростей солнечного ветра в магнитослое.

На рис. 2.25, *a* представлены заданные профили скорости солнечного ветра  $v_0(\rho)$  с учетом переходного слоя, и профили скоростей плазмы в долях геомагнитного хвоста  $\bar{v}_0(\rho)$ , рассчитанные в двух предельных случаях. В первом из них (кривые 4 и 5 на рис. 2.25, *a*) предполагается, что все волны в магнитослое движутся «по потоку» и плато в областях  $-c_{s \max} < v_{\parallel} < -c_{s \min}$  и  $v_{z1} > v_{\parallel} > c_{s \max}$  не образуются. Очевидно, что в этом случае импульс, передаваемый МГД-волнами ионам в долях геомагнитного хвоста, направлен от Земли в хвост  $\bar{v}_0(\rho) > 0$ . Второй предельный случай соответствует равным потокам волн, движущихся «по потоку» и «против потока». Как видно из рисунка (кривые 6, 7 и 8), в этом случае импульс, передаваемый ионам плазмы, направлен к Земле. Из наблюдений колебаний солнечного ветра, проводимых на спутниках, трудно определить какая доля потока волн направлена «по потоку», а какая «против потока». Наиболее вероятным представляется случай, промежуточный между этими двумя, когда волны, движущиеся в магнитослое «по потоку», занимают более широкую часть спектра чем волны, движущиеся «против потока».

На рис. 2.25, *b* представлено суммарное распределение скорости плазмы  $v_0(\rho) + \bar{v}_0(\rho)$  в случае, когда волны, бегущие «против потока», отсутствуют в диапазоне  $-c_{s \max} < -300 \text{ км/с} < v_{\parallel} < -c_{s \min}$ . Как видно, в этом случае импульс, передаваемый ионам в областях, прилегающих к переходному слою, обращает движение потока магнитосферной плазмы по направлению к Земле, а вблизи оси цилиндра ее движение направлено в хвост. Следует, однако, отметить, что рассматриваемая нами модель неприменима к внутренним областям геомагнитного хвоста, включающим плазменный слой. Как будет показано далее,

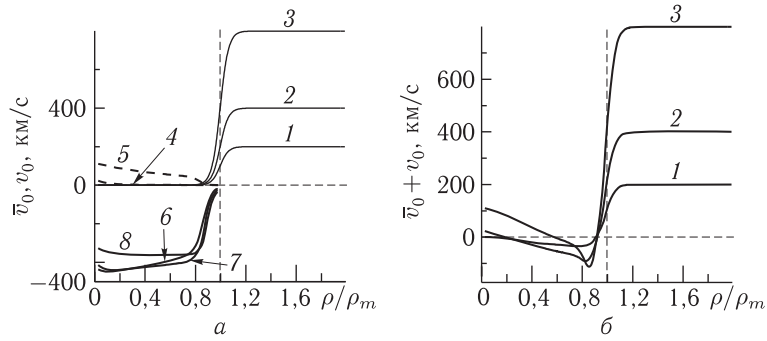


Рис. 2.25. Распределение по радиусу скорости течения плазмы в магнитослое  $v_0$  и скорости магнитосферной конвекции  $\bar{v}_0$  при различных скоростях солнечного ветра. *а* — кривые 1, 2, 3 соответствуют распределению скорости солнечного ветра с  $v_0 = 200, 400, 800$  км/с, кривые 4 и 5 — скорости магнитосферной конвекции при  $v_0 = 400, 800$  км/с в отсутствие в магнитослое БМЗ-волн, бегущих «против потока», а кривые 6, 7, 8 ( $v_0 = 200, 400, 800$  км/с) — скорости магнитосферной конвекции при равных потоках БМЗ-волн в магнитослое, бегущих «по потоку» и «против потока». *б* — распределение полной скорости  $v_0 + \bar{v}_0$  (кривые 1, 2, 3 для  $v_0 = 200, 400, 800$  км/с) при доминировании в магнитослое потока БМЗ-волн, бегущих «по потоку» над волнами, бегущими «против потока»

полученные результаты не могут быть использованы для внутренних областей геомагнитного хвоста также и из-за слишком большого характерного времени установления там асимптотического режима течения плазмы.

Проведенные выше расчеты профиля скорости течения плазмы, приобретаемой под действием МГД-волн, не зависят от их амплитуды. Это связано с тем, что рассчитываемая скорость течения соответствует асимптотическому режиму при  $t \rightarrow \infty$ . Однако реальное течение магнитосферной плазмы устанавливается за определенный конечный интервал времени. Характерное время такого перехода  $\tau$  от полностью неподвижной плазмы к асимптотическому режиму ее течения определяется амплитудой МГД-волн, переносящих импульс из солнечного ветра в магнитосферу. Для того, чтобы оценить это время, заменим в (2.14.12) производную по времени множителем  $\tau^{-1}$ , в результате получим

$$\tau \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^2 dv_{\parallel} / \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_{\parallel}} \right)^2 dv_{\parallel}. \quad (2.14.16)$$

Для функции  $\bar{f}$  выберем максвелловское распределение вида (2.14.11).

Чтобы выполнить расчет коэффициента диффузии  $\bar{D}$ , надо задать спектр МГД-волн в магнитослое. Используем для него тот же спектр стохастических колебаний солнечного ветра (2.13.17), кото-

рый был разработан в разделе 2.13.2 (и в Приложении В). Константа  $C$  в спектральной функции (2.13.17) определяется обратным фурье-преобразованием:

$$\begin{aligned} \langle |B_\rho|^2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \langle |\bar{B}_\rho|^2 \rangle dk_z = \\ &= \frac{C}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-\alpha} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_t, \omega) k_t^{-2\beta} dk_z, \end{aligned}$$

где  $\langle |B_\rho|^2 \rangle$  — средний квадрат амплитуды  $B_\rho$  — компоненты поля колебаний солнечного ветра в магнитослое. В наших расчетах принималось значение  $\langle |B_\rho| \rangle \sim 0,2B_0 \approx 1$  нТл.

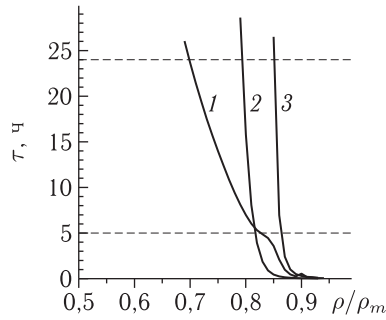


Рис. 2.26. Распределение по радиусу характерного времени установления асимптотического режима магнитосферной конвекции  $\tau$  при различных скоростях солнечного ветра в магнитослое. Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $v_0 = 200, 400, 800$  км/с при средней амплитуде стохастических БМЗ-колебаний в магнитослое  $\langle |B_\rho| \rangle \sim 1$  нТл

На рис. 2.26 представлено распределение по радиусу характерного времени установления асимптотического режима течения плазмы в геомагнитном хвосте  $\tau$ , рассчитанное по формуле (2.14.16), в которой коэффициент диффузии определяется выражением (2.14.14), а спектр БМЗ-колебаний в магнитослое (2.13.17) соответствует профилям течения плазмы, представленным на рис. 2.25, б. Видно, что значения  $\tau$ , сопоставимые со временем, в течение которого геомагнитный хвост можно рассматривать как сравнительно устойчивую плазменную конфигурацию ( $\sim 3-6$  ч — среднее время между двумя последовательными суббурями), достигаются в интервалах  $0,8\rho_m < \rho < \rho_m$  (для скорости солнечного ветра  $v_0 = 400$  км/с) и  $0,85\rho_m < \rho < \rho_m$  (для скоростей солнечного ветра  $v_0 = 200, 800$  км/с). Именно в этом диапазоне магнитных оболочек достигается максимальная концентрация резонансных поверхностей для ММЗ-волн в рассматриваемой нами модели геомагнитного хвоста.

Полученные значения  $\tau$  можно рассматривать как верхнюю оценку времени установления асимптотического режима течения плазмы. Время  $\tau$  уменьшается квадратично с ростом амплитуды турбулентных колебаний плазмы в магнитослое. Кроме того, при более точном подходе следует решать начальную задачу (2.14.12) с учетом вклада

МГД-колебаний, связанных с развитием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе. Поскольку для таких колебаний солнечный ветер является областью непрозрачности (см. [114]), постановка задачи будет несколько отличаться от рассмотренной в настоящем разделе. Если предположить, что поток неустойчивых волн в геомагнитный хвост сопоставим с рассмотренным выше, можно ожидать уменьшения характерного времени  $\tau$  в 2-3 раза и некоторого расширения диапазона магнитных оболочек, на которых может установиться асимптотический режим магнитосферной конвекции.

Таким образом, можно сделать вывод, что поток БМЗ-волн, падающих на магнитопаузу из магнитослоя, передает ионам плазмы в долях геомагнитного хвоста момент движения, который способен сформировать ветвь магнитосферной конвекции в направлении к Земле. Наиболее эффективен этот процесс в области открытых силовых линий, прилегающей к магнитопаузе, где имеется наибольшая концентрация резонансных оболочек для ММЗ-волн. Этот механизм может объяснить формирование ветви магнитосферной конвекции в направлении «к Земле» в долях геомагнитного хвоста (в области открытых силовых линий) в периоды длительной северной компоненты ММП. Тем самым, объясняется появление в это время высокоширотных ячеек с обратной конвекцией плазмы, импульс которой передается БМЗ-волнами, проникающими в магнитосферу из солнечного ветра.

### **2.15. Неустойчивость сдвиговых МГД-течений при наличии и в отсутствие ограничивающих стенок**

Неустойчивость сдвиговых течений жидкостей и газов (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) издавна привлекает внимание исследователей. Такие течения широко распространены во многих средах — как на Земле, так и в космической плазме (см. [115, 116]). Ранние аналитические работы по данной тематике основаны, как правило, на моделях среды, в которых сдвиговый слой рассматривается как тангенциальный разрыв профиля скорости сдвигового течения [117, 118]. Позже появились работы, в которых возмущения сдвиговых течений исследовались в моделях с плавным профилем скорости [119, 120]. Следует также отметить работы [121–123], в которых изучена неустойчивость сдвигового течения неограниченного потока жидкости. Значительное число работ посвящено исследованию сдвиговых течений плазмы в присутствии внешнего магнитного поля. Эти работы стимулировались, в основном, задачами, связанными с изучением обтекания солнечным ветром магнитосферы Земли, динамики плазменных хвостов комет [125], а также устойчивости высокоскоростных плазменных потоков внутри самого солнечного ветра [116].

Важную роль в решении задач об устойчивости сдвиговых течений играет выбор граничных условий для колебаний, излучаемых сдвиго-

вым слоем. В аналитических задачах граничные условия выбираются вдали от сдвигового слоя, исходя из удобства анализа получаемых решений, а в численных — либо из удобства самого численного счета, либо из возможности сравнения получаемых результатов с результатами предшествующих аналитических работ. При этом граничные условия можно выбрать различным образом. В работах [122, 123, 126] рассматривалось сдвиговое течение неограниченной жидкости. Естественным граничным условием для неустойчивых мод в такой задаче является отсутствие волн, прибегаящих к сдвиговому слою. Другими словами, вдали от сдвигового слоя должны распространяться только убегающие от него волны.

В работах [124, 127] на некотором, одинаковом с каждой стороны от сдвигового слоя расстоянии ставилось условие обращения в нуль нормальной составляющей скорости колебаний. Иначе говоря, предполагалось наличие твердых стенок. Возможны постановки задачи и с граничным условием в виде твердой стенки только с одной стороны от сдвигового слоя [128]. Характеристики среды и параметры рассматриваемых колебаний в различных задачах, как правило, различны. Поэтому выявить влияние граничных условий на устойчивость сдвиговых течений путем сравнения результатов разных работ достаточно сложно.

В данном разделе мы исследуем устойчивость сдвиговых МГД-течений проводящей жидкости (газа) в присутствии фонового магнитного поля в задачах с граничными условиями разных типов (см. [129]). Рассмотрим при этом два типа колебаний. В колебаниях первого типа тангенциальный волновой вектор нормален к направлению внешнего магнитного поля. Такие колебания аналогичны колебаниям сдвигового течения невязкой сжимаемой жидкости [122, 123].

У колебаний второго типа угол между направлениями тангенциального волнового вектора и магнитного поля отличен от  $\pi/2$ . В этом случае наличие магнитного поля играет заметную роль, причем тем большую, чем меньше этот угол. Мы рассмотрим колебания, тангенциальный волновой вектор которых параллелен магнитному полю. Таким образом, будут исследованы два предельных случая, между которыми реализуются все возможные ситуации.

Последующие численные расчеты относятся в основном к сдвиговому течению с профилем скорости вида  $u = \text{th } x$ . Однако, для более полного понимания получаемых численных результатов, для каждого типа граничных условий мы решим также задачу об устойчивости сдвигового течения, имеющего вид тангенциального разрыва в профиле скорости.

**2.15.1. Модель среды и основные уравнения.** Рассмотрим модель среды, представленную на рис. 2.27. Направим координатную ось  $y$  вдоль направления скорости течения, стратифицированного по координате  $x$ , и введем ось  $z$ , дополняющую систему координат

до правосторонней. Разложим полное поле возмущений на фурье-гармоники вида  $\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)]$ , где  $\omega$  — частота колебаний отдельной гармоники. Определим тангенциальный волновой вектор как  $\mathbf{k}_t = (k_y, k_z)$ . Профиль скорости сдвигового течения по оси  $x$  выберем в виде

$$v_0(x) = \bar{v}_0 \operatorname{th}(x/a), \quad (2.15.1)$$

где  $\bar{v}_0$  — характерный полуперепад скорости сдвигового течения,  $a$  — характерная толщина сдвигового слоя. Другие параметры среды: плотность  $\rho_0$ , давление  $P_0$  и напряженность магнитного поля  $B_0$  будем считать однородными.

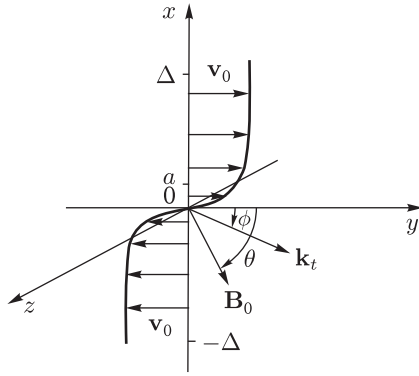


Рис. 2.27. Модель среды и система координат:  $a$  — характерный масштаб критического слоя,  $\pm\Delta$  — местоположение возможных границ в виде твердых стенок,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  — вектора невозмущенной скорости и магнитного поля среды,  $\mathbf{k}_t$  — тангенциальный волновой вектор колебаний

Уравнение для смещения элемента плазмы  $\xi$  в МГД-колебаниях в движущейся среде имеет вид (2.2.2):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \rho_0 \Omega^2 \xi = 0, \quad (2.15.2)$$

где  $v_x = d\xi/dt = -i\bar{\omega}\xi$  —  $x$ -компонента вектора скорости колебаний среды в волне,  $\bar{\omega} = \omega - k_t v_0 \cos \phi$  — частота колебаний, модифицированная эффектом Доплера,

$$\Omega^2 = \bar{\omega}^2 - (\mathbf{k}_t \mathbf{v}_A)^2, \quad (2.15.3)$$

$$k_x^2 = k_t^2 - \frac{\bar{\omega}^4}{\bar{\omega}^2 (v_s^2 + v_A^2) - v_s^2 (\mathbf{k}_t \mathbf{v}_A)^2}.$$

Здесь  $v_s = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$  — скорость звука в среде,  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$  — скорость Альфвена. Обезразмерим переменные, придерживаясь системы обозначений, использованной в [122]. Обозначим:  $\alpha = k_t a$  — безразмерное тангенциальное волновое число,  $c = \omega / (k_t \bar{v}_0 \cos \phi)$  — фазовая скорость колебаний, обезразмеренная на проекцию скорости течения  $\mathbf{v}_0$  на направление  $\mathbf{k}_t$ ,  $M = \bar{v}_0 \cos \phi / v_s$  — число Маха,

определенное по проекции  $\mathbf{v}_0$  на направление  $\mathbf{k}_t$  (см. рис. 2.27),  $\bar{M} = M\sqrt{\beta^*/(1+\beta^*)}$  — модифицированное число Маха,

$$u(x) = v_0(x)/\bar{v}_0 = \text{th}(x/a). \quad (2.15.4)$$

— безразмерная скорость фоновой плазмы. Параметр  $\beta^* = v_s^2/v_A^2$ , характеризующий относительную роль сжимаемости среды и магнитного поля, пропорционален отношению газокINETического давления среды  $P_0$  к давлению магнитного поля  $B_0^2/8\pi$ .

Рассмотрим два предельных случая, отличающиеся направлениями векторов  $\mathbf{k}_t$  и  $\mathbf{B}_0$ . При  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{B}_0$  ( $\theta - \phi = \pi/2$ , см. рис. 2.27) уравнение (2.15.2) сводится к

$$\left( \frac{(c-u)^2}{M^2(c-u)^2 - 1} \xi' \right)' + \alpha^2(c-u)^2 \xi = 0, \quad (2.15.5)$$

что с точностью до переопределения числа Маха  $\bar{M}$  соответствует уравнению, использованному в работах [122, 123]. В (2.15.5) штрих обозначает производную по безразмерной координате  $x/a$ . При  $\beta^* \rightarrow \infty$  имеем  $\bar{M} = M$  и ролью магнитного поля в (2.15.5) можно пренебречь. Заметим, что при  $\beta^* \rightarrow 0$  модифицированное число Маха  $\bar{M} \rightarrow 0$ , что соответствует приближению несжимаемой среды.

В другом предельном случае,  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{B}_0$  ( $\theta = \phi$ ), уравнение (2.15.2) приводится к виду

$$\left[ \left( 1 + \beta^* + \frac{\beta^*}{M^2(c-u)^2 - 1} \right) \xi' \right]' + \alpha^2 [M^2 \beta^* (c-u)^2 - 1] \xi = 0. \quad (2.15.6)$$

В последующих расчетах нам потребуется выражение для полного возмущенного давления, которое при  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{B}_0$  связано со смещением  $\xi$  следующим соотношением:

$$P + \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{B}}{4\pi} = -\rho_0 v_A^2 \left( \frac{M^2 \beta^* (c-u)^2}{M^2 (c-u)^2 - 1} + 1 \right) \xi'. \quad (2.15.7)$$

Отметим, что в уравнениях (2.15.5), (2.15.6) использовано число Маха  $M$ . Часто при расчетах колебаний в проводящей среде при наличии магнитного поля вводится альфвеновское число Маха  $M_A^2 = M^2 \beta^*$ , определенное как отношение полуперепада скорости сдвигового течения к альфвеновской скорости. Легко видеть, что при  $\beta^* \rightarrow \infty$  уравнения (2.15.5) и (2.15.6) совпадают и описывают обычное гидродинамическое течение.

**2.15.2. Типы граничных условий.** Для формулировки задачи о структуре колебаний, описываемых уравнениями (2.15.5), (2.15.6) их необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Как отмечалось выше, возможны три вида граничных условий, которые в той или иной вариации встречаются практически во всех задачах об устойчивости сдвиговых течений. Наиболее простой вид они имеют

при наличии твердой стенки на некотором расстоянии  $\Delta$  от сдвигового слоя (скажем от точки  $x = 0$ ). Естественным требованием на этой стенке является обращение в нуль  $v_x$ -компоненты скорости возмущенных колебаний (и смещения  $\xi(\Delta) = 0$ ).

В случае безграничной среды возможны два варианта граничных условий. На асимптотиках  $|x| \gg a$  среда однородна и решение (2.15.2) можно представить в виде

$$\xi = \bar{\xi} \exp(ik_x x). \quad (2.15.8)$$

Рассмотрим нейтрально устойчивую моду колебаний (с нулевым инкрементом  $c_i \equiv \text{Im } c = 0$ ). Если вдали от слоя среда непрозрачна ( $k_x^2 < 0$ ), то естественным является выбор решения, экспоненциально спадающего при  $|x| \rightarrow \infty$ . Если  $k_x^2 > 0$ , то среда прозрачна для рассматриваемых колебаний. Тогда граничным условием на бесконечности для волн, излучаемых сдвиговым течением, является требование отсутствия волн, прибегающих к сдвиговому слою. То есть при  $x \rightarrow \infty$  в качестве граничного условия выбирается функция вида  $\xi = \bar{\xi} \exp(ik_x x)$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  — функция вида  $\xi = \bar{\xi} \exp(-ik_x x)$  (считаем при этом  $k_x > 0$ ).

Для неустойчивых колебаний ( $c_i > 0$ )  $k_x$ -компонента полного волнового вектора ( $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ) на асимптотиках становится комплексной. При этом формально для любых слабонеустойчивых колебаний можно ввести понятие убегających от сдвигового слоя волн, у которых  $\text{Re}(v_{gx}) > 0$  при  $x > 0$  и  $\text{Re}(v_{gx}) < 0$  при  $x < 0$ , где  $v_{gx} = \partial\omega/\partial k_x$  — групповая скорость, с которой осуществляется перенос волновой энергии по координате  $x$ . В соответствии с законом сохранения энергии

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}_{gx} W) = 0,$$

где  $W$  — квадратичная по амплитуде колебаний плотность волновой энергии. Для монохроматических неустойчивых ( $c_i > 0$ ) колебаний при  $x > 0$  выполняется соотношение  $\text{Im } k_x > 0$ , а при  $x < 0$  —  $\text{Im } k_x < 0$ . Это обеспечивает экспоненциальное убывание амплитуды колебаний, убегających от сдвигового слоя. Такое соответствие имеет место только при «хорошо определенной» групповой скорости. Понятия «хорошо» и «плохо» определенной групповой скорости введены в приложении Г, где рассмотрен пример, когда использование «плохо определенной» групповой скорости в граничном условии приводит к неправильному результату. В рассматриваемом нами случае выражение для плотности энергии БМЗ-волн вдали от сдвигового слоя (в однородной среде) имеет вид (см. [99])

$$W = |\xi|^2 \rho_0 \frac{\omega k^2}{k_x \bar{\omega}^3} (2\bar{\omega}^2 - k^2(v_A^2 + v_s^2))(\bar{\omega}^2 - (\mathbf{k}_t \mathbf{v}_A)^2).$$



Запишем выражения для групповой скорости в двух рассматриваемых нами предельных случаях. При  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$  имеем

$$v_{gx} = v_s \frac{1 + \beta^*}{\beta^*} \frac{k_x}{k_t} \frac{M^2}{(c - u)}, \quad (2.15.9)$$

где  $k_x = \pm k_t \sqrt{M^2(c - u)^2 \beta^* / (1 + \beta^*) - 1}$ , а при  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$

$$v_{gx} = \frac{v_s}{\beta^*} \frac{k_x}{k_t} \frac{[M^2(c - u)^2(1 + \beta^*) - 1]^2}{(c - u)^3 [M^2(c - u)^2(1 + \beta^*) - 2]}, \quad (2.15.10)$$

где

$$k_x = \pm k_t \sqrt{\frac{(M^2(c - u)^2 - 1)(M^2 \beta^*(c - u)^2 - 1)}{M^2(c - u)^2(1 + \beta^*) - 1}}, \quad (2.15.11)$$

а знаки  $\pm$  выбираются в соответствии с граничными условиями, обеспечивающими «убегание» энергии от сдвигового слоя. То есть при  $x \rightarrow \infty$  выбирается такой знак  $k_x$  в граничном условии (2.15.9), чтобы выполнялось требование  $\text{Re}(v_{gx}) > 0$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  — требование  $\text{Re}(v_{gx}) < 0$ . Это так называемый принцип причинности: волны уносят энергию от их источника, сдвигового слоя.

Как отмечалось выше, возможны три типа граничных условий в задачах об устойчивости сдвиговых течений. Если среда безграничная, то при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ik_x \xi, \quad (2.15.12)$$

где знак  $k_x$  выбирается так, чтобы  $\text{Re}(v_{gx}) > 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , и  $\text{Re}(v_{gx}) < 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Если имеется жесткая стенка с одной стороны от сдвигового слоя (скажем, в точке  $x = -\Delta$ ), то граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \partial \xi / \partial x = ik_x \xi, & x \rightarrow \infty, \\ \xi = 0, & x = -\Delta, \end{cases} \quad (2.15.13)$$

где знак  $k_x$  выбирается так, чтобы  $\text{Re}(v_{gx}) > 0$ , а если стенки находятся с двух сторон (в точках  $x = \pm\Delta$ ), то граничные условия имеют вид

$$\xi(\pm\Delta) = 0. \quad (2.15.14)$$

Граничные условия для других компонент поля МГД-колебаний можно записать, используя уравнения (Б.13)–(Б.15).

**2.15.3. Неустойчивость сдвигового течения в безграничной среде.** Следует отметить, что наличие магнитного поля по разному проявляется в двух предельных случаях:  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$ . В первом случае, используя вместо обычного числа Маха  $M$  модифицированное число Маха  $\bar{M}$ , мы получили уравнение (2.15.5), которое по форме полностью соответствует уравнению, описывающему обычное гидродинамическое течение (см., например, [122, 123]). Во втором

случае аналогичное преобразование сделать невозможно и магнитное поле в таких течениях, как мы увидим, играет особую роль, приводя к их стабилизации. Рассмотрим два этих предельных случая отдельно.

**Случай  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{B}_0$ .**

Пусть профиль скорости сдвигового течения имеет вид тангенциального разрыва:

$$v_0(x) = \begin{cases} \bar{v}_0 & x > 0, \\ -\bar{v}_0 & x < 0, \end{cases} \quad (2.15.15)$$

что соответствует

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Решение уравнения (2.15.6) в каждом из полупространств, разделенных сдвиговым течением, будем искать в виде (2.15.8). Условиями сшивки решений, полученных при  $x > 0$  и  $x < 0$ , являются требования непрерывности смещения  $\xi$  и полного возмущенного давления на тангенциальном разрыве. Производя в точке  $x = 0$  сшивки (2.13.5), (2.13.7) решений, полученных в этих двух областях, имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\sqrt{\frac{(M^2(c-1)^2(1+\beta^*)-1)(M^2\beta^*(c-1)^2-1)}{M^2(c-1)^2-1}} - \sqrt{\frac{(M^2(c+1)^2(1+\beta^*)-1)(M^2\beta^*(c+1)^2-1)}{M^2(c+1)^2-1}} = 0. \quad (2.15.16)$$

Переносим одно из слагаемых в левую часть и возводя обе части в квадрат, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$c^4 M^4 - 2c^2 M^2(1+M^2) + \left(M^4 - 2M^2 + \frac{2}{1+\beta^*}\right) = 0. \quad (2.15.17)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$c^2 = \frac{1+M^2 \pm \sqrt{4M^2 - (1-\beta^*)/(1+\beta^*)}}{M^2}. \quad (2.15.18)$$

При  $\beta^* > 1$  выражение под радикалом больше нуля. Неустойчивым колебаниям ( $c_i > 0$ ) соответствует знак минус перед радикалом в (2.15.18) при выполнении условия

$$1 - \sqrt{\frac{(\beta^*-1)}{(\beta^*+1)}} < M^2 < 1 + \sqrt{\frac{(\beta^*-1)}{(\beta^*+1)}}, \quad (2.15.19)$$

полученного в [94, 116, 130]. При  $\beta^* \rightarrow \infty$  правое неравенство (2.15.19) дает известный критерий неустойчивости [117] для гидродинамических сдвиговых течений:  $M^2 < 2$ . При переходе к пределу несжимаемой среды ( $M \rightarrow 0$ ), оставляя конечной величину  $M_A^2 = M^2\beta^*$ , из левого

неравенства (2.15.19) получаем другой известный критерий неустойчивости несжимаемой проводящей жидкости в магнитном поле:  $M_A > 1$  [118, 131].

Анализ (2.15.18) показывает, что при  $\beta^* < 1$  выражение под радикалом может оказаться меньше нуля при  $M^2 < M_0^2 = (1 - \beta^*)/4(1 + \beta^*)$ . При этом на первый взгляд кажется, что один из корней должен представлять неустойчивую моду колебаний. Однако более детальный анализ вычислений, приводящих к решению дисперсионного уравнения (2.15.18), показывает, что решение, описывающее неустойчивость при  $\beta^* < 1$ , является фиктивным, поскольку оно не соответствует необходимым граничным условиям при  $|x| \rightarrow \infty$ . Если требовать на обоих асимптотиках наличия волн, убегающих от сдвигового слоя (что определяется знаками их групповой скорости  $v_{gx}$ ), то при  $\beta^* < 1$  решение, экспоненциально убывающее на одной из асимптотик, будет экспоненциально растущим на другой из них. Это связано с «плохо определенной» групповой скоростью таких волн (см. Приложение Г). Таким образом, в безграничной среде с  $\beta^* < 1$  рассматриваемое сдвиговое течение устойчиво. В среде с  $\beta^* > 1$  критерий неустойчивости сдвигового течения, имеющего вид тангенциального разрыва, дается выражением (2.15.19).

Найдем теперь решение уравнения (2.15.6) с граничными условиями (2.15.12) для течения, имеющего вид плавного переходного слоя с профилем скорости (2.15.1). Проинтегрируем это уравнение численно по контуру, проходящему в нижней полуплоскости комплексной переменной  $x/a$  параллельно действительной оси, ниже всех особых точек уравнения (2.15.6), которые соответствуют резонансному взаимодействию различных мод МГД-колебаний.

Поскольку у неустойчивых колебаний особые точки уравнения (2.15.6) расположены в верхней полуплоскости комплексного  $x$ , может показаться, что достаточно провести интегрирование по действительной оси. Однако такой подход применим только для колебаний с достаточно большим значением инкремента, когда особые точки уравнения (2.15.6) далеки от действительной оси. У слабонеустойчивых колебаний они близки к ней, поэтому интегрирование по действительной оси дает ошибку, сопоставимую с величиной самого инкремента  $c_i$ . Граничные условия (2.15.12) сформулированы при  $x \rightarrow \pm\infty$ . При численном интегрировании их следует поставить на конечном удалении от сдвигового слоя, там, где течение становится практически однородным, а решение (2.15.6) имеет вид (2.15.8). В численных расчетах мы ставили граничные условия при  $x = \pm 5a$ . Большее удаление начальной и конечной точек интервала интегрирования практически не сказывается на конечном результате.

Численное решение уравнения (2.15.6) в безграничной среде, для течения, имеющего вид плавного переходного слоя с профилем скорости (2.15.1), представлено на рис. 2.28. На рис. 2.28,а представлено распределение инкремента  $c_i$ , соответствующее  $\beta^* = 10$ ,

а на рис. 2.28,б —  $\beta^* = 1,1$ . Отметим, что область существования неустойчивых колебаний ограничена со стороны малых значений  $M$ . Видно, что в пределе, соответствующем течению типа тангенциального разрыва ( $\alpha = 0$ ), область существования неустойчивых колебаний, определяемая условием (2.15.19), при  $\beta^* \rightarrow 1$  стягивается к  $M = 1$ . Стабилизация колебаний сдвигового течения с числами Маха вне этого интервала обусловлена влиянием сжимаемости среды и натяжения силовых линий магнитного поля (максвелловых натяжений).

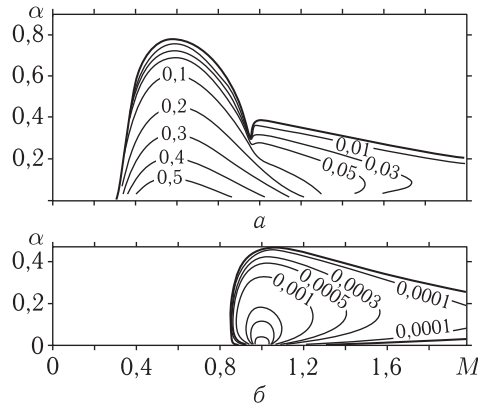


Рис. 2.28. Распределение изолиний инкремента ( $c_i = \text{Im } c$ ) МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$ , генерируемых сдвиговым течением в виде плавного переходного слоя в безграничной среде, при двух значениях параметра  $\beta^*$ : а —  $\beta^* = 10$ , б —  $\beta^* = 1,1$

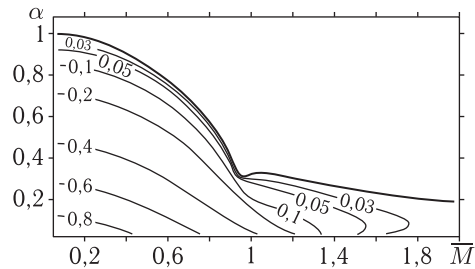


Рис. 2.29. Распределение изолиний инкремента ( $c_i = \text{Im } c$ ) МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$ , генерируемых сдвиговым течением в виде плавного переходного слоя в безграничной среде

**Случай  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$ .** Эта задача, как отмечалось выше, аналогична задаче об устойчивости обычного гидродинамического сдвигового течения. Ее решение для течения с профилем скорости в виде тангенциального разрыва аналогично решению задачи, рассмотренной в предыдущем разделе для случая  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$ . Решение для неустойчивых

излучательных мод колебаний и область их существования определяются в этом случае выражениями (2.15.18) и (2.15.19), в которых следует положить  $\beta^* = \infty$ .

Для нахождения решения в задаче с плавным профилем скорости вида (2.15.1) проинтегрируем численно уравнение (2.15.5) с граничными условиями (2.15.12). На рис. 2.29 представлено распределение в плоскости  $(\alpha, \bar{M})$  изолиний инкремента таких колебаний  $c_i$ . Оно соответствует распределению, полученному в [121, 122]. Область  $\bar{M} < 1$  соответствует неустойчивой поверхностной моде колебаний, амплитуда которых экспоненциально убывает при удалении от сдвигового слоя. Область  $\bar{M} > 1$  соответствует неустойчивой излучательной моде колебаний, убегаящих от сдвигового слоя [117]. Как видно из рисунка, в приближении тангенциального разрыва ( $\alpha \rightarrow 0$ ) область существования неустойчивых колебаний, связанных с излучательной модой, ограничена предельным значением  $\bar{M} < \bar{M}_c = \sqrt{2}$ , которое получается из (2.15.19) в пределе  $\beta^* \rightarrow \infty$ . Для гидродинамических течений это условие для излучательных мод колебаний получено в [117]. Стабилизация колебаний при превышении критического значения  $\bar{M}_c$  обусловлена сжимаемостью среды, определяемой, в том числе, и давлением магнитного поля.

**2.15.4. Неустойчивость сдвигового течения, ограниченного одной неподвижной стенкой.** Из общих соображений очевидно, что наличие твердой стенки должно приводить к изменению режима неустойчивых колебаний. Эти изменения в большей степени должны сказаться на излучательных модах колебаний, которые отражаются от такой стенки. При этом местоположение стенки становится дополнительным фактором, определяющим распределение и величину инкремента колебаний. Рассмотрим, как и в задаче с неограниченным течением, два предельных случая.

**Случай  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$ .** Рассмотрим сдвиговое течение, имеющее вид тангенциального разрыва (2.15.15), с одной стороны от которого на расстоянии  $x = -\Delta$  расположена твердая стенка. Эта задача описывается уравнением (2.15.6) с граничными условиями (2.15.13). В полупространстве  $x > 0$  решение ищем в виде убегаящей волны  $\xi = \bar{\xi} \exp(ik_x x)$ , а с другой стороны от сдвигового слоя — в виде суммы убегаящей от него и отраженной от стенки волн:

$$\xi = \xi_1 \exp(ik_x x) + \xi_2 \exp(-ik_x x). \quad (2.15.20)$$

Из условия непрерывности смещения  $\xi$  и полного возмущенного давления (2.13.5), (2.13.7) в точке  $x = 0$ , получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{M^2(c+1)^2(1+\beta^*)-1}{M^2(c-1)^2(1+\beta^*)-1} \frac{M^2\beta^*(c+1)^2-1}{M^2\beta^*(c-1)^2-1} \frac{M^2(c-1)^2-1}{M^2(c+1)^2-1} = -\operatorname{tg}^2(k_x^- \Delta),$$

где  $k_x^-$  определяется (2.15.11) при  $u = -1$ . Численное решение этого уравнения представлено на рис. 2.30.

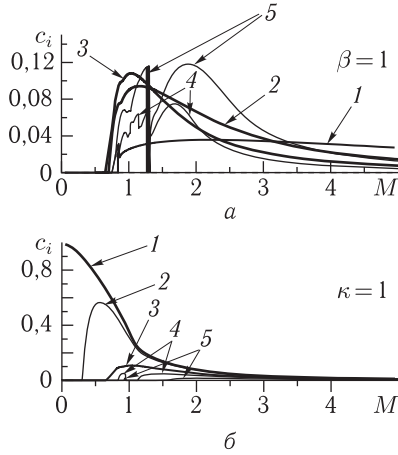


Рис. 2.30. Зависимость инкремента  $c_i(M)$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{B}_0$  сдвигового течения, имеющего вид тангенциального разрыва, ограниченного с одной стороны неподвижной стенкой, при различных значениях параметров  $\beta^*$  и  $\kappa$ : а —  $\beta^* = 1$ , графики 1–5 соответствуют значениям  $\kappa = 0,1, 0,5, 1, 5, 10$ ; б —  $\kappa = 1$ , графики 1–5 соответствуют значениям  $\beta^* = \infty, 10, 1, 0,5, 0,2$

На рис. 2.30, а представлена зависимость  $c_i(M)$  при  $\beta^* = 1$  и для пяти различных значений параметра  $\kappa = k_t \Delta = 0,1, 0,5, 1, 5, 10$ . У всех кривых имеется предельное значение  $M_c$ , ниже которого колебания устойчивы. Наличие нижнего критического значения  $M_c$ , как и в случае безграничной среды, обусловлено стабилизирующим влиянием максвелловых натяжений. Мелкомасштабные осцилляции  $c_i(M)$  имеют место при таких значениях  $M$ , когда аргумент тангенса в правой части дисперсионного уравнения становится большим (т. е.  $|k_x^- \Delta| \gg 1$ ).

Меняя напряженность магнитного поля (параметр  $\beta^*$ ), можно проследить, как изменяется величина критического значения  $M_c$ . На рис. 2.30, б представлены кривые  $c_i(M)$  при  $\kappa = 1$  и пяти различных значениях  $\beta^* = \infty, 10, 1, 0,5, 0,2$ . При  $\beta^* = \infty$  (режим гидродинамического течения), критическое значение  $M_c$  отсутствует. При  $\beta^* \neq \infty$  появляется нижний порог для неустойчивых колебаний  $M_c$ , сдвигающийся по мере уменьшения  $\beta^*$  к  $M = 1$ . При  $\beta^* < 1$  область существования неустойчивых колебаний распадается на две. Первая, соответствующая поверхностной моде, заключена между двумя критическими точками  $M_c < 1$ . Вторая область соответствует излучательной моде и ограничена слева точкой  $M_c > 1$ . Следует отметить, что в отличие от безграничного течения полная стабилизация колебаний не наступает ни при каких, как угодно малых значениях  $\beta^*$ .

Численное решение уравнения (2.15.6) с граничными условиями (2.15.13) для течения с плавным профилем скорости (2.15.1) (при  $\Delta = -20a$ ) представлено на рис. 2.31. Случаи (а, б) соответствуют двум значениям параметра  $\beta^* = 10, 1$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  области существования неустойчивых колебаний соответствуют тем, что получены в задаче об устойчивости тангенциального разрыва. Отметим, что в окрестности  $M = 1$  при  $\alpha > 0,5$  образуется область неустойчивых колебаний со сверхмалым инкрементом  $c_i < 0,01$ . Образование этой области

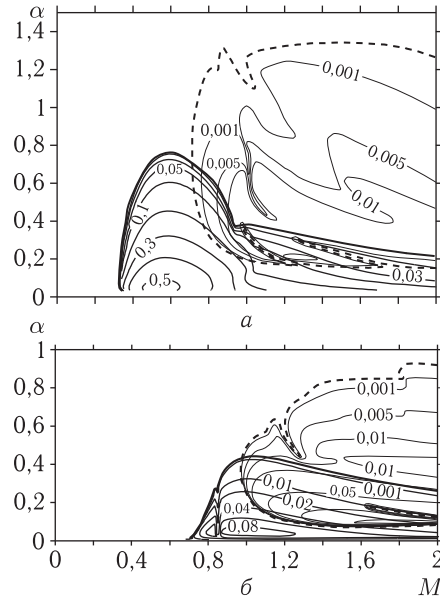


Рис. 2.31. Распределение изолиний инкремента  $c_i$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$  сдвигового течения с плавным переходным слоем, ограниченного с одной стороны неподвижной стенкой ( $\Delta = 20a$ ) при двух различных значениях параметра  $\beta^*$ :  $a - \beta^* = 10$ ,  $б - \beta^* = 1$

связано с колебаниями, отраженными от стенки и прошедшими через сдвиговой слой. В безграничной среде такие колебания отсутствуют.

В отличие от случая без ограничивающих стенок, при наличии одной такой стенки область существования неустойчивых колебаний сдвигового течения не имеет верхнего порога по  $M$ . Этому можно дать следующее объяснение. Известно, что тангенциальный разрыв, наряду с неустойчивыми модами колебаний, генерирует излучательную нейтральную моду [132, 133]. В частности, это приводит к явлению сверхотражения колебаний, падающих на сдвиговой слой. Другими словами, отраженная от сдвигового слоя и прошедшая через него волны имеют амплитуду, большую амплитуды падающей волны. Это происходит как раз в области значений  $M > M_c$ , при которых в безграничном случае тангенциальный разрыв устойчив. Наличие стенки приводит к тому, что появляется отраженная от нее волна, которая падает на сдвиговой слой и отражается от него с большей амплитудой. То есть появляется усиление колебаний, которые в неограниченном течении были нейтрально устойчивыми.

**Случай  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$ .** Напомним, что этот режим колебаний аналогичен колебаниям в обычном гидродинамическом течении. Отличие состоит в том, что они описываются с помощью модифицированного числа

Маха  $\overline{M}$ , учитывающего наличие магнитного давления. Решение уравнения (2.15.5) для течения с профилем скорости в виде тангенциального разрыва соответствует кривой 1 на рис. 2.30, б при  $\beta^* = \infty$ . Для течения с непрерывным профилем скорости (2.15.1) решим численно уравнение (2.15.5) с граничными условиями (2.15.13). На рис. 2.32 представлено распределение инкремента  $c_i$  в плоскости  $(\alpha, \overline{M})$  для колебаний, генерируемых сдвиговым слоем, при наличии неподвижной стенки на расстоянии  $\Delta = -15a$  от него. Основное отличие от случая безграничной среды, как для течений с тангенциальным разрывом скорости, так и для течений с профилем скорости вида (2.15.1), заключается в исчезновении критического значения  $\overline{M} = M_c$ , при превышении которого безграничное течение становится устойчивым. Как уже отмечалось, это объясняется действием механизма сверхотражения колебаний от сдвигового слоя.

При увеличении напряженности магнитного поля неустойчивые колебания в этой области не стабилизируются. В следующем разделе будет показано, что при наличии двух стенок, расположенных по обе стороны от сдвигового слоя, такая область неустойчивых колебаний вообще не образуется.

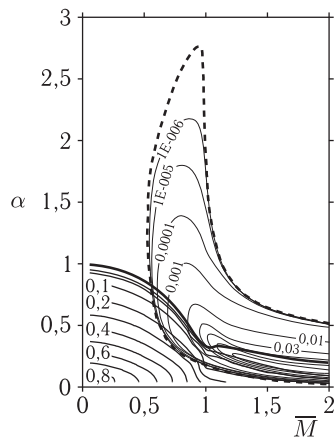


Рис. 2.32. Распределение изолиний инкремента  $c_i$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$  сдвигового течения с плавным переходным слоем, ограниченного с одной стороны неподвижной стенкой ( $\Delta = -15a$ ). Толстые линии соответствуют поверхностной и излучательной модам колебаний, а тонкие линии — моде колебаний, отраженной от стенки

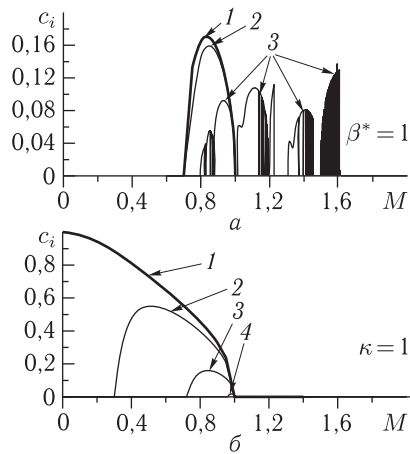


Рис. 2.33. Зависимость инкремента  $c_i(M)$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{V}_0$  сдвигового течения, имеющего вид тангенциального разрыва между двумя неподвижными стенками, при различных значениях параметров  $\beta^*$  и  $\kappa$ : а —  $\beta^* = 1$ , графики 1-3 соответствуют значениям  $\kappa = 0, 1, 1, 5$ ; б —  $\kappa = 1$ , графики 1-4 соответствуют значениям  $\beta^* = \infty, 10, 1, 0, 1$



**2.15.5. Неустойчивость сдвигового течения между двумя ограничивающими стенками.** В работах [124, 127] исследовалась зависимость инкремента колебаний  $c_i(\alpha)$  в сдвиговых течениях с профилем скорости вида (2.15.1) для отдельных значений числа Маха  $M$  и параметра  $\beta^*$ . Граничные условия в этих работах выбирались в виде двух твердых стенок, расположенных по обе стороны от сдвигового слоя, а интегрирование выполнялось по действительной оси  $x$ . При таком подходе, как отмечалось выше, области с малым значением инкремента описываются с большой погрешностью.

**Случай  $k_t \parallel \mathbf{V}_0$ .** Рассмотрим сдвиговое течение в виде тангенциального разрыва (2.15.15) между двумя твердыми стенками ( $x = \pm\Delta$ ). В этом случае решения уравнения (2.15.6), удовлетворяющие граничным условиям (2.15.14), ищутся с обеих сторон от сдвигового слоя в виде (2.15.20). Сшивки (2.13.5), (2.13.7) смещения  $\xi$  и полного возмущенного давления (2.15.7) в точке  $x = 0$  дают дисперсионное уравнение

$$\frac{M^2(c+1)^2(1+\beta^*)-1}{M^2(c-1)^2(1+\beta^*)-1} \frac{M^2\beta^*(c+1)^2-1}{M^2\beta^*(c-1)^2-1} \frac{M^2(c-1)^2-1}{M^2(c+1)^2-1} = \frac{\operatorname{tg}^2(k_x^-\Delta)}{\operatorname{tg}^2(k_x^+\Delta)},$$

где  $k_x^\pm$  определяются (2.15.11) при  $u = \pm 1$  соответственно. Численное решение этого уравнения представлено на рис. 2.33. На рис. 2.33, а представлены графики  $c_i(M)$  при  $\beta^* = 1$  для трех различных значений  $\kappa = k_t\Delta = 0, 1, 5$ . Области существования неустойчивых колебаний ограничены с двух сторон. При достаточном удалении стенок от сдвигового слоя четко проявляется периодичность в распределении инкремента колебаний, связанная с образованием стоячих волн между отражающими поверхностями. Как и в случае с одной стенкой, наблюдаются мелкомасштабные осцилляции инкремента, связанные с увеличением аргументов тангенсов до значений  $|k_x^\pm\Delta| \gg 1$ .

Периодичность в распределении инкремента колебаний можно объяснить следующим образом. Между стенками образуются стоячие волны с собственной частотой, зависящей от величины тангенциального волнового вектора колебаний и расстояния между стенками. Неустойчивость излучательной моды связана с резонансом нейтральной моды, генерируемой сдвиговым слоем, и волны, отраженной от стенки. При изменении параметров течения (числа Маха  $M$ ) различные гармоники стоячих волн попадают в резонанс с нейтральной модой колебаний. При этом наблюдается максимум в распределении инкремента колебаний. Если стенки расположены достаточно близко друг от друга, то частота даже основной собственной гармоники стоячих волн оказывается выше частоты нейтральной моды, излучаемой сдвиговым слоем. В этом случае неустойчивые излучательные моды колебаний не возбуждаются, а инкремент колебаний связан только с неустойчивой поверхностной модой.

Рассмотрим поведение инкремента при различных значениях параметра  $\beta^*$ . Это даст возможность проследить влияние напряженности магнитного поля на величину критического числа Маха  $M_c$ . На рис. 2.33, б приведены зависимости инкремента  $c_i(M)$  при  $\kappa = 1$  для различных значений  $\beta^* = \infty, 10, 1, 0,1$ . При  $\beta^* = \infty$ , соответствующем случаю гидродинамического течения, нижнее критическое число Маха отсутствует. По мере уменьшения  $\beta^*$  оно сдвигается к  $M = 1$ , а область существования поверхностной моды неустойчивых колебаний уменьшается. Стенки в этом случае расположены достаточно близко друг от друга, что проявляется в полной стабилизации излучательной моды колебаний (в области  $M > 1$ ). Однако ни при каких, сколь угодно малых значениях  $\beta^*$  течение не становится полностью устойчивым.

Для течения с плавным профилем скорости (2.15.1) между двумя неподвижными стенками ( $\Delta = \pm 10a$ ) численное решение уравнения (2.15.6) представлено на рис. 2.34. Распределение изолиний инкремента  $c_i$  на рис. 2.34, а, б соответствует значениям  $\beta^* = 10, 1$ .

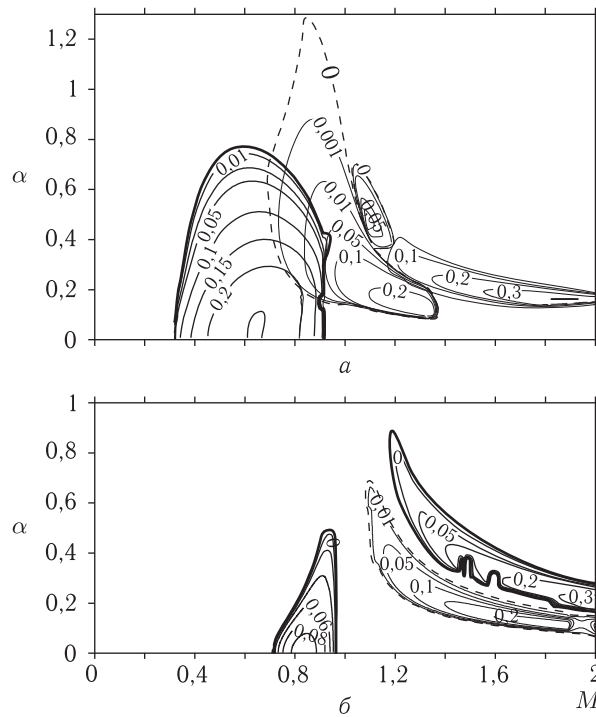


Рис. 2.34. Распределение изолиний инкремента  $c_i$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_t \parallel \mathbf{B}_0$  сдвигового течения в виде плавного переходного слоя между двумя неподвижными стенками ( $\Delta = \pm 10a$ ) при двух различных значениях параметра  $\beta^*$ :  
 а —  $\beta^* = 10$ , б —  $\beta^* = 1$

При уменьшении  $\beta^*$  область существования неустойчивой поверхностной моды сжимается, а абсолютная величина инкремента убывает. Область существования неустойчивых колебаний, связанных с излучательной модой ( $M > 1$ ), имеет характерную квазипериодическую «островную» структуру. Это обусловлено резонансом различных гармоник стоячих между стенками волн с нейтральной модой колебаний, излучаемых сдвиговым течением. При убывании  $\beta^*$  количество островов, их размеры и величина инкремента уменьшаются. При  $\beta^* < 1$  сдвиговое течение близко к устойчивому, хотя полной его стабилизации не наступает ни при каких значениях  $\beta^*$ .

**Случай  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{V}_0$ .** Решение уравнения (2.15.5) для течения с профилем скорости в виде тангенциального разрыва представлено кривой 1 на рис. 2.33, а, соответствующей  $\beta^* = \infty$ . Оно описывает неустойчивую поверхностную моду колебаний, ограниченную справа критическим значением числа Маха  $M_c = 1$ .

Для течения с плавным профилем скорости (2.15.1) решим численно уравнение (2.15.5) с граничными условиями (2.15.14). С точностью до переопределения числа Маха  $\bar{M}$  оно описывает гидродинамическое течение. Распределение изолиний инкремента колебаний сдвигового слоя, расположенного между двумя стенками ( $\Delta = \pm 20a$ ), представлено на рис. 2.35. При достаточном удалении стенок, в той области, где в безграничном течении имеются неустойчивые колебания излучательной моды ( $\bar{M} > 1$ ), в распределении инкремента наблюдается островная квазипериодическая структура. Это объясняется появлением стоячих между отражающими стенками неустойчивых колебаний. При приближении стенок к сдвиговому слою вначале исчезают «островки» неустойчивых излучательных колебаний, а затем уменьшается и область неустойчивых колебаний поверхностной моды. При сближении стенок ближе чем  $\Delta \approx \pm 1,2a$  сдвиговое течение становится полностью устойчивым даже в пределе несжимаемой среды ( $\bar{M} \rightarrow 0$ ).

Таким образом, можно говорить о стабилизирующем влиянии стенок, между которыми расположено сдвиговое течение. Стабилизация неустойчивости излучательной моды колебаний при сближении стенок связана с изменением собственных частот гармоник стоячих между стенками волн. Стабилизацию поверхностной моды колебаний можно объяснить следующим образом. При наличии стенок характерный масштаб неустойчивых колебаний поверхностной моды в направлении поперек сдвигового слоя определяется расстоянием между ними. Если стенки достаточно далеки от сдвигового слоя, то как характерный масштаб, так и область неустойчивых колебаний поверхностной моды, остаются практически такими же, как и в безграничном течении. При сближении стенок этот масштаб уменьшается. При этом область значений поперечного волнового числа  $\alpha$  и числа Маха  $\bar{M}$ , при которых колебания поверхностной моды оказываются неустойчивыми, также уменьшается. При сближении стенок до масштаба порядка характер-

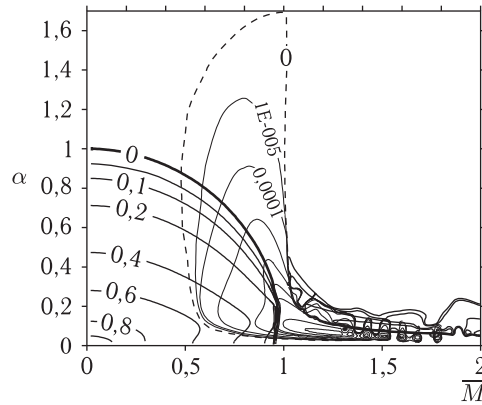


Рис. 2.35. Распределение изолиний инкремента  $\alpha_i$  МГД-колебаний с  $\mathbf{k}_i \perp \mathbf{B}_0$  сдвигового течения в виде плавного переходного слоя, ограниченного с двух сторон неподвижными стенками ( $\Delta = \pm 20a$ ). Толстые линии соответствуют поверхностной и излучательной модам колебаний, а тонкие линии — модам колебаний, отраженным от стенок

ного масштаба профиля скорости сдвигового течения, оно оказывается полностью стабилизированным.

### 2.16. Неустойчивость геомагнитного хвоста, обусловленная сдвиговым течением на магнитопаузе

В разд. 2.15 была рассмотрена неустойчивость сдвигового течения однородной проводящей жидкости при различных граничных условиях вдали от сдвигового слоя. В реальных средах ситуация значительно сложнее. Как правило, эти среды сильно неоднородны. В настоящем разделе мы рассмотрим задачу об обтекании геомагнитного хвоста потоком солнечного ветра в модели среды, приближенной к реальной.

Многие низкочастотные МГД-колебания магнитосферы Земли и других планет Солнечной системы связывают с развитием неустойчивости сдвигового течения плазмы на ее границе (неустойчивости Кельвина–Гельмгольца) [134]. Имеется ряд работ, в которых наблюдаемые геомагнитные пульсации рассматриваются как неустойчивые моды колебаний магнитопаузы [135, 136] и дается теоретическая интерпретация таких колебаний [94, 137, 138].

Реальные магнитосферы очень неоднородны, и это определяет специфику развития неустойчивых колебаний в таких плазменных системах. Характерной особенностью таких колебаний является наличие поверхностей отражения для БМЗ-волн и резонансных поверхностей для альфвеновских и ММЗ-волн, на которых происходит поглощение их энергии [53]. Неустойчивость развивается в пограничном переходном слое вблизи резонансной поверхности, на которой продоль-

ная составляющая фазовой скорости МГД-волны совпадает со скоростью потока плазмы, обтекающего магнитосферу. Устойчивость магнитосферного хвоста определяется конкуренцией этих двух эффектов: развития неустойчивости в переходном слое и поглощения энергии МГД-колебаний на резонансных поверхностях. Имеются работы, где оба эти эффекта рассмотрены совместно [139, 140]. Эти работы выполнены для моделей среды в виде двух полупространств, разделенных переходным слоем со сдвиговым течением плазмы. При этом то из полупространств, которое моделирует магнитосферу, рассматривается как неоднородное.

Имеется еще одна особенность, которую следует учитывать при моделировании неустойчивости МГД-колебаний магнитосферы в потоке солнечного ветра. Это — конечность размера сечения магнитосферы поперек направления потока плазмы. В работе [141] эта задача была решена для модели магнитосферы в виде плазменного цилиндра. Однако в этой работе плазма внутри магнитосферы предполагалась однородной, что исключало резонансное взаимодействие различных МГД-мод колебаний на резонансных поверхностях.

В данном разделе мы решим задачу об устойчивости магнитосферного хвоста, используя для него модель неоднородного плазменного цилиндра [114, 142]. Для качественного анализа поставленной задачи решим ее аналитически в ВКБ-приближении по радиальной координате в модели с границей в виде тангенциального разрыва. Для более реалистичной модели, с границей в виде плавного переходного слоя, решим задачу численно. Как мы увидим, в такой плазменной системе, наряду с локально неустойчивыми модами колебаний границы магнитосферы, существуют также неустойчивые глобальные моды колебаний геомагнитного хвоста, амплитуда которых практически не меняется по его сечению. Такие колебания могут служить, например, источником для накачки магнитосферного резонатора для сверхнизкочастотных МГД-колебаний в ближней к Земле части плазменного слоя (см. [110, 143]).

**2.16.1. Расчет инкремента МГД-неустойчивости магнитопаузы в модели тангенциального разрыва.** Используем для геомагнитного хвоста модель в виде неоднородного плазменного цилиндра, описанную в разд. 2.14.1 и изображенную на рис. 2.22. Распределение плазмы по радиусу в этой модели соответствует долям хвоста. В ней не учитывается в явном виде плазменный слой, имеющийся в реальной магнитосфере. Его присутствие смоделировано распределением альфвеновской скорости и скорости звука по радиусу. Локальная неустойчивость границы геомагнитного хвоста определяется параметрами непосредственно прилегающих к ней областей магнитосферы и солнечного ветра. Неустойчивость глобальных мод, напротив, определяется интегральными характеристиками плазмы хвоста и не зависит от ее детального

распределения по радиусу. Поэтому плазменный слой не может оказать существенного влияния на эти процессы.

Для описания структуры колебаний по радиальной координате используем уравнение (2.14.1) для радиальной компоненты смещения плазмы. Другие компоненты волнового поля описываются уравнениями (2.14.3)–(2.14.5). Радиальная компонента волнового вектора МГД-колебаний в ВКБ-приближении, когда решение (2.14.1) можно представить в виде  $\xi \sim \exp(i \int k_\rho d\rho)$ , описывается выражением (2.14.2).

Решение задачи об устойчивости МГД-колебаний в рассматриваемой цилиндрической модели с границей в виде тангенциального разрыва определяется в ВКБ-приближении величиной радиальной компоненты волнового вектора  $k_\rho^2(\rho)$  с обеих сторон от границы. Проанализируем поведение  $k_\rho^2(\rho)$  в представленной выше модели геомагнитного хвоста. Качественно распределение  $k_\rho^2$  внутри плазменного цилиндра представлено на рис. 2.36 для таких значений параметров  $m, k_z$  и  $\omega$ , при которых внутри магнитосферного хвоста присутствуют все возможные резонансные поверхности и точки поворота для МГД-волн.

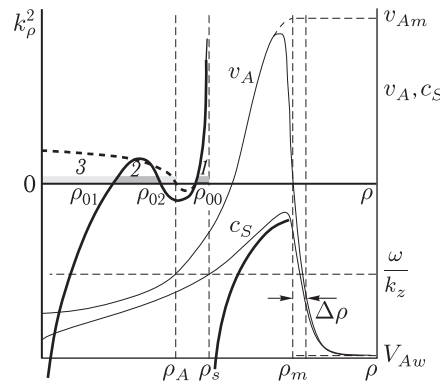


Рис. 2.36. Распределение альфвеновской скорости  $v_A(\rho)$  и скорости ММЗ-волн  $c_s(\rho)$  внутри и вне геомагнитного хвоста в модели плазменного цилиндра (тонкие линии, вертикальная ось — справа). Распределение квадрата ВКБ-компоненты волнового вектора  $k_\rho^2(\rho)$  по радиусу (толстые линии, вертикальная ось — слева, для моды  $m = 0$  — штриховая линия). Координаты  $\rho_A$  и  $\rho_s$  соответствуют резонансным поверхностям для альфвеновских и ММЗ-колебаний,  $\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{02}$  — точки поворота магнитозвуковых волн. Цифрами и оттенками серого обозначены области прозрачности: 1 — для ММЗ-волн, 2 — для БМЗ-волн с  $m \neq 0$  и 3 — для БМЗ-волн с  $m = 0$

Точки поворота определяются нулями функции  $k_\rho^2(\rho)$ . В распределении, представленном на рис. 2.36, их число может варьироваться от одной ( $\rho_{00}$ ) до трех ( $\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{02}$ ). Число точек поворота определяется величинами параметров  $m, k_z$  и  $\omega$ . Так, для аксиально-симметричной моды,  $m = 0$ , точка поворота  $\rho_{02}$  отсутствует, а  $\rho_{01}$  совпадает с точкой  $\rho_A$ ,

которая у колебаний с  $m \neq 0$  определяет местоположение резонансной поверхности для альфвеновских волн. Резонансные поверхности определяются особыми точками уравнения (2.14.1), в которых коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Точка альфвеновского резонанса  $\rho_A$ , определяемая равенством  $\Omega^2(\rho_A) = 0$ , расположена в области непрозрачности в интервале  $(\rho_{02}, \rho_{00})$ . При  $m = 0$  точка  $\rho_A$  представляет собой точку поворота (коэффициент при старшей производной в ней в нуль не обращается). Точка магнитозвукового резонанса  $\rho_s$  определяется обращением в нуль знаменателя в выражении (2.14.2), что дает локальное дисперсионное уравнение для ММЗ-волн при  $|k_\rho^2| \rightarrow \infty$ :  $\omega^2 = k_z^2 c_s^2(\rho_s)$ .

Для БМЗ-волн внутри геомагнитного хвоста может появиться область прозрачности (где  $k_\rho^2(\rho) > 0$ ), которая при  $m \neq 0$  расположена в интервале  $\rho_{01} \leq \rho \leq \rho_{02}$ , а при  $m = 0$  — в интервале  $0 \leq \rho \leq \rho_A$ . В интервале  $\rho_{00} \leq \rho \leq \rho_s$  (где  $\rho_s$  — резонансная поверхность для ММЗ-колебаний) расположена область прозрачности для ММЗ-волн. Как видно из (2.14.2), поведение  $k_\rho^2(\rho)$  в интервале  $0 < \rho < \rho_m$  зависит от величины  $\bar{\omega}_A(\rho)$  на его концах. Изменение распределения  $k_\rho^2(\rho)$  при увеличении фазовой скорости рассматриваемой волны  $\omega/k_z$  можно представить, перемещая мысленно функцию  $k_\rho^2(\rho)$ , показанную на рис. 2.36, слева направо. При  $\omega/k_z \rightarrow 0$  имеем во всей магнитосфере область непрозрачности, соответствующую части графика  $\rho_s < \rho < \rho_m$ , а при  $\omega/k_z \rightarrow \infty$  — область прозрачности, соответствующую части графика  $\rho_{01} < \rho < \rho_{02}$  при  $\rho_{01} \rightarrow 0$  и  $\rho_{02} > \rho_m$ . В зависимости от величин  $\bar{\omega}_{Am}^2$  и  $\bar{\omega}_{Aw}^2$ , определяемых фазовой скоростью волны, к границе могут примыкать как области прозрачности, так и области непрозрачности рассматриваемых колебаний. Здесь и далее нижние индексы  $m, w$  указывают на то, что соответствующие величины определяются параметрами среды в областях магнитосферы и солнечного ветра, примыкающих к границе их раздела.

Условие сшивки решений на границе легко получить, проинтегрировав уравнение (2.14.1) в узком интервале  $(\rho_m - \varepsilon, \rho_m + \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{\rho_0 \Omega^2}{k_\rho^2} \frac{\partial \ln \xi}{\partial \rho} \Big|_{\rho_m - \varepsilon} = \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_\rho^2} \frac{\partial \ln \xi}{\partial \rho} \Big|_{\rho_m + \varepsilon}. \quad (2.16.1)$$

Используя (2.14.3) и (2.14.5), можно показать, что условие сшивки (2.16.1) аналогично требованиям одинакового смещения плазмы по разные стороны границы ( $\xi_{\rho_m - \varepsilon} = \xi_{\rho_m + \varepsilon}$  — условие непротекания) и сохранения полного возмущенного давления поперек границы ( $(P + B_z B_0 / 4\pi)_{\rho_m - \varepsilon} = (P + B_z B_0 / 4\pi)_{\rho_m + \varepsilon}$ ).

Теперь определим граничные условия в рассматриваемой задаче. При  $\rho \rightarrow 0$  граничным условием служит требование ограниченности амплитуды колебаний, описываемых уравнением (2.14.1). Что касается граничного условия при  $\rho \rightarrow \infty$ , то его определение связано с принципом причинности. Нас в данной задаче будут интересовать

такие решения (2.14.1), которые описывают неустойчивые моды колебаний. Такие решения, в соответствии с принципом причинности, описывают волны, убегающие от сгенерировавшего их сдвигового слоя. Другими словами, поток энергии этих волн должен быть направлен от сдвигового слоя.

Как мы видели в разд. 2.15, групповая скорость неустойчивых мод, которые при  $\rho \rightarrow \infty$  уносят энергию от сдвигового слоя, должна быть положительной:  $\text{Re}(v_{g\rho}) > 0$ . Дифференцируя выражение (2.14.2) по  $\omega$ , получаем

$$v_{g\rho} = v_{A\infty} \frac{1 + \beta_\infty^* \text{Re} k_{\rho\infty}}{k_z} \frac{[\bar{\omega}_{A\infty}^2 - \bar{\omega}_{s\infty}^2]^2}{\bar{\omega}_{A\infty}^3 [\bar{\omega}_{A\infty}^2 - 2\bar{\omega}_{s\infty}^2]}. \quad (2.16.2)$$

Граничное условие для убегающей от сдвигового слоя волны при  $\rho \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = i k_{\rho\infty} \xi, \quad (2.16.3)$$

где знак  $k_{\rho\infty} \equiv k_\rho(\rho \rightarrow \infty) = \pm \sqrt{k_{\rho\infty}^2}$  определяется требованием  $\text{Re}(v_{g\rho}) > 0$ .

Для того чтобы составить качественное представление о поведении инкремента неустойчивых колебаний границы магнитосферного хвоста в зависимости от скорости обтекающего его потока солнечного ветра, решим поставленную задачу, используя ВКБ-приближение по координате  $\rho$ . Рассмотрим такие наборы параметров неустойчивых колебаний, при которых резонансные поверхности и точки поворота МГД-волн находятся вдали от границы  $\rho = \rho_m$ , а вблизи от нее для описания колебаний применимо ВКБ-приближение. Если рассматриваемые колебания слабо неустойчивы ( $|\text{Re}(\omega)| \gg |\text{Im}(\omega)|$ ), то область, прилегающую к границе, будем считать областью непрозрачности, если  $\text{Re}(k_\rho^2(\rho_m)) < 0$ , и областью прозрачности, если  $\text{Re}(k_\rho^2(\rho_m)) > 0$ .

Если со стороны солнечного ветра ( $\rho > \rho_m$ ) к границе магнитосферного хвоста примыкает область прозрачности, то для неустойчивой моды решением уравнения (2.14.1) в солнечном ветре будет убегающая от магнитосферы волна. Ее ВКБ-решение имеет вид

$$\xi = C_w \sqrt{\frac{k_\rho}{\rho_0 \Omega^2 \rho}} \exp\left(i \int_{\rho_m}^{\rho} k_\rho d\rho'\right), \quad (2.16.4)$$

где  $C_w$  — произвольная константа. Если же солнечный ветер непрозрачен, то решение имеет вид поверхностной волны, убывающей по амплитуде при удалении от границы:

$$\xi = C_w \sqrt{\frac{k_\rho}{\rho_0 \Omega^2 \rho}} \exp\left(- \int_{\rho_m}^{\rho} \sqrt{-k_\rho^2} d\rho'\right). \quad (2.16.5)$$



Аналогично, если со стороны магнитосферы ( $\rho < \rho_m$ ) к границе примыкает область непрозрачности, то ВКБ-решение (2.14.1) имеет вид поверхностной волны с амплитудой, убывающей внутрь магнитосферы:

$$\xi = C_m \sqrt{\frac{k_\rho}{\rho_0 \Omega^2 \rho}} \exp \left( \int_{\rho_m}^{\rho} \sqrt{-k_\rho^2} d\rho' \right). \quad (2.16.6)$$

Если же со стороны магнитосферы к границе примыкает область прозрачности, то ВКБ-решение со стороны магнитосферы имеет вид

$$\xi = C_m \sqrt{\frac{k_\rho}{\rho_0 \Omega^2 \rho}} \cos \left( \int_{\rho_m}^{\rho} k_\rho d\rho' + \psi \right), \quad (2.16.7)$$

где  $\psi = \int_{\bar{\rho}}^{\rho_m} k_\rho d\rho + \pi/4$  — набег фазы от точки поворота  $\rho = \bar{\rho}$  до границы магнитосферного хвоста  $\rho = \rho_m$ . Если к границе примыкает область прозрачности для ММЗ-волн, то  $\bar{\rho} = \rho_{00}$ , а если область прозрачности для БМЗ-волн, то при  $m = 0$  имеем  $\bar{\rho} = 0$ , а при  $m \neq 0$  —  $\bar{\rho} = \rho_{01}$ .

Проведем сшивку решения в магнитосфере с решением, описывающим структуру колебаний в солнечном ветре. При этом будем рассматривать границу магнитосферного хвоста как тангенциальный разрыв при  $\rho = \rho_m$ . Отметим, что в этом приближении, которое можно определить как локальное, дисперсионные свойства колебаний определяются параметрами среды, непосредственно примыкающей к границе изнутри и снаружи. Результат в этом случае не зависит от изменения свойств среды вдали от тангенциального разрыва. Производя сшивку (2.16.1), получаем дисперсионное уравнение, которое запишем в следующем виде:

$$b \frac{c^2 - 1}{\frac{(c - M_A)^2}{\epsilon^2} - 1} = \begin{cases} -\sqrt{k_{\rho m}^2/k_{\rho w}^2}, & \text{для } \operatorname{Re} k_{\rho m}^2, \operatorname{Re} k_{\rho w}^2 < 0, \\ i\sqrt{-k_{\rho m}^2/k_{\rho w}^2}, & \text{для } \operatorname{Re} k_{\rho m}^2 < 0, \operatorname{Re} k_{\rho w}^2 > 0, \\ -\operatorname{ctg} \psi \sqrt{-k_{\rho m}^2/k_{\rho w}^2}, & \text{для } \operatorname{Re} k_{\rho m}^2 > 0, \operatorname{Re} k_{\rho w}^2 < 0, \\ i \operatorname{ctg} \psi \sqrt{k_{\rho m}^2/k_{\rho w}^2}, & \text{для } \operatorname{Re} k_{\rho m}^2, \operatorname{Re} k_{\rho w}^2 > 0, \end{cases} \quad (2.16.8)$$

где обозначено:  $b = B_{0m}^2/B_{0w}^2$ ,  $c = \omega/k_z v_{Am}$  — безразмерная фазовая скорость,  $M_A = v_{0w}/v_{Am}$  — альфвеновское число Маха, определенное по скорости  $v_{Am}$ . В этих же обозначениях

$$k_{\rho m}^2 = k_z^2 \left( \frac{c^4}{c^2(1 + \beta_m^*) - \beta_m^*} - 1 - \kappa_m^2 \right),$$

$$k_{\rho w}^2 = k_z^2 \left( \epsilon^{-2} \frac{(c - M_A)^4}{(c - M_A)^2(1 + \beta_w^*) - \epsilon^2 \beta_w^*} - 1 - \kappa_m^2 \right),$$

где  $\beta_{m,w}^* = v_{Sm,w}^2/v_{Am,w}^2$ ,  $\kappa_m = m/k_z\rho_m$ ,  $\epsilon = v_{Aw}/v_{Am}$  (считаем  $v_{Aw} \ll \ll v_{Am}$ ). Будем искать решение дисперсионного уравнения (2.16.8) методом возмущений по малому параметру  $\epsilon \ll 1$ , полагая

$$c = c_0 + \epsilon c_1 + \dots \quad (2.16.9)$$

В нулевом порядке теории возмущений имеем  $c_0 = M_A$ . В первом порядке теории возмущений, возводя в квадрат левую и правую части (2.16.8), получаем уравнение для  $c_1$ :

$$\bar{b}^2 (M_A^2 - 1)^2 \left( \frac{c_1^4}{c_1^2(1 + \beta_w^*) - \beta_w^*} - 1 - \kappa_m^2 \right) = \pm (c_1^2 - 1)^2 k_{\rho m 0}^2, \quad (2.16.10)$$

где  $k_{\rho m 0}^2 \equiv k_{\rho m}^2(c = M_A)$ . Знак плюс справа и  $\bar{b} = b$  соответствуют  $\text{Re}(k_{\rho m}^2) < 0$ , знак минус и  $\bar{b} = b \text{tg}(\psi + \pi/4)$  соответствуют  $\text{Re}(k_{\rho m}^2) > 0$ . Уравнение (2.16.10) — шестого порядка относительно  $c_1$ , и его решение можно искать численно. Однако в случае  $|c_1| \gg 1$  (но  $\epsilon|c_1| \ll c_0$ ) его приближенно можно свести к биквадратному уравнению

$$c_1^4 \mp c_1^2 \frac{\bar{b}^2 (M_A^2 - 1)^2}{k_{\rho m 0}^2 (1 + \beta_w^*)} \pm \frac{\bar{b}^2}{k_{\rho m 0}^2} (1 + \kappa_m^2) (M_A^2 - 1)^2 = 0. \quad (2.16.11)$$

Решение (2.16.11) при  $\text{Re}(k_{\rho m}^2) < 0$  имеет вид

$$c_1^2 = \frac{b^2 (M_A^2 - 1)^2}{2k_{\rho m 0}^2 (1 + \beta_w^*)} \pm \sqrt{\frac{b^4 (M_A^2 - 1)^4}{4k_{\rho m 0}^4 (1 + \beta_w^*)^2} - \frac{b^2 (M_A^2 - 1)^2 (1 + \kappa_m^2)}{k_{\rho m 0}^2}}. \quad (2.16.12)$$

Очевидно, что условие  $|c_1| \gg 1$  выполняется при  $b \gg 1$  и  $|M_A^2 - 1| \gtrsim 1$ . Величина

$$k_{\rho m 0}^2 = k_z^2 \left( \frac{M_A^4}{M_A^2 (1 + \beta_m^*) - \beta_m^*} - 1 - \kappa_m^2 \right)$$

является действительной и, следовательно, при  $k_{\rho m 0}^2 > 0$  ( $c_1^2 > 0$ ) неустойчивых колебаний нет, а для  $k_{\rho m 0}^2 < 0$  решение для неустойчивой моды получается при выборе знака минус перед радикалом в (2.16.12). Легко проверить, что  $k_{\rho m 0}^2 < 0$  при  $M_A < M_0$  и  $M_1 < M_A < M_2$ , где  $M_0^2 = \beta_m^*/(1 + \beta_m^*)$ , а  $M_{1,2}^2$  являются корнями биквадратного уравнения  $k_{\rho m 0}^2 = 0$ :

$$M_{1,2}^2 = \frac{(1 + \kappa_m^2)(1 + \beta_m^*)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + \kappa_m^2)^2 (1 + \beta_m^*)^2}{4} - \beta_m^* (1 + \kappa_m^2)}.$$

При  $\beta_m^* \ll 1$  имеем приближенные выражения  $M_1^2 \approx M_0^2 + M_0^4/M_2^2 < 1$  и  $M_2^2 \approx (1 + \kappa_m^2)(1 + \beta_m^*) > 1$ .

Как следует из второго уравнения (2.16.8), при  $\text{Re}(k_{\rho w}^2) > 0$ , что соответствует области прозрачности в солнечном ветре, величина  $c_1^2$  не может быть действительной, что противоречит решению (2.16.12)

при  $k_{\rho m 0}^2 < 0$ . В этом случае неустойчивых колебаний нет. В случае  $\text{Re}(k_{\rho w}^2) < 0$ , что соответствует первому уравнению (2.16.8), знаки в левой и правой частях уравнения совпадают только при  $M_A > 1$ . Следовательно, при  $\text{Re}(k_{\rho m}^2) < 0$  неустойчивые колебания раскачиваются на границе магнитосферного хвоста в диапазоне параметров сдвигового течения

$$1 < M_A < M_2. \quad (2.16.13)$$

Этот вывод соответствует тому, что был сделан в [141].

Решение (2.16.11) при  $\text{Re}(k_{\rho}^2) > 0$  вдали от полюсов ( $\bar{b}^2 = \infty$ ) и нулей ( $\bar{b}^2 = 0$ ) функции  $\bar{b} = b \text{tg}(\psi + \pi/4)$  имеет вид

$$c_1^2 = -\frac{\bar{b}^2(M_A^2 - 1)^2}{2k_{\rho m 0}^2(1 + \beta_w^*)} \pm \sqrt{\frac{\bar{b}^4(M_A^2 - 1)^4}{4k_{\rho m 0}^4(1 + \beta_w^*)^2} + \frac{\bar{b}^2(M_A^2 - 1)^2(1 + \kappa_m^2)}{k_{\rho m 0}^2}}. \quad (2.16.14)$$

Как и в случае  $k_{\rho m 0}^2 < 0$ , решения, соответствующие области прозрачности со стороны солнечного ветра ( $\text{Re}(k_{\rho w}^2) > 0$ ), описывают только устойчивые колебания. Неустойчивые решения получаются при  $k_{\rho m 0}^2 > 0$ , что соответствует диапазонам параметров  $M_0 < M_A < M_1$  и  $M_A > M_2$ . При этом структура инкремента неустойчивых колебаний описывается дискретным набором значений фазовой скорости  $c = c_{0n}$ , которые определяются частотами собственных мод быстрых магнитозвуковых волн, распространяющихся в БМЗ-волноводе в долях геомагнитного хвоста. Их дисперсионное уравнение имеет вид

$$\psi(c_{0n}) = \pi \left( n - \frac{1}{4} \right),$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер собственной гармоники волноводной моды.

При  $M_A > M_2$  неустойчивым решениям соответствуют только положительные (правые относительно корней дисперсионного уравнения) ветки функций:  $\bar{b}(M_A) = b \text{tg}(\psi(M_A) + \pi/4) > 0$ , а при  $M_0 < M_A < M_1 < 1$  — только отрицательные (левые):  $\bar{b}(M_A) = b \text{tg}(\psi(M_A) + \pi/4) < 0$ . Первый из этих диапазонов ( $M_A > M_2$ ) соответствует примыканию к границе магнитосферного хвоста области прозрачности для БМЗ-волн, а второй ( $M_0 < M_A < M_1$ ) — области прозрачности для ММЗ-волн. Можно показать, что при приближении к полюсам и к нулям функции  $\bar{b}(M_A)$  получающиеся решения описывают только устойчивые колебания ( $\text{Im}(c) < 0$ ).

На рис. 2.37, а в качестве примера представлено численное решение дисперсионного уравнения (2.16.11) для азимутальной гармоники  $m = 1$  с продольной компонентой волнового вектора  $k_z \rho_m = 2$  и следующими параметрами среды:  $\epsilon = v_{Aw}/v_{Am} = 0,08$ ,  $\beta_m^* = 0,005$ ,  $b = B_{0m}^2/B_{0w}^2 = 16$ . При этом в волноводе для ММЗ-волн не уменьшается ни одна собственная мода. Поэтому при  $M_A < 1$  хвост магнитосферы устойчив. При  $M_A > 1$  рассматриваемые колебания неустойчивы в диапазоне (2.16.13), а также в интервалах, соответствующих отмеченным выше корням уравнения (2.16.14). Каждый из этих

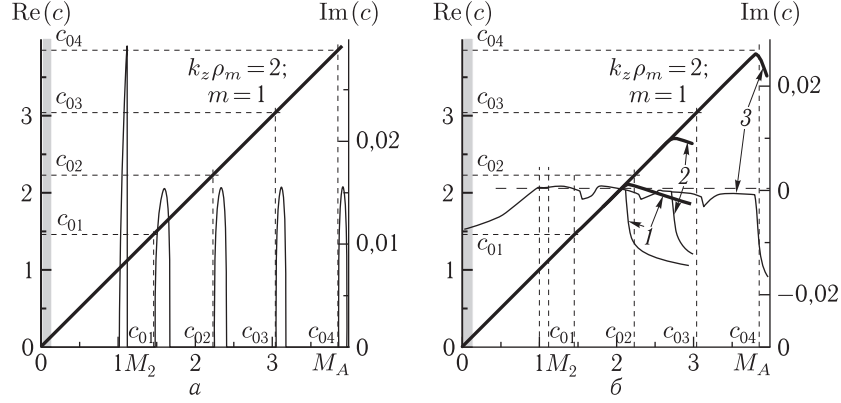


Рис. 2.37. Зависимость частоты ( $\text{Re}(c)$  — жирная линия) и инкремента ( $\text{Im}(c)$  — тонкие линии) неустойчивых колебаний, раскачивающихся на границе геомагнитного хвоста, от числа Маха  $M_A$ . *а* — решение, полученное в ВКБ-приближении для модели с границей в виде тангенциального разрыва, где  $c_{01,02,03,04}$  — корни дисперсионного уравнения  $\text{tg}(\psi(c_{0n}) + \pi/4) = 0$ , определяющего в ВКБ-приближении собственные частоты БМЗ-волновода ( $c_{0n}$ ) в долях геомагнитного хвоста. *б* — решение для модели с границей в виде плавного переходного слоя с характерной толщиной  $\Delta \equiv \Delta_\rho/\rho_m = 0,066$  для тех же параметров среды, что и на рисунке *а*

корней соответствует одной из собственных гармоник магнитосферного БМЗ-волновода, прилегающего к магнитопаузе. При увеличении  $M_A$  неустойчивыми становятся все более высокие гармоники. Как видно из рис. 2.37, *а*, нет заметной зависимости максимальных величин инкремента колебаний от  $M_A$ , однако ширина диапазонов неустойчивых колебаний уменьшается при увеличении  $M_A$  (и номера собственной гармоники  $n$ ).

**2.16.2. Неустойчивость геомагнитного хвоста в модели с размытой границей.** Рассмотрим задачу МГД-устойчивости магнитосферного хвоста в потоке солнечного ветра для модели с границей в виде плавного переходного слоя. В этом случае решение уравнения (2.14.1) можно найти только численно. Для удобства поиска численных решений и сравнения их с результатами, полученными выше в ВКБ-приближении, перепишем (2.14.1) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\tilde{b}(\eta)[\bar{\omega}_A^2(\eta) - 1]}{\eta \kappa^2(\eta)} \frac{\partial \eta \xi}{\partial \eta} + (k_z \rho_m)^2 \tilde{b}(\eta)[\bar{\omega}_A^2(\eta) - 1] \xi = 0, \quad (2.16.15)$$

где обозначено  $\eta = \rho/\rho_m$ ,  $\bar{\omega}_A(\eta) = [c - M_A \tilde{v}_0(\eta)]/\tilde{v}_A(\eta)$ ,  $\tilde{v}_A(\eta) = v_A(\eta)/v_{Am}$ ,  $\tilde{v}_0(\eta) = v_0(\eta)/v_{0m}$ ,  $\tilde{b}(\eta) = B_0^2(\eta)/B_{0m}^2$ ,

$$\kappa^2(\eta) = \frac{\bar{\omega}_A^4}{\bar{\omega}_A^2(\eta)(1 + \beta^*(\eta)) - \beta^*(\eta)} - 1 - \frac{\kappa_m^2}{\eta^2},$$

$\beta^*(\eta) = v_A^2(\eta)/v_s^2(\eta)$ . Профили скорости сдвигового течения  $\tilde{v}_0(\eta)$ , альфвеновской скорости  $\tilde{v}_A(\eta)$  и квадрата напряженности магнитного поля  $\tilde{b}(\eta)$  смоделируем следующими функциями:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_0(\eta) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \frac{\eta - 1}{\Delta} \right], \\ \tilde{v}_A(\eta) &= \frac{1}{2} \left[ \epsilon + \epsilon_0 + (1 - \epsilon_0)\sqrt{\eta} + (\epsilon - \epsilon_0 - (1 - \epsilon_0)\sqrt{\eta}) \operatorname{th} \frac{\eta - 1}{\Delta} \right], \\ \tilde{b}(\eta) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + b^{-1} - (1 - b^{-1}) \operatorname{th} \frac{\eta - 1}{\Delta} \right],\end{aligned}$$

где  $\Delta = \Delta_\rho/\rho_m$  ( $\Delta_\rho$  — характерная толщина переходного слоя магнитопаузы),  $\epsilon = v_{Aw}/v_{Am}$ ,  $\epsilon_0 = v_A(0)/v_{Am}$ ,  $b = B_{0m}^2/B_{0w}^2$ , а функцию  $\beta^*(\eta)$  определим из условия равновесия плазменной конфигурации (2.6.1), которое можно записать в виде

$$\beta^*(\eta) = \frac{\beta_m^*}{\tilde{b}(\eta)} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{\tilde{b}(\eta)} - 1 \right).$$

Численные расчеты выполнены при следующих значениях безразмерных параметров:  $\Delta = 0,066$ ,  $b = 16$ ,  $\epsilon_0 = 0,016$ ,  $\epsilon = 0,008$ ,  $\beta_m^* = 0,005$ . Решена краевая задача для определения частоты колебаний (в безразмерных переменных — параметра  $c$ ), удовлетворяющих граничным условиям при  $\eta \rightarrow \infty$  (2.16.3) и  $\eta \rightarrow 0$ . Последнее требование означает, что решение (2.16.15) должно при  $\eta \rightarrow 0$  совпадать с конечным по амплитуде решением (2.14.7) приближенного уравнения (2.14.6).

Результаты численных расчетов инкремента неустойчивых колебаний для азимутальной гармоники  $m = 1$  с продольным волновым числом  $k_z \rho_m = 2$  представлены на рис. 2.37, б. Сравнение с рис. 2.37, а, представляющим в локальном приближении решение этой же задачи для колебаний в модели магнитосферного хвоста с границей в виде тангенциального разрыва, показывает существенные отличия в распределении инкремента колебаний.

Во-первых, следует отметить, что решение для магнитосферного хвоста с размытой границей при  $M_A > M_2$  представляет собой на графике  $c(M_A)$  «пучок» кривых, которые при переходе через собственные значения  $\operatorname{Re}(c) = c_{0n}$  расходятся от основного значения  $c \approx M_A$  (решения, полученного в предыдущем разделе в нулевом приближении). Решения были найдены методом численного интегрирования уравнения (2.16.15) с поиском собственных значений  $c$ , соответствующих заданным граничным условиям.

На рис. 2.37, б представлены решения в интервале значений  $0 < c < M_A < 4$  для гармоник  $n = 1, 2, 3$  магнитосферного БМЗ-волновода. Сравнение с рис. 2.37, а показывает многократное уменьшение инкремента колебаний. При этом неустойчивыми остаются только несколько первых гармоник (в нашем случае  $n = 1, 2$ ). Объясняется это размытием пограничного слоя и конкуренцией эффектов диссипации колебаний

на резонансных поверхностях и неустойчивости сдвигового течения. Смещаются также точки собственных значений  $c_{0n}$  (на рис. 2.37, б указаны те же точки  $c_{0n}$  и  $M_2$ , что и на рис. 2.37, а, полученные в ВКБ-приближении), и расширяется первая область неустойчивых колебаний.

На рис. 2.38, а показана пространственная структура неустойчивых колебаний, близких ко второй гармонике  $n = 2$ . Для неустойчивой моды колебаний, как следует из анализа ВКБ-решения, солнечный ветер является областью непрозрачности. Резонансные поверхности для альфвеновских и ММЗ-волн, определяемые соответственно условиями  $\bar{\omega}_A(\rho_A) = \pm 1$  и  $\bar{\omega}_A(\rho_s) = \pm \bar{\omega}_s(\rho_s)$ , расположены в области переходного слоя магнитопаузы.

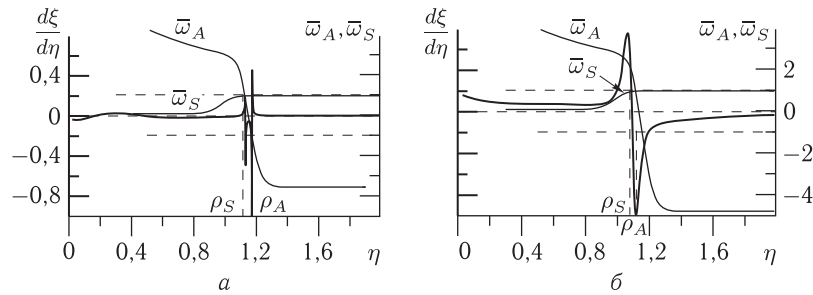


Рис. 2.38. Радиальная структура неустойчивых колебаний геомагнитного хвоста для азимутальной гармоники  $m = 1$ , нормированная на максимальное значение  $|d\xi/d\eta|_{max}$ : а — колебания, близкие ко второй гармонике  $n = 2$  собственных мод, распространяющихся в БМЗ-волноводе в долях геомагнитного хвоста ( $k_z \rho_m = 2$ ), б — колебания «глобальной моды» при малых значениях  $k_z \rho_m \rightarrow 0$

Отметим, что при любых реально наблюдаемых скоростях обтекания магнитосферы Земли солнечным ветром, область значений  $M_A > 1$  никогда не достигается. Из проведенного выше анализа следует, что граница геомагнитного хвоста всегда остается локально устойчивой. Однако, как будет показано ниже, существует еще один тип неустойчивых колебаний магнитосферного хвоста, которые оказываются неустойчивыми при любых, сколь угодно малых значениях скорости обтекания.

**2.16.3. Неустойчивость глобальных мод МГД-колебаний магнитосферного хвоста.** На рис. 2.39 представлено распределение инкремента еще одного типа неустойчивых МГД-колебаний магнитосферного хвоста. Их существование никак не следует из расчетов локальной неустойчивости магнитопаузы, проведенных выше в ВКБ-приближении. Они имеют пространственную структуру, представленную на рис. 2.38, б, характерной особенностью которой является практически постоянная величина первой производной  $d\xi/d\rho$  по радиусу геомагнитного хвоста. Их можно определить как «глобальные моды»

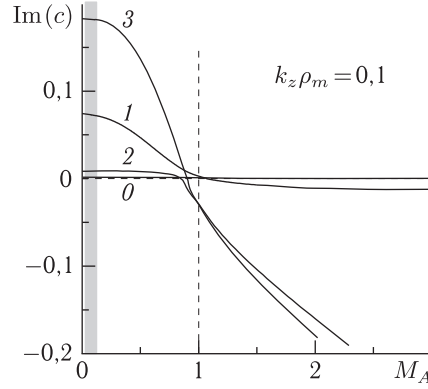


Рис. 2.39. Зависимость инкремента «глобальных мод» МГД-колебаний геомагнитного хвоста от числа Маха  $M_A$  для первых азимутальных гармоник  $m = 0, 1, 2, 3$  и  $k_z \rho_m = 0,1$

колебаний геомагнитного хвоста. Обращают на себя внимание следующие особенности этих колебаний:

1. Для гармоник с  $m \neq 0$  при  $k_z \rho_m \rightarrow 0$  графики распределения  $\text{Im}(c(M_A))$  не зависят от величины  $k_z \rho_m$ .
2. При увеличении  $M_A$  инкремент колебаний уменьшается и для гармоник с  $m \neq 0$  обращается в нуль при некотором  $M_A = M_{Ac}$  (величина  $M_{Ac}$  различна для разных азимутальных гармоник  $m$ ). При  $M_A > M_{Ac}$  эти гармоники становятся устойчивыми ( $\text{Im}(c) < 0$ ).
3. Для гармоники  $m = 0$  графики  $\text{Im}(c(M_A))$  существенно различаются для колебаний с различными  $k_z \rho_m$  и не имеют какого-либо предельного значения  $M_{Ac}$ , ограничивающего область существования неустойчивых колебаний.
4. Абсолютные значения инкремента азимутальных гармоник с  $m \neq 0$  значительно больше, чем для колебаний с  $m = 0$ .

Для качественного анализа этих особенностей глобальных мод при  $k_z \rho_m \rightarrow 0$  рассмотрим следующую упрощенную модель. Поскольку внутри плазменного цилиндра производная  $d\xi/d\rho$  почти постоянна, в (2.14.1) можно пренебречь второй производной от  $\xi$ :

$$\left( \nabla_\rho \ln \left( \frac{\rho_0 \Omega^2}{k_\rho^2} \right) + \rho^{-1} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + k_\rho^2 \xi \approx 0.$$

Решение этого уравнения

$$\xi = C \exp \left( - \int_{\rho_m}^{\rho} \frac{k_\rho^2 \rho'}{\rho' \nabla_{\rho'} \ln \left( \rho_0 \Omega^2 / k_\rho^2 \right) + 1} d\rho' \right),$$

где  $C$  — произвольная постоянная. При  $k_z \rho_m \ll 1$  солнечный ветер для глобальных мод с  $m \neq 0$  является областью непрозрачности. Если рассматривать магнитопаузу как тангенциальный разрыв, то из условия сшивки (2.16.1) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$-\frac{\rho_{0w}\Omega_w^2}{\sqrt{-k_{\rho w}^2}} = \frac{\rho_{0m}\Omega_m^2}{k_{\rho m}^2} \left( \rho_m^{-1} - \frac{k_{\rho m}^2}{\nabla_\rho \ln(\rho_{0m}\Omega_m^2/k_{\rho m}^2) + \rho_m^{-1}} \right).$$

Или в безразмерном виде

$$\frac{(c - M_A)^2/\epsilon^2 - 1}{\sqrt{-k_{\rho w}^2/k_z^2}} = \frac{b(c^2 - 1)}{k_z \rho_m} \left[ (k_z \rho_m)^2 - \frac{k_z^2}{k_{\rho m}^2} \right], \quad (2.16.16)$$

где

$$k_{\rho w}^2 = k_z^2 \left( \frac{(c - M_A)^4/\epsilon^4}{(c - M_A)^2(1 + \beta_w)/\epsilon^2 - \beta_w} - 1 - \kappa_m^2 \right),$$

$$k_{\rho m}^2 = k_z^2 \left( \frac{c^4}{c^2(1 + \beta_m) - \beta_m} - 1 - \kappa_m^2 \right).$$

$b = B_{0m}^2/B_{0w}^2 > 1$ ,  $\epsilon = v_{Aw}/v_{Am} \ll 1$ ,  $\kappa_m = m/k_z \rho_m$ . В (2.16.16) для оценки положено  $|\nabla_\rho \ln(\rho_{0m}\Omega_m^2/k_{\rho m}^2)| \lesssim \rho_m^{-1}$ .

Будем искать решение (2.16.16) по теории возмущений в виде разложения (2.16.9) по малому параметру  $\epsilon$ . В нулевом приближении имеем  $c_0 = M_A$ . В первом порядке теории возмущений получаем

$$c_1^2 \approx b(M_A^2 - 1)(m + m^{-1}) + 1. \quad (2.16.17)$$

Это решение описывает неустойчивую моду ( $c_1^2 < 0$ ) при условии

$$M_A < M_{Ac} = \sqrt{1 - \frac{m}{b(m^2 + 1)}}.$$

Таким образом, видно, что инкремент неустойчивости ( $c_1$ ) в пределе  $k_z \rho_m \rightarrow 0$  не зависит от  $k_z \rho_m$ . При этом область неустойчивости ограничена условием  $0 < M_A < M_{Ac}$ , что соответствует особенностями неустойчивых глобальных мод с  $m \neq 0$ , отмеченным выше в пунктах 1-2.

Для глобальной моды  $m = 0$  в том же предельном случае  $k_z \rho_m \ll 1$  солнечный ветер является областью прозрачности. При этом из условия сшивки (2.16.1) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$i \frac{(c - M_A)^2/\epsilon^2 - 1}{\sqrt{k_{\rho w}^2/k_z^2}} = \frac{b(c^2 - 1)}{k_z \rho_m} \left[ (k_z \rho_m)^2 - \frac{k_z^2}{k_{\rho m}^2} \right]. \quad (2.16.18)$$



В нулевом порядке теории возмущений, как и прежде, имеем  $c_0 = M_A$ . В первом порядке для  $c_1$  получаем следующее приближенное выражение:

$$c_1 \approx i \frac{b}{k_z \rho_m} \frac{(M_A + 1)(M_A^2 - M_0^2)}{(M_A - \beta_m^*) \sqrt{1 + \beta_w^*}},$$

где  $M_0^2 = \beta_m^*/(1 + \beta_m^*)$ .

Легко проверить, что рассматриваемая мода неустойчива ( $\text{Im}(c_1) > 0$ ) во всем диапазоне изменения  $M_A$ , кроме узкого интервала  $M_0 < M_A < \beta_m^*$ . Это соответствует особенностям неустойчивых глобальных мод с  $m = 0$ , отмеченным выше в пунктах 3 и 4. Отметим, что к полученным таким образом решениям следует относиться только как к иллюстрации качественного поведения глобальных мод колебаний. Точные значения их инкремента, полученного численно, могут значительно отличаться от этих упрощенных оценок.

Для примера на рис. 2.40 показана зависимость инкремента азимутальных гармоник с  $m = 0$  и  $m = 1$  от частоты неустойчивых глобальных мод при различных скоростях обтекающего магнитосферу потока солнечного ветра. Расчеты выполнены путем численного интегрирования уравнения (2.16.15) при изменении параметра  $k_z \rho_m$  в интервале  $0 < k_z \rho_m < 8$ . Обращает на себя внимание как различие в качественном поведении данных гармоник колебаний, так и их абсолютные значения — инкременты для гармоники  $m = 1$  многократно превосходят те, что соответствуют гармонике  $m = 0$ . При максимальной скорости обтекания  $v_0 = 800$  км/с гармоника  $m = 0$  становится полностью устойчивой. Отрицательные значения частоты  $f = \text{Re}(\omega)/2\pi < 0$  соответствуют неустойчивым волнам,  $z$ -компонента фазовой скорости которых  $\text{Re}(\omega)/k_z$  направлена против обтекающего магнитосферу потока

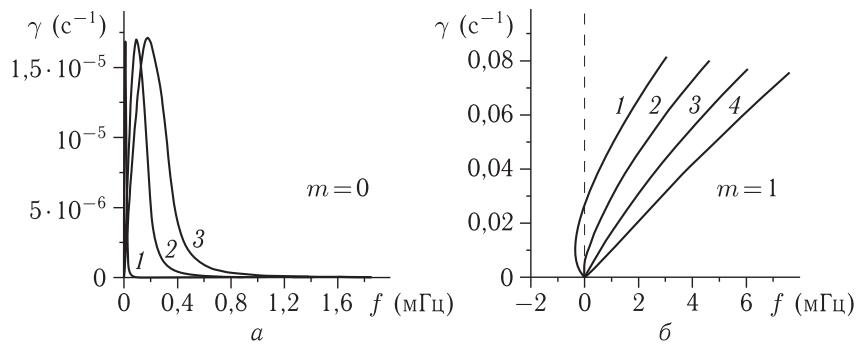


Рис. 2.40. Зависимость инкремента  $\gamma \equiv \text{Im}\omega$  неустойчивых азимутальных гармоник  $m = 0$  и  $m = 1$  от частоты глобальных мод  $f = \text{Re}(\omega)/2\pi$  при различных скоростях обтекающего магнитосферу потока солнечного ветра: 1 —  $v_0 = 200$  км/с, 2 —  $v_0 = 400$  км/с, 3 —  $v_0 = 600$  км/с, 4 —  $v_0 = 800$  км/с

плазмы солнечного ветра, а положительные  $f = \text{Re}(\omega)/2\pi > 0$  — волнам, бегущим по потоку.

Как нетрудно убедиться, рассмотренные выше «глобальные моды» неустойчивых колебаний геомагнитного хвоста в предельном случае  $k_z \rho_m \rightarrow 0$  соответствуют колебаниям с  $\mathbf{k}_t \perp \mathbf{B}_0$ , рассмотренным в разделе 2.15. Раскачка таких колебаний, как мы видели, происходит в гидродинамическом режиме, при котором отсутствует нижний порог их неустойчивости по скорости обтекания магнитосферы солнечным ветром. В пределе  $k_z = 0$  у таких колебаний исчезают резонансные поверхности для альфвеновских и ММЗ-волн, и они не поглощаются фоновой плазмой. Распространение этих колебаний происходит в основном в азимутальном направлении в виде поверхностных волн, а все сечение геомагнитного хвоста можно для них рассматривать как «тонкий слой» (см. рис. 2.22, а). Неустойчивые «глобальные моды» могут служить постоянным источником возбуждения колебаний в самом большом магнитосферном БМЗ-резонаторе, расположенном в ближней к Земле части токового слоя геомагнитного хвоста.

### 2.17. Проникновение поля МГД-колебаний из магнитосферы на Землю

Во всех рассмотренных выше задачах градиент неоднородности фоновой плазмы предполагался направленным поперек силовых линий магнитного поля. Такое приближение вполне оправдано в главном порядке теории возмущений в большинстве задач о структуре магнитосферных МГД-колебаний. Дело в том, что магнитное поле не препятствует свободному растеканию заряженных частиц плазмы вдоль магнитных силовых линий, но существенно ограничивает их перемещение в поперечном направлении. Поэтому основная компонента градиента плотности плазмы в магнитосфере направлена поперек магнитных оболочек.

Совсем другая ситуация вблизи ионосферы, где градиент плотности плазмы определяется в основном гравитационным полем. Здесь стратификация плазмы почти вертикальная, а силовые линии геомагнитного поля в общем случае наклонены к поверхности Земли. Вблизи полюсов направления векторов градиента плотности плазмы и геомагнитного поля почти параллельны, а вблизи экватора они нормальны друг к другу. Таким образом, в полярных и средних широтах основной является продольная (вдоль силовых линий геомагнитного поля) компонента градиента плотности ионосферной плазмы.

Большая часть геомагнитных пульсаций, наблюдаемых на поверхности Земли, связана с альфвеновскими волнами, проникающими сюда из магнитосферы. Электромагнитное поле этих волн испытывает существенную трансформацию при прохождении из магнитосферы на Землю через ионосферу и атмосферу [144–146]. Влияние ионосферы на поле альфвеновских волн, проникающих на Землю, проявляется

по-разному в различных частотных диапазонах. Наиболее существенным элементом этого процесса является то, что волны возбуждают токи в проводящем слое ионосферы. Эти токи генерируют в ионосфере БМЗ-волны, которые дают основной вклад в электромагнитные колебания, индуцируемые на поверхности Земли.

Для самых короткопериодных колебаний (в частотном диапазоне  $Pc1$ :  $f \sim 10^{-1}$ –1 Гц) в F2-слое ионосферы имеется волновод, в котором БМЗ-волны могут распространяться вдоль ионосферы. Исследованию связи поля этих волн с электромагнитными колебаниями на Земле посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ. Теоретическое исследование волноводных БМЗ-волн и колебаний, индуцируемых ими на Земле, проведено в работах [147–151].

Для колебаний в более низкочастотном диапазоне ( $f \sim 10^{-2}$ – $10^{-1}$  Гц) в E-слое ионосферы создаются условия для возбуждения своеобразного ионосферного вистлера. Это явление впервые теоретически исследовано в работе [152] и более подробно — в работе [153]. В этом же частотном диапазоне в верхней ионосфере (F2-слой и выше) создаются условия для частичного запираения альфвеновских волн в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля — возникает так называемый ионосферный альфвеновский резонатор (ИАР) [154, 155].

Несколько проще условия проникновения на Землю для самых низкочастотных альфвеновских колебаний магнитосферы ( $f \sim 10^{-2}$ – $10^{-3}$  Гц). Длина волны таких колебаний вдоль силовых линий геомагнитного поля много больше всех характерных масштабов неоднородности ионосферной плазмы в этом направлении. В связи с этим ионосферу, с математической точки зрения, во многих случаях можно рассматривать как тонкий слой. Это позволяет достаточно далеко продвинуться в аналитическом исследовании проникновения поля таких волн из магнитосферы на Землю. Одно из первых исследований, где был теоретически исследован этот процесс, представлено в работе [156]. В ней рассмотрена задача о падении из магнитосферы и отражении от ионосферы волн с  $k_{\perp} \ll k_{\parallel}$ , где  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — продольная (вдоль геомагнитного поля) и поперечная составляющие волнового вектора альфвеновской волны в магнитосфере (которая в данной работе считалась однородной). Дальнейшее развитие теории на случай  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$  сделано в работе [144]. В ней рассмотрен случай, когда геомагнитное поле нормально к поверхности Земли, в отличие от работы [156], где оно считалось наклонным. Аналогичные расчеты для волн с произвольным соотношением  $k_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$  в модели с нормальным к поверхности Земли геомагнитным полем проведены в работе [157].

Дальнейшее развитие теории связано с работами, где рассматривалось прохождение альфвеновских волн через горизонтально неоднородную ионосферу. В работах [158–161] горизонтальная неоднородность ионосферы моделировалась плоскостью, на которой имеется ограниченная область, проводимость которой отличается от проводимости остальной ионосферы. При этом проводимость как внутри, так и вне

этой области считалась однородной. В работах [162, 163] рассмотрен другой тип неоднородной ионосферы, проводимость которой меняется непрерывно в горизонтальном направлении. В этих работах показано, что поворот эллипса поляризации поля геомагнитных пульсаций при проникновении их из магнитосферы на Землю может существенно отличаться от  $\pi/2$ , как это следует из модели горизонтально однородной ионосферы.

Следующий шаг в исследовании проникновения поля альфвеновских колебаний на Землю через ионосферу сделан в работах [164, 165]. Здесь рассмотрено прохождение на Землю альфвеновских волн с произвольной поперечной структурой в модели среды с произвольным наклоном силовых линий геомагнитного поля и распределением по высоте альфвеновской скорости и компонент тензора проводимости.

Практически во всех упомянутых выше работах ионосфера рассматривается как область, при прохождении которой поле падающих из магнитосферы альфвеновских волн претерпевает существенную трансформацию. При этом часть энергии этих волн поглощается из-за их диссипации в проводящем слое ионосферы [146, 166, 167]. В качестве источников альфвеновских волн в этих работах рассматриваются различные физические процессы, протекающие как внутри, так и вне магнитосферы (см. обзоры [13, 168]). Ионосфера при этом считается пассивным элементом среды. Исключением являются работы [158, 169] (см. также монографию [170]), где в качестве источника альфвеновских волн рассматривается модуляция проводимости ионосферы в присутствии внешнего электрического поля. При этом используется модель оптически тонкой ионосферы с вертикальным геомагнитным полем.

Далее мы рассмотрим процесс проникновения поля МГД-волн из магнитосферы на Землю для двух моделей среды. Сначала рассмотрим задачу для модели с вертикальным геомагнитным полем. Этот случай наиболее простой и дает возможность найти граничные условия на верхней границе ионосферы как для альфвеновских, так и для магнитозвуковых волн в присутствии сторонних токов в ионосфере. Это понадобится в последующих задачах о структуре поперечно-мелкомасштабных МГД-волн в магнитосфере, для которых сторонние токи в ионосфере играют роль источника. Затем такая же задача будет решена для альфвеновских волн в модели среды с наклонным геомагнитным полем.

**2.17.1. Граничные условия для МГД-волн на верхней границе ионосферы в модели «тонкого слоя» с вертикальным магнитным полем.** Важную роль в процессе проникновения поля МГД-волн из магнитосферы на Землю играет распределение альфвеновской скорости и проводимости среды по высоте. Типичные высотные распределения этих параметров представлены на рис. 2.41, *а*. Можно выделить два слоя ионосферы: проводящий слой (III) и верхнюю ионосферу (IV)

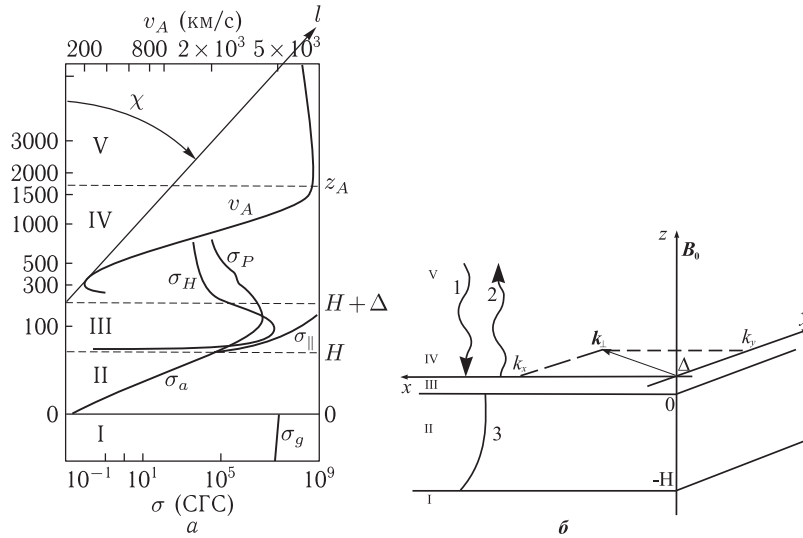


Рис. 2.41. *a* — типичные высотные профили компонент тензора проводимости  $\hat{\sigma}$  и альфвеновской скорости  $v_A$ . Римскими цифрами пронумерованы слои: I — Земля с изотропной проводимостью  $\sigma_g$ , II — атмосфера с проводимостью  $\sigma_a$ , III — нижняя ионосфера с поперечными педерсеновской  $\sigma_P$  и холловской  $\sigma_H$  проводимостями и продольной проводимостью  $\sigma_{||}$  (штриховая линия — модельное значение  $\sigma_{||} = \infty$ ), IV — верхняя ионосфера, где  $\sigma_P, \sigma_H \rightarrow 0$ , V — магнитосфера. *б* — модель околоземной среды с вертикальным магнитным полем и схема проникновения на Землю альфвеновских волн: 1 — падающая из магнитосферы, 2 — отраженная от ионосферы, 3 — поле волны, проникающей на Землю

до высоты  $z_A \approx (1.5 \div 2) \cdot 10^3$  км. Здесь происходит резкое изменение высотного профиля альфвеновской скорости от быстрого роста в верхней ионосфере, к медленному убыванию в магнитосфере. Именно эта высота является верхней границей ионосферного альфвеновского резонатора (ИАР).

Рассмотрим задачу о падении из магнитосферы и отражении от ионосферы монохроматической МГД-волны вида  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — частота волны. Тип волны определим ниже. Рассмотрим наиболее простую плоско-слоистую модель среды с вертикальным геомагнитным полем. Используем декартову систему координат  $(x, y, z)$ , в которой ось  $z$  направлена вдоль силовых линий магнитного поля (рис. 2.41, б). Будем считать магнитосферу и атмосферу однородными, а длину волны вдоль магнитного поля достаточно большой для того, чтобы рассматривать ионосферу как тонкий слой ( $k_z \Delta \ll 1$ , где  $\Delta$  — толщина проводящего слоя ионосферы).

Поскольку основную роль в определении структуры низкочастотных МГД-колебаний играет проводимость среды, для их описания удобнее всего использовать компоненты электрического поля. Монохроматиче-

ские МГД-колебания при наличии сторонних токов в среде описываются уравнениями Максвелла вида

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{V}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = -ik_0 \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j} + \mathbf{j}^{ext}], \quad (2.17.1)$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  — электрическое и магнитное поля колебаний,  $\mathbf{j}^{ext}$  — сторонний ток, не связанный с полем самих колебаний. Для интересующих нас низкочастотных МГД-волн ток проводимости в слоях с анизотропной проводимостью (в нашей модели — в ионосфере и магнитосфере) можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_P \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_H \left[ \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \times \mathbf{E}_{\perp} \right], \quad (2.17.2)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — вектор геомагнитного поля,  $E_{\parallel}$  — продольная (вдоль  $\mathbf{B}_0$ ) и  $\mathbf{E}_{\perp}$  — поперечная составляющие возмущенного электрического поля,  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_P$  и  $\sigma_H$  — продольная, педерсеновская и холловская проводимости среды.

Наиболее простой вид уравнения (2.17.1) имеют для компонент поля  $E_{\perp}$  и  $E_b = [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{E}_{\perp}] / B_0$ , где компонента  $E_b$  является проекцией поля  $\mathbf{E}$  на направление, перпендикулярное  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}_{\perp}$ , дополняющее систему координат до правосторонней. В однородных слоях (в проводящей земле и в атмосфере, где  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \sigma_h = \sigma$ ), в которых отсутствуют сторонние токи, получаем из (2.17.1)

$$\frac{\partial^2 E_{\perp,b}}{\partial z^2} - [k_{\perp}^2 - k_0(k_0 + i\kappa)] E_{\perp,b} = 0, \quad (2.17.3)$$

где  $\kappa = 4\pi\sigma/c$ . Рассмотрим модель среды, в которой проводимость земли бесконечна. Тогда решения этих уравнений в атмосфере ( $-H < z < 0$ ), удовлетворяющие граничным условиям  $E_{\perp,b}(z = -H) = 0$ , для колебаний с  $k_0 \ll k_{\perp}$ ,  $\kappa$  имеют вид

$$E_{\perp,b} = C_{\perp,b} \operatorname{sh} \left[ (z + H) \sqrt{k_{\perp}^2 - ik_0 \kappa} \right], \quad (2.17.4)$$

где  $C_{\perp,b}$  — произвольные константы.

В анизотропных слоях (ионосфере и магнитосфере) продольная проводимость плазмы много больше ее поперечной проводимости  $\sigma_{\parallel} \gg \gg \sigma_P, \sigma_H$ . В пределе  $\sigma_{\parallel} \rightarrow \infty$  из (2.17.1) имеем  $E_{\parallel} = 0$ . Для двух других компонент электрического поля, получаем систему связанных уравнений:

$$\frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial z^2} + ik_0 \kappa_P E_{\perp} = ik_0 \kappa_H E_b - i \frac{4\pi k_0}{c} j_{\perp}^{ext}, \quad (2.17.5)$$

$$\frac{\partial^2 E_b}{\partial z^2} - (k_{\perp}^2 - ik_0 \kappa_P) E_b = -ik_0 \kappa_H E_{\perp} - i \frac{4\pi k_0}{c} j_b^{ext}. \quad (2.17.6)$$

Здесь пренебрежено малыми слагаемыми, пропорциональными  $k_0 \ll \ll k_{\perp}$ ,  $\kappa_{P,H}$  (где  $\kappa_{P,H} = 4\pi\sigma_{P,H}/c$ ). Проинтегрируем эти уравнения

по толщине проводящего слоя ионосферы ( $0 < z < \Delta$ ), полагая его тонким слоем для рассматриваемых колебаний. Это означает, что поле колебаний практически не меняется внутри этого слоя,  $\mathbf{E}(\Delta) \approx \mathbf{E}(0)$ , и его компоненты можно вынести из-под интегралов. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z} \Big|_{\Delta} &= \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z} \Big|_0 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \Sigma_P E_{\perp} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \Sigma_H E_b - i \frac{4\pi\omega}{c^2} J_{\perp}^{\text{ext}}, \\ \frac{\partial E_b}{\partial z} \Big|_{\Delta} &= \frac{\partial E_b}{\partial z} \Big|_0 + k_{\perp}^2 \Delta E_b - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \Sigma_P E_b - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \Sigma_H E_{\perp} - i \frac{4\pi\omega}{c^2} J_b^{\text{ext}}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Sigma_{P,H} = \int_0^{\Delta} \sigma_{P,H}(z) dz$$

— интегральные педерсеновская и холловская проводимости ионосферы,

$$J_{\perp,b}^{\text{ext}} = \int_0^{\Delta} j_{\perp,b}^{\text{ext}}(z) dz,$$

— заинтегрированные по высоте плотности сторонних токов, протекающих в проводящем слое ионосферы. Подставляя в эти уравнения решения на нижней кромке ионосферы в виде (2.17.4) и переходя к системе координат  $(x, y, z)$ , в которой

$$E_x = (k_x E_{\perp} + k_y E_b) / k_{\perp}, \quad E_y = (k_x E_b - k_y E_{\perp}) / k_{\perp}$$

и справедливы аналогичные соотношения для компонент вектора  $(J_x^{\text{ext}}, J_y^{\text{ext}})$ , получаем на верхней границе токового слоя следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_{\Delta} &= (k_{\perp} + k_y^2 \Delta) E_x - k_x k_y \Delta E_y - \\ &\quad - i \frac{4\pi\omega}{c^2} (\Sigma_P E_x - \Sigma_H E_y + J_x^{\text{ext}}), \end{aligned} \quad (2.17.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{\Delta} &= (k_{\perp} + k_x^2 \Delta) E_y - k_x k_y \Delta E_x - \\ &\quad - i \frac{4\pi\omega}{c^2} (\Sigma_P E_y + \Sigma_H E_x + J_y^{\text{ext}}). \end{aligned} \quad (2.17.8)$$

Здесь мы использовали условие  $k_0^2, k_0 z \ll k_{\perp}^2$ , естественное для низкочастотных МГД-волн. Теперь мы разделим граничные условия для разных веток МГД-колебаний, используя для поперечного вектора электрического поля колебаний его представление в виде разложения (2.7.4) на потенциальную и вихревую составляющие:

$$E_x = -ik_x \varphi + ik_y \psi, \quad E_y = -ik_y \varphi - ik_x \psi.$$

Напомним, что скалярный потенциал колебаний  $\varphi$  описывает поле альфвеновских волн, а продольная компонента векторного потенциала  $\psi$  — поле магнитозвуковых волн. Подставляя эти выражения в (2.17.7), (2.17.8), получим граничные условия для альфвеновских и магнитозвуковых волн на верхней границе проводящего слоя ионосферы, которые запишем в виде

$$\varphi(\Delta) = i \frac{v_P}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\Delta} + \frac{\Sigma_H}{\Sigma_P} \psi(\Delta) - i \frac{k_x J_x^{ext} + k_y J_y^{ext}}{k_{\perp}^2 \Sigma_P}, \quad (2.17.9)$$

$$\psi(\Delta) = i \frac{v_P}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\Delta} - \frac{\Sigma_H}{\Sigma_P} \varphi(\Delta) + i \frac{k_y J_x^{ext} - k_x J_y^{ext}}{k_{\perp}^2 \Sigma_P}, \quad (2.17.10)$$

где  $v_P = c^2/4\pi\Sigma_P$  — характерная скорость распространения низкочастотного вистлера в ионосфере (см. [153]). Отметим, что в этих уравнениях мы опустили некоторые слагаемые, которые для колебаний, имеющих большую длину волны вдоль магнитного поля (а именно такие колебания мы будем далее рассматривать), дают только малые поправки к фазе отраженной волны. Оставленные члены уравнений (2.17.9), (2.17.10) описывают следующие физические эффекты. Первые слагаемые в правых частях описывают затухание соответствующих веток МГД-волн за счет их диссипации, связанной с конечной педерсеновской проводимостью ионосферного токового слоя.

Вторые слагаемые связаны с генерацией полей падающей на ионосферу волны другой ветки МГД-колебаний за счет возбуждения холловских токов. Другими словами, падающая на ионосферу альфвеновская волна порождает не только отраженную альфвеновскую, но и магнитозвуковую волну, сгенерированную в ионосфере холловскими токами. И, аналогично, падающая на ионосферу магнитозвуковая волна отражается от ионосферы в виде суммы магнитозвуковой и альфвеновской волн.

Третьи слагаемые в правых частях (2.17.9), (2.17.10) описывают сторонние токи в ионосфере, которые могут служить источником соответствующих МГД-волн в магнитосфере. Используя условия замкнутости токов  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  и отсутствия токов в атмосфере, последнее слагаемое в (2.17.9) можно записать в виде

$$j_z^{ext}(\Delta) = -i(k_x J_x^{ext} + k_y J_y^{ext}),$$

т.е. источником альфвеновских волн в магнитосфере могут служить колебания интенсивности продольных сторонних токов на верхней границе токового слоя ионосферы. Аналогично, последнее слагаемое в (2.17.10) можно представить в виде

$$\int_0^{\Delta} [\text{rot } \mathbf{j}^{ext}]_z dz = i(k_x J_y^{ext} - k_y J_x^{ext}),$$

т.е. источником магнитозвуковых волн в магнитосфере могут быть вихревые сторонние токи в проводящем слое ионосферы.



**2.17.2. Проникновение альфвеновских волн из магнитосферы на Землю в модели околоземной среды с наклонным магнитным полем.** Задача о проникновении поля МГД-волн из магнитосферы на Землю в модели среды с наклонным магнитным полем значительно сложнее рассмотренной выше задачи, где использована модель с вертикальным полем. Рассмотрим ее, следуя работам [164, 172]. Для решения полученных выше уравнений (2.17.3) и уравнений, аналогичных (2.17.5), (2.17.6) для модели с наклонным геомагнитным полем, выберем следующие системы координат. При исследовании поля электромагнитных колебаний земную поверхность с необходимой для нас точностью будем полагать плоской. Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $x$  которой направим по магнитному меридиану с юга на север, ось  $y$  — по параллели с запада на восток, а ось  $z$  — вертикально вверх по нормали к поверхности Земли (рис. 2.42).

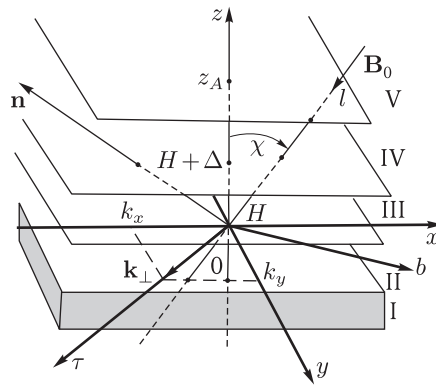


Рис. 2.42. Взаимное расположение трех систем координат, использованных в задаче о проникновении поля МГД-волн из магнитосферы на Землю для модели околоземной среды с наклонным геомагнитным полем:  $(x, y, z)$ ,  $(\tau, b, z)$  и  $(n, y, l)$ . Римскими цифрами обозначены следующие слои: I — Земля с проводимостью  $\sigma_g$ , II — атмосфера с проводимостью  $\sigma_a$ , III — нижняя ионосфера (E-слой) и IV — верхняя ионосфера с анизотропными проводимостями, V — магнитосфера

Компоненты возмущенного электромагнитного поля являются функциями координат и времени (скажем, компонента  $B_x = B_x(x, y, z, t)$ ). Предполагая стационарность среды, эти компоненты можно представить в виде фурье-разложения по гармоникам с определенной частотой  $\omega$ :

$$B_x(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_x(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Учитывая горизонтальную однородность среды, можно провести фурье-разложение по пространственным гармоникам с определенными

значениями горизонтальных составляющих волнового вектора  $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ :

$$\tilde{B}_x(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \bar{B}_x(k_x, k_y, z, \omega) \exp(ik_x x + ik_y y). \quad (2.17.11)$$

Именно эти фурье-гармоники будут использоваться в дальнейших расчетах, причем для краткости мы не будем выписывать их зависимость от аргументов  $k_x, k_y$ , и  $\omega$ .

При решении уравнений (2.17.3) в изотропных средах — в земле и в атмосфере — используем систему координат  $(\tau, b, z)$ , повернутую относительно системы  $(x, y, z)$  вокруг оси  $z$ . При этом ось  $\tau$  направим вдоль горизонтального волнового вектора  $\mathbf{k}_\perp$ , а ось  $b$  — в той же горизонтальной плоскости, перпендикулярно оси  $\tau$ . Между горизонтальными составляющими вектора возмущенного магнитного поля волны имеются соотношения

$$\bar{B}_\perp = (k_x/k_\perp)\bar{B}_x + (k_y/k_\perp)\bar{B}_y, \quad \bar{B}_b = -(k_y/k_\perp)\bar{B}_x + (k_x/k_\perp)\bar{B}_y$$

и аналогичные соотношения для компонент возмущенного электрического поля.

В анизотропных средах — ионосфере и магнитосфере — используем систему координат  $(n, y, l)$ , повернутую относительно системы  $(x, y, z)$  на угол  $\chi$  вокруг оси  $y$  так, что ось  $l$  направлена вдоль  $\mathbf{B}_0$  (см. рис. 2.42). Ось  $n$  лежит в меридиональной плоскости и направлена перпендикулярно осям  $l$  и  $y$ . В этой системе координат

$$B_n = B_x \cos \chi + B_z \sin \chi, \quad B_l = -B_x \sin \chi + B_z \cos \chi \quad (2.17.12)$$

и аналогично для электрических компонент поля.

**Поле низкочастотных электромагнитных колебаний в земле и в атмосфере.** Рассмотрим модель однородной земли с конечной проводимостью  $\sigma_g$ . В толще земли решения (2.17.3) для компонент возмущенного электромагнитного поля, удовлетворяющие граничному условию — ограниченности амплитуды колебаний, имеют вид

$$\bar{E}_b(z) = \bar{E}_b(0) \exp(k_g z), \quad \bar{B}_b(z) = \bar{B}_b(0) \exp(k_g z),$$

где точка  $z = 0$  соответствует границе Земля–атмосфера, а  $k_g = \sqrt{k_\perp^2 - ik_0 \kappa_g}$ ,  $\kappa_g = 4\pi\sigma_g/c$ . Другие компоненты электромагнитного поля в изотропных слоях выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp &= -\frac{1}{\kappa - ik_0} \frac{\partial \bar{B}_b}{\partial z}, & \bar{E}_z &= i \frac{k_0}{\kappa - ik_0} \bar{B}_b, \\ \bar{B}_\perp &= \frac{i}{k_0} \frac{\partial \bar{E}_b}{\partial z}, & \bar{B}_z &= \frac{k_\perp}{k_0} \bar{E}_b. \end{aligned} \quad (2.17.13)$$

Для решений в земле здесь следует положить  $\kappa = \kappa_g$ . Ввиду высокой проводимости земли в дальнейших расчетах мы будем для простоты использовать предел  $\kappa_g \rightarrow \infty$ , что дает  $E_{\perp}(0) = E_b(0) = 0$ .

Проводимость атмосферы  $\sigma_a$  много меньше проводимости земли  $\sigma_g$ , и по всей ее толщине ( $0 < z < H$ ) мы будем предполагать выполнение условия  $k_{\perp}^2 \gg k_0 \kappa_a$ , где  $\kappa_a = 4\pi\sigma_a/c$ . В результате получим решения для компонент  $B_{\perp}$  и  $E_b$  в виде

$$\overline{B}_{\perp}(z) = B_{\perp}(0) \operatorname{ch}(k_{\perp} z), \quad \overline{E}_b(z) = -i \frac{k_0}{k_{\perp}} B_{\perp}(0) \operatorname{sh}(k_{\perp} z). \quad (2.17.14)$$

Таким образом, при  $z = H$  имеем

$$\overline{B}_{\perp}(H) = i \frac{k_{\perp}}{k_0} E_b(H) \operatorname{cth}(k_{\perp} H). \quad (2.17.15)$$

С необходимой для нас точностью при  $z = H$  можно считать

$$\overline{B}_b(H) = 0.$$

Это уравнение используется в качестве второго граничного условия для решения задачи в ионосфере.

**Поле низкочастотных электромагнитных колебаний в ионосфере.** Наиболее просто система уравнений, аналогичных (2.17.5), (2.17.6), в модели ионосферы с наклонным магнитным полем записывается в системе координат  $(n, y, l)$ . Если ввести четырехкомпонентный вектор-столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \overline{E}_n \\ \overline{E}_y \\ \overline{B}_y \\ \overline{B}_n \end{pmatrix},$$

то такая система уравнений может быть представлена в виде

$$-i \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \widehat{Q} \alpha + \widehat{q} \alpha + i g. \quad (2.17.16)$$

Здесь матрица  $\widehat{Q}$  состоит из компонент горизонтального волнового вектора  $k_{\perp} = (k_x, k_y)$ , а матрица  $\widehat{q}$  — из компонент  $\kappa_{P,H} = 4\pi\sigma_{P,H}/c$ :

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} k_x \operatorname{tg} \chi & 0 & k_0 / \cos \chi & 0 \\ 0 & k_x \operatorname{tg} \chi & 0 & -k_0 / \cos \chi \\ -\frac{k_y^2}{k_0 \cos \chi} & \frac{k_x k_y}{k_0 \cos^2 \chi} & k_x \operatorname{tg} \chi & -k_y \frac{\operatorname{tg} \chi}{\cos \chi} \\ -\frac{k_x k_y}{k_0} & \frac{k_x^2}{k_0 \cos \chi} & -k_y \sin \chi & -k_x \operatorname{tg} \chi \end{pmatrix},$$

$$\widehat{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_P}{\cos \chi} & -\frac{\kappa_H}{\cos \chi} & 0 & 0 \\ -\kappa_H \cos \chi & -\kappa_P \cos \chi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, в (2.17.16) присутствует вектор-столбец сторонних токов

$$g = \frac{4\pi}{c \cos \chi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_n^{ext} \\ -j_y^{ext} \end{pmatrix}.$$

Как будет видно из последующих расчетов, компоненты этого вектора много меньше компонент вектора  $\widehat{Q}\alpha$ . Таким образом, можно искать решение системы (2.17.16) методом возмущений. В нулевом приближении имеем систему уравнений

$$-i \frac{\partial \alpha^{(0)}}{\partial z} = \widehat{Q}\alpha^{(0)}, \quad (2.17.17)$$

решения которой имеют вид

$$\alpha^{(0)}(z) = \psi \exp(ik_z z). \quad (2.17.18)$$

Подставляя (2.17.18) в (2.17.17), получаем систему алгебраических уравнений для  $k_z$ , решения которой имеют вид

$$k_z^{(1)} = k_z^{(2)} = k_x \operatorname{tg} \chi \equiv k_{zA}, \quad k_z^{(3)} = ik_{\perp} \equiv k_{zf}, \\ k_z^{(4)} = -ik_{\perp} \equiv k_{zf}^*.$$

Корни  $k_z^{(1)}$  и  $k_z^{(2)}$  соответствуют альфвеновской, а  $k_z^{(3)}$  и  $k_z^{(4)}$  — магнитозвуковой волнам с частотой  $\omega = 0$ . В дальнейших расчетах нам также потребуются поперечные компоненты составляющих волнового вектора для альфвеновской

$$k_{nA} \equiv k_x / \cos \chi, \quad k_{\perp A} = \sqrt{k_{nA}^2 + k_y^2}$$

и магнитозвуковой

$$k_{nF} = k_x \cos \chi + ik_{\perp} \sin \chi, \quad k_{\perp F} = k_{\perp} \cos \chi + ik_x \sin \chi,$$

волн.

Каждому корню  $k_z^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) соответствует вектор-столбец коэффициентов  $\psi^i$ , определяемых уравнениями (2.17.17), которые связывают амплитуды различных компонент электромагнитного поля в каждой из волн. Полное решение системы (2.17.17) представляет собой произвольную комбинацию линейно независимых векторов  $\psi^i \exp(ik_z^{(i)} z)$ . Поскольку в пространстве 4-векторов набор  $\psi^i$  формирует полную систему, то решение уравнений (2.17.16) можно искать в виде

$$\alpha(z) = \psi^i F_i(z) \equiv \widehat{\psi} F(z), \quad (2.17.19)$$

где  $F(z)$  — вектор-столбец искомых коэффициентов, а матрица  $\hat{\psi}$  составлена из векторов-столбцов  $\psi^i$ :

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{k_{nA}}{k_{\perp A}} & -\frac{(k_{nA}^2 - k_y^2) \operatorname{tg} \chi}{k_{\perp A}^2} & -\frac{k_y}{k_{\perp F}} & -\frac{k_y}{k_{\perp F}^*} \\ \frac{k_y}{k_{\perp A}} & -\frac{2k_{nA}k_y \operatorname{tg} \chi}{k_{\perp A}^2} & \frac{k_{nF}}{k_{\perp F}} & \frac{k_{nF}^*}{k_{\perp F}^*} \\ 0 & \frac{k_{nA}}{k_0} & -i\frac{k_y}{k_0} & i\frac{k_y}{k_0} \\ 0 & -\frac{k_y}{k_0} & -i\frac{k_{nF}}{k_0} & i\frac{k_{nF}^*}{k_0} \end{pmatrix}.$$

Подставляя решение (2.17.19) в систему уравнений (2.17.16) и умножая ее слева на  $\hat{\psi}^{-1}$  — матрицу обратную  $\hat{\psi}$ , получим систему уравнений на коэффициенты  $F(z)$ :

$$-\frac{\partial F}{\partial z} = \hat{\Lambda}F + \hat{P} + \bar{r}. \quad (2.17.20)$$

Выражения для матрицы  $\hat{\Lambda}$  и интересующего нас здесь первого столбца матрицы  $\hat{P}$  имеют вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} k_{zA} & k_{\perp A}/\cos \chi & 0 & 0 \\ 0 & k_{zA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zF} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{zF}^* \end{pmatrix},$$

$$P^1 = \frac{k_0}{k_{\perp A} \cos \chi} \left\{ \begin{array}{l} i \operatorname{tg} \chi \left( \frac{k_{nA}}{k_{\perp A}} \kappa_P - \frac{k_y}{k_{\perp A}} \kappa_H \right) \\ i \kappa_P \\ \frac{1}{2} \left( \kappa_H + i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \kappa_P \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\kappa_H + i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \kappa_P \right) \end{array} \right\},$$

и для вектора-столбца  $\bar{r}$

$$\bar{r} = \frac{4\pi\omega}{c^2} \begin{pmatrix} -i(j_n \operatorname{tg} \chi)/(k_{\perp A} \cos \chi) \\ i(k_{nA}j_n + k_yj_y)/(k_{\perp A}^2 \cos \chi) \\ -(k_yj_n - k_{nF}j_y)/(2k_{\perp F}k_{\perp}) \\ (k_yj_n - k_{nF}^*j_y)/(2k_{\perp F}^*k_{\perp}) \end{pmatrix}.$$

Поскольку в нулевом приближении решения (2.17.19) с коэффициентами  $F_i(z)$  удовлетворяют уравнению (2.17.17), будем искать эти коэффициенты в виде

$$F_i(z) = f_i(z) \exp(ik_z^{(i)}(z - H)),$$

где для удобства фаза отсчитывается от границы  $z = H$ . Уравнения (2.17.20) следует дополнить граничными условиями на нижней границе ионосферы ( $z = H$ ). Граничные условия для функций  $f_i(z)$ , получаемые из (2.17.13) и (2.17.15), имеют вид

$$f_2(H) = 0, \quad (2.17.21)$$

$$(1 + \operatorname{ctg}(k_{\perp}H))f_3(H) + (1 - \operatorname{ctg}(k_{\perp}H))f_4(H) = 0. \quad (2.17.22)$$

В верхней ионосфере и магнитосфере естественным требованием является отсутствие решений, амплитуда которых растет при  $z \rightarrow \infty$ . Это приводит к граничному условию на верхней границе ионосферы

$$f_4(z_A) = 0. \quad (2.17.23)$$

Из дальнейших расчетов будет видно, что по всей толщине ионосферы выполняется неравенство

$$|f_1| \gg |f_2|, |f_3|, |f_4|.$$

Это позволяет в первом порядке теории возмущений оставить в правой части уравнений (2.17.20) только слагаемые, пропорциональные  $f_1$ . В результате первая пара уравнений (2.17.20) отщепляется от двух других и имеет вид

$$f_1' = i \frac{k_{\perp A}}{\cos \chi} f_2 - i \frac{k_0 \operatorname{tg} \chi}{k_{\perp A} \cos \chi} \left( \frac{k_{nA}}{k_{\perp A}} \kappa_P - \frac{k_y}{k_{\perp A}} \kappa_H \right) f_1 + \frac{4\pi k_0 \operatorname{tg} \chi}{ck_{\perp A} \cos \chi} j_n \exp(-ik_{zA}(z - H)), \quad (2.17.24)$$

$$f_2' = -\frac{k_0}{k_{\perp A} \cos \chi} \kappa_P f_1 - \frac{4\pi k_0}{ck_{\perp A}^2 \cos \chi} (k_{nA} j_n + k_y j_y) \exp(-ik_{zA}(z - H)), \quad (2.17.25)$$

где штрих означает производную  $d/dz$ . Как будет видно, функция  $f_1(z)$  мало меняется в интервале  $H \leq z \leq z_a$ , и можно положить

$$f \equiv f_1(H) \approx f_1(z). \quad (2.17.26)$$

Введем обозначения

$$X_{P,H}(z) = \frac{4\pi}{c} \int_H^z \sigma_{P,H}(z') dz', \quad K_{P,H} \equiv X_{P,H}(H + \Delta),$$

$$\bar{J}_{n,y}(z) = \frac{4\pi}{c} \int_H^z \bar{j}_{n,y}(z') \exp(-ik_{zA}(z' - H)) dz', \quad \bar{I}_{n,y} \equiv \bar{J}_{n,y}(H + \Delta).$$

Интегрируя уравнение (2.17.25) с граничным условием (2.17.21), получим

$$f_2(z) = -f \frac{k_0}{k_{\perp A} \cos \chi} X_P(z) - \frac{k_0}{k_{\perp A}^2 \cos \chi} (k_{nA} \bar{J}_n(z) + k_y \bar{J}_y(z)).$$

В верхней ионосфере ( $z \rightarrow \infty$ ) имеем

$$f_2 = -f \frac{k_0}{k_{\perp A} \cos \chi} K_P - \frac{k_0}{k_{\perp A}^2 \cos \chi} (k_{nA} \bar{I}_n + k_y \bar{I}_y). \quad (2.17.27)$$

Для выполнения условия  $|f_2| \ll |f_1|$  необходимо, чтобы каждое из слагаемых в правой части (2.17.27) было много меньше  $|f|$ . Что касается слагаемых, пропорциональных токам в ионосфере, то условие их малости будет сформулировано в следующем разделе. Для малости первого слагаемого необходимо выполнение неравенства

$$\frac{k_0 K_P}{k_{\perp A}} \ll 1. \quad (2.17.28)$$

Оно позволяет в уравнении (2.17.24) опустить в правой части слагаемое, пропорциональное  $f_1$ . После этого, интегрируя (2.17.24), получаем

$$f_1(z) = f \left[ 1 - i \frac{k_0}{\cos^2 \chi} \int_H^z X_P(z') dz' \right] - \frac{k_0 \sin \chi}{k_{\perp A} \cos^2 \chi} \bar{J}_n(z). \quad (2.17.29)$$

Как будет видно из результатов следующего раздела, последнее слагаемое в этом уравнении мало. Таким образом, для выполнения условия (2.17.26) требуется

$$k_0 K_P \Delta \ll 1. \quad (2.17.30)$$

Условия (2.17.28) и (2.17.30) эквивалентны требованию малости частоты рассматриваемых колебаний  $\omega$  по сравнению с частотой низкочастотного вистлера в ионосфере  $\omega_{PH} = c^2/4\pi\Sigma_P\Delta$ . Для того, чтобы в верхней ионосфере можно было полностью пренебречь поперечной проводимостью (как мы сделали выше), необходимо, чтобы частота  $\omega$  была много меньше собственной частоты ионосферного альфвеновского резонатора (ИАР):

$$\omega \int_{H+\Delta}^{z_A} \frac{dz}{v_A(z)} \ll 1.$$

Зная выражение для  $f_1(z)$ , легко проинтегрировать и вторую пару уравнений (2.17.20) с граничными условиями (2.17.22), (2.17.23):

$$f_3(z) = -i \frac{f k_0}{2k_{\perp A} \cos \chi} \left[ \left( \bar{K}_H - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \bar{K}_P \right) e^{-2k_{\perp} H} - \int_H^z \left( \varkappa_H + i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \varkappa_P \right) \exp[(k_{\perp} + i k_x \operatorname{tg} \chi)(z' - H)] dz' \right], \quad (2.17.31)$$

$$f_A(z) = i \frac{fk_0}{2k_{\perp A} \cos \chi} \int_z^{\infty} \left( \varkappa_H - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \varkappa_P \right) \times \\ \times \exp[(-k_{\perp} + ik_x \operatorname{tg} \chi)(z' - H)] dz', \quad (2.17.32)$$

где обозначено

$$\bar{K}_{P,H} = \int_H^{\infty} \varkappa_{P,H}(z) \exp[(-k_{\perp} + ik_x \operatorname{tg} \chi)(z - H)] dz.$$

Полное решение системы (2.17.16) в верхней ионосфере имеет вид

$$\alpha = \psi^1 F_1 + \psi^2 F_2 = \begin{pmatrix} F_1 k_{nA}/k_{\perp A} \\ F_1 k_y/k_{\perp A} \\ F_2 k_{nA}/k_0 \\ -F_2 k_y/k_0 \end{pmatrix}. \quad (2.17.33)$$

Это решение включает в себя только компоненты, связанные с альфвеновской волной в магнитосфере. Электромагнитное поле магнитозвуковой волны, генерируемой в Е-слое холловскими токами, в верхнюю ионосферу не проникает, поскольку ионосфера является для нее областью непрозрачности. С необходимой для нас точностью решения  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  в верхней ионосфере можно представить в виде

$$F_1(z) = \left[ f - i \frac{k_0(z-H)}{\cos^2 \chi} (fK_P + \bar{I}_{\perp}) \right] \exp(ik_x(z-H) \operatorname{tg} \chi), \quad (2.17.34)$$

$$F_2(z) = -\frac{k_0}{k_{\perp A} \cos \chi} [(fK_P + \bar{I}_{\perp})] \exp(ik_x(z-H) \operatorname{tg} \chi), \quad (2.17.35)$$

где

$$\bar{I}_{\perp} = \frac{k_{nA} \bar{I}_n + k_y \bar{I}_y}{k_{\perp A}}.$$

Используя условие замкнутости токов  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , находим:

$$\bar{I}_{\perp} = \frac{4\pi}{ck_{\perp A}} \bar{j}_{\parallel},$$

где  $\bar{j}_{\parallel}$  — гармоника колебаний плотности стороннего продольного тока на верхней границе проводящего слоя ионосферы ( $z = H + \Delta$ ).

Из решений (2.17.33)–(2.17.35) следует, что поперечные компоненты возмущенного магнитного поля можно записать в виде

$$\bar{B}_n(z) = B_A \frac{k_{nA}}{k_{\perp A}} \exp(ik_x(z-H) \operatorname{tg} \chi), \\ \bar{B}_y(z) = -B_A \frac{k_y}{k_{\perp A}} \exp(ik_x(z-H) \operatorname{tg} \chi), \quad (2.17.36)$$



где

$$B_A = -\frac{fK_P + \bar{I}_\perp}{\cos \chi}$$

— амплитуда альфвеновских колебаний в верхней ионосфере. Последнее равенство можно переписать как

$$f = -\frac{B_A \cos \chi + \bar{I}_\perp}{K_P}. \quad (2.17.37)$$

Если в магнитосфере (точнее, на верхней границе ионосферы)  $k_{nA} \ll k_y$ , то

$$|\bar{B}_y| \sim B_A, \quad |\bar{B}_n| \ll B_A. \quad (2.17.38)$$

Это альфвеновские волны с тороидальной поляризацией. К таким, например, относятся альфвеновские волны, возбуждаемые в магнитосфере на резонансных поверхностях БМЗ-волнами, проникающими из солнечного ветра, или раскачиваемыми на магнитопаузе неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Если же, наоборот,  $k_{nA} \gg k_y$ , то

$$|\bar{B}_y| \ll B_A, \quad |\bar{B}_n| \sim B_A. \quad (2.17.39)$$

Это — полоидальные альфвеновские волны, источником которых могут служить, например, сторонние токи в ионосфере. Более подробно эти волны будут исследованы в следующей главе.

**Граничные условия для альфвеновских волн на верхней границе ионосферы.** Используя выражения (2.17.36), можно получить граничные условия для альфвеновских волн на верхней границе ионосферы ( $z = z_a$ ). Заметим, что производная от компонент поля волны вдоль силовой линии, записанная в системе координат  $(x, y, z)$ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial l} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial z} + ik_x \sin \chi.$$

Используя для производных  $\nabla_z f_{1,2}$  уравнения (2.17.24), (2.17.25) с учетом выражений (2.17.27), (2.17.29) и (2.17.37), с необходимой для нас точностью получаем граничное условие на верхней границе ионосферы ( $z = z_A$ ) для компонент магнитного поля альфвеновских волн:

$$\left[ \frac{\partial \bar{B}_{n,y}}{\partial l} + i \frac{\omega}{v_A^2} v_P \bar{B}_{n,y} \pm \frac{k_{y,nA}}{k_{\perp A}^2} \frac{\omega \bar{j}_\parallel}{v_A^2 \Sigma_P} \exp[ik_x(z - H) \operatorname{tg} \chi] \right]_{z=z_A} = 0, \quad (2.17.40)$$

где  $v_P = c^2 \cos \chi / 4\pi \Sigma_P$  — скорость распространения низкочастотного ионосферного вистлера. Здесь верхний знак «+» соответствует индексу  $n$ , а нижний «-» — индексу  $y$ . Отметим, что в (2.17.40) опущены некоторые слагаемые, которые не описывают новых физических эффектов, а дают только малую поправку к фазе отраженной альфвеновской волны в магнитосфере. Оставленные слагаемые описывают источник альфвеновских волн (сторонние токи) и их диссипацию в ионосфере. Используя уравнения Максвелла (2.17.1), запишем аналогичные

граничные условия для поперечных компонент электрического поля волны:

$$\left[ \bar{E}_{n,y} + i \frac{v_P}{\omega} \frac{\partial \bar{E}_{n,y}}{\partial l} - i \frac{k_{nA,y}}{ck_{\perp A}^2} \frac{\bar{j}_{\parallel}}{\Sigma_P} \exp[ik_x(z-H) \operatorname{tg} \chi] \right]_{z=z_A} = 0. \quad (2.17.41)$$

С помощью фурье-преобразования, обратного (2.17.11), можно в (2.17.40) и (2.17.41) перейти к граничным условиям для монохроматической альфвеновской волны с произвольной поперечной структурой поля в магнитосфере:

$$\frac{\partial \tilde{E}_{n,y}}{\partial l} \Big|_{l=l_+} = i \frac{\omega v_{P+}}{v_{A+}^2} \left[ \tilde{E}_{n,y} \mp \frac{4\pi}{c} \nabla_{y,n} \tilde{J}_{\parallel} \right]_{l=l_+}, \quad (2.17.42)$$

$$\tilde{E}_{n,y} \Big|_{l=l_+} = \left[ -i \frac{v_P}{\omega} \frac{\partial \tilde{E}_{n,y}}{\partial l} + \frac{\nabla_{n,y} \tilde{J}_{\parallel}}{V_P} \right]_{l=l_+}, \quad (2.17.43)$$

где нижний индекс «+» соответствует величинам, взятым в точке пересечения силовой линии ( $l = l_+$ ) с верхней границей ионосферы ( $z = z_a$ ), и обозначено

$$\nabla_{y,n} \equiv \frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial y}; \quad v_P = \frac{c^2 \cos \chi}{4\pi \Sigma_P}; \quad V_P = \frac{\Sigma_P}{\cos \chi}.$$

Функция  $\tilde{J}_{\parallel}$  связана с плотностью продольных сторонних токов на верхней границе токового слоя  $\tilde{j}_{\parallel}$  следующим соотношением:

$$\Delta_{\perp} \tilde{J}_{\parallel} = \tilde{j}_{\parallel},$$

где  $\Delta_{\perp} = \nabla_n^2 + \nabla_y^2$  — поперечный лапласиан. Переходя в (2.17.43) к представлению электрического поля альфвеновских волн через скалярный потенциал (2.7.4), получим следующее граничное условие:

$$\varphi|_{l=l_{\pm}} = \left[ \mp i \frac{v_P}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial l} - \frac{\tilde{J}_{\parallel}}{V_P} \right]_{l=l_{\pm}}, \quad (2.17.44)$$

где знаки  $\pm$  соответствуют верхней границе ионосферы в северном ( $l_+$ ) и южном ( $l_-$ ) полушариях Земли. Граничные условия (2.17.44) при  $\chi = 0$  полностью соответствуют граничным условиям (2.17.9), полученным выше в модели «тонкого слоя». Следует отметить, что на верхней границе ионосферы полем магнитозвуковой волны, сгенерированной холловскими токами в ионосфере, можно пренебречь, поскольку для рассматриваемых нами низкочастотных колебаний их амплитуда экспоненциально убывает вверх.

Как мы увидим в следующей главе, амплитуду полоидальной альфвеновской волны, возбуждаемой в магнитосфере сторонними токами в E-слое ионосферы, можно записать в виде

$$B_a = \frac{2c}{\omega t_A v_{A0}} \frac{k_y l_N}{\lambda_{PN}} \frac{\tilde{J}_{\parallel+}}{V_P}, \quad (2.17.45)$$

где  $v_{A0}$  — значение альфвеновской скорости на рассматриваемых магнитных оболочках в экваториальной плоскости,  $t_A$  — время пробега с альфвеновской скоростью вдоль силовой линии между магнитоспряженными ионосферами. Кроме того, в (2.17.45) входят два характерных масштаба: характерный поперечный масштаб неоднородности магнитосферной плазмы  $l_N$  и характерная поперечная длина полоидальной альфвеновской волны  $\lambda_{PN}$  в окрестности резонансной магнитной оболочки, где она генерируется. Точные выражения для этих параметров будут получены в следующей Главе. Для оценок по порядку величины заметим, что

$$k_y l_N \sim m,$$

где  $m \gg 1$  — азимутальное волновое число полоидальной альфвеновской волны,

$$\omega t_A \sim N,$$

$N$  — номер гармоники стоячих альфвеновских волн в магнитосфере (для основных гармоник  $N \sim 1$ ) и

$$\lambda_{PN} \sim l_N^{1/3} / k_y^{2/3}.$$

Подставляя (2.17.45) в (2.17.37), а затем в (2.17.27) и (2.17.29), находим, что члены этих уравнений, пропорциональные токам, малы, если

$$\frac{m^{2/3}}{N} \frac{c^2}{v_{A0} \Sigma_P} \gg 1. \quad (2.17.46)$$

Для характерных значений параметров рассматриваемой среды —  $v_{A0} \sim 10^3$  км/с,  $\Sigma_P \sim 10^8$  км/с, условие (2.17.46) сводится к требованию  $m^{2/3} \gg N$ , которое заведомо выполняется для полоидальных альфвеновских волн.

**Электромагнитные колебания, индуцируемые на поверхности Земли магнитосферными альфвеновскими волнами.** Определим поле электромагнитных колебаний, индуцируемых на поверхности Земли альфвеновскими волнами, падающими из магнитосферы и отражающимися от ионосферы. Условие (2.17.46) позволяет пренебречь прямым влиянием сторонних токов в ионосфере на электромагнитные колебания на поверхности Земли. Это объясняется тем, что монохроматические альфвеновские волны «привязаны» к определенной резонансной магнитной оболочке. С течением времени волны «накапливают» на ней амплитуду, так что амплитуда электромагнитных колебаний, индуцируемых ими на поверхности Земли, становится значительно больше той, что связана непосредственно со сторонними токами.

Используя уравнения (2.17.21), (2.17.29), (2.17.31), (2.17.32), а также (2.17.37), имеем на нижней границе ионосферы

$$\begin{aligned} F_1(H) &= -\frac{\cos \chi}{K_P} B_A, \\ F_2(H) &= 0, \end{aligned}$$

$$F_3(H) = i \frac{k_0}{2k_{\perp A}} e^{-2k_{\perp} H} \left( \frac{\bar{K}_H}{K_P} + i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \frac{\bar{K}_P}{K_P} \right) B_A,$$

$$F_4(H) = -i \frac{k_0}{2k_{\perp A}} \left( \frac{\bar{K}_H}{K_P} - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \frac{\bar{K}_P}{K_P} \right) B_A.$$

Подстановка этих выражений в (2.17.19) позволяет получить компоненты поля колебаний  $\bar{E}_n, \bar{E}_y, \bar{B}_y, \bar{B}_n$  на нижней границе ионосферы, а с помощью простых геометрических преобразований — горизонтальные компоненты поля:

$$\bar{B}_{\perp}(H) = \frac{k_{\perp}}{k_{\perp A}} \operatorname{ch}(k_{\perp} H) e^{-k_{\perp} H} \left( \frac{\bar{K}_H}{K_P} - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \frac{\bar{K}_P}{K_P} \right) B_A,$$

$$\bar{E}_b(H) = -i \frac{k_0}{k_{\perp A}} \operatorname{sh}(k_{\perp} H) e^{-k_{\perp} H} \left( \frac{\bar{K}_H}{K_P} - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \frac{\bar{K}_P}{K_P} \right) B_A,$$

$$\bar{E}_{\perp}(H) = -i \frac{k_{\perp} \cos \chi}{k_{\perp A} K_P} B_A,$$

$$\bar{B}_b(H) = 0.$$

Используя (2.17.14), имеем на поверхности Земли

$$\bar{B}_{\perp}(0) = \frac{k_{\perp}}{k_{\perp A}} e^{-k_{\perp} H} \left( \frac{\bar{K}_H}{K_P} - i \frac{k_y \sin \chi}{k_{\perp}} \frac{\bar{K}_P}{K_P} \right) B_A,$$

$$\bar{E}_{\perp}(0) = \bar{E}_b(0) = \bar{B}_b(0) = 0.$$

или, переходя к компонентам поля в системе координат  $(x, y, z)$ , получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{B}_x(0) &= \bar{B}_y(z_a) \bar{R}(k_x, k_y) \cos \chi, \\ \bar{B}_y(0) &= -\bar{B}_n(z_a) \bar{R}(k_x, k_y), \end{aligned} \quad (2.17.47)$$

связывающие амплитуды альфвеновских волн на верхней границе ионосферы  $\bar{B}_{n,y}(z_a)$  с амплитудами колебаний магнитного поля на поверхности Земли, где

$$\begin{aligned} \bar{R}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\Sigma_P} \int_0^{\infty} \left( \sigma_H(z) - i \frac{k_y}{k_{\perp}} \sigma_P(z) \sin \chi \right) \times \\ &\quad \times \exp(-k_{\perp} + i k_x(z - z_a) \operatorname{tg} \chi) dz. \end{aligned} \quad (2.17.48)$$

Здесь верхний предел интегрирования распространен до бесконечности, поскольку вне проводящего слоя поперечные проводимости ионосферной плазмы экспоненциально убывают, в результате чего сами интегралы меняются мало. Наиболее простой вид функция  $\bar{R}(k_x, k_y)$  приобретает для крупномасштабных альфвеновских волн, у кото-

рых  $k_{\perp} \Delta \ll 1$ . В этом случае для альфвеновских колебаний ионосферу можно рассматривать как тонкий слой. Для таких колебаний имеем

$$\bar{R}(k_x, k_y) \approx \frac{\Sigma_H - i(k_y/k_{\perp})\Sigma_P \sin \chi}{\Sigma_P}.$$

Следствием уравнений (2.17.47) является то, что при проникновении на Землю меняется доминирующая компонента магнитного поля колебаний. Если в верхней ионосфере имеется тороидальная альфвеновская волна (с доминирующей азимутальной компонентой  $\bar{B}_y(z_a) \gg \bar{B}_n(z_a)$ ), то после проникновения на Землю доминирующей оказывается полоидальная компонента  $\bar{B}_x(0) \gg \bar{B}_y(0)$ . Если же в верхней ионосфере имеется полоидальная альфвеновская волна ( $\bar{B}_y(z_a) \ll \bar{B}_n(z_a)$ ), то на Земле доминирующей оказывается азимутальная компонента поля  $\bar{B}_y(0) \gg \bar{B}_x(0)$ . Этот эффект известен как поворот вектора поляризации на  $\pi/2$  [144, 156]. Отметим, что это справедливо только для горизонтально однородной модели ионосферы. Для горизонтально неоднородной ионосферы поворот эллипса поляризации может значительно отличаться от  $\pi/2$  [162, 163].

Происходит также обращение направления годографа колебаний. Так, у полоидальной альфвеновской волны в магнитосфере годограф колебаний в плоскости  $(B_n, B_y)$  вращается по часовой стрелке. У тороидальной альфвеновской волны, наоборот, годограф вращается против часовой стрелки. На поверхности Земли ситуация обратная. У колебаний, индуцированных на поверхности Земли полоидальной альфвеновской волной годограф в плоскости  $(B_x, B_y)$  вращается против часовой стрелки, а у колебаний, индуцированных тороидальной альфвеновской волной, — по часовой стрелке.

Еще одним следствием общих формул (2.17.47), (2.17.48) является то, что на поверхность Земли в общем случае проникает не только поле колебаний, связанных с холловской проводимостью ионосферы, как это имеет место в задаче с вертикальным магнитным полем, но и поле, обусловленное педерсеновской проводимостью. Этот эффект присутствует только в задачах, использующих модель среды с наклонным геомагнитным полем, когда горизонтальный волновой вектор рассматриваемых колебаний лежит вне плоскости магнитного меридиана ( $k_y \neq 0$ ). В большинстве работ, посвященных исследованию проникновения поля МГД-волн из магнитосферы на Землю, решаются задачи, в которых невозможно обнаружить этот эффект. В них либо рассматриваются модели с вертикальным геомагнитным полем ( $\chi = 0$ ), либо меридиональное распространение волн ( $k_y = 0$ ) в моделях с наклонным магнитным полем. Во всех этих случаях на поверхность Земли проникают только колебания, генерируемые холловскими токами в ионосфере.

Глава 3

**МГД-КОЛЕБАНИЯ  
В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ  
МОДЕЛЯХ МАГНИТОСФЕРЫ**

В данной главе рассматриваются магнитосферные МГД-колебания в моделях, где плазма неоднородна не только поперек магнитных оболочек, но и вдоль силовых линий магнитного поля. Это в основном аксиально-симметричные модели среды, в которых сохраняется однородность параметров по азимутальной координате. В таких моделях полное волновое поле можно разложить по азимутальным гармоникам вида  $\exp(im\phi)$ , где  $\phi$  — азимутальный угол, а  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — азимутальное волновое число. Все волновые процессы, которые характерны для одномерно-неоднородных моделей, имеют место и в двумерно-неоднородной среде. Однако здесь они имеют свои особенности.

Начало теоретическому исследованию МГД-волн в магнитосфере было положено работой [18], где были получены уравнения, описывающие продольную структуру и спектр азимутально-симметричных стоячих альфвеновских волн (с  $m = 0$ ), которые были названы тороидальными. Колебания плазмы и магнитного поля в этих волнах происходят в азимутальном направлении. Позднее в [172] и [173] был рассмотрен другой предельный случай — волны с  $m \rightarrow \infty$ . Альфвеновские волны такого типа были названы полоидальными. Плазма и магнитное поле в таких волнах колеблются в радиальном направлении в плоскости магнитного меридиана. Собственные частоты и продольная структура полоидальных и тороидальных стоячих альфвеновских волн различаются сравнительно мало [?, 175].

Впоследствии результаты этих работ были обобщены на случай моделей, учитывающих не только кривизну силовых линий геомагнитного поля, но и поперечную неоднородность плазмы. В работах [176, 177] использовалась модель магнитосферы в виде полуцилиндра, а в работах [?, 178, 179] — более сложная модель магнитосферы с дипольным магнитным полем. Было показано, что в этих моделях появляется характерная резонансная особенность в распределении поля альфвеновских волн поперек магнитных оболочек.

Оказалось, что в рамках двух этих направлений теоретических исследований с разных точек зрения описывается одно и то же физическое явление — альфвеновский резонанс — процесс возбуждения тороидальных стоячих альфвеновских волн с  $m \sim 1$  в аксиально-симметричной модели магнитосферы [180–182]. Структура этих волн в направлении поперек магнитных оболочек имеет на резонансной поверхности характерную особенность, аналогичную той, которая наблю-

дается в неограниченной плазме. Амплитуда возбуждаемых альфвеновских волн на резонансной поверхности определяется конкурирующими эффектами: диссипацией их энергии в ионосфере и поперечной дисперсией, приводящей к убеганию этих волн от резонансной поверхности поперек магнитных оболочек [47, 48]. В реальной магнитосфере оба эти эффекта малы, что приводит к наличию характерного резонансного пика в распределении компонент поля альфвеновской волны поперек магнитных оболочек. При этом в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля эти колебания имеют вид стоячих между магнитосопрежженными ионосферами волн. Теория альфвеновского резонанса в аксиально-симметричной дипольноподобной модели магнитосферы представлена в разд. 3.1–3.3 настоящей монографии.

Основное отличие моделей магнитосферы с криволинейным магнитным полем от моделей, в которых магнитное поле имеет прямые силовые линии, заключается в структуре участвующих в альфвеновском резонансе магнитозвуковых волн. Поскольку задача для магнитозвуковых колебаний при реалистичном двумерном (в плоскости геомагнитного меридиана) распределении плазмы оказывается существенно неоднородной, нахождение ее точного аналитического решения становится невозможным из-за возникающих математических трудностей. Для их преодоления используются два различных подхода.

Первый заключается в применении методов численного моделирования, которые позволяют найти распределение полного поля МГД-колебаний внутри магнитосферной полости [183–185]. В рамках этого подхода удалось установить, что энергия магнитозвуковых колебаний сосредоточена в узкой окрестности вблизи экваториальной плоскости, что нашло подтверждение и в спутниковых наблюдениях [186–188]. Этот эффект отсутствует в модели магнитосферы с прямыми линиями геомагнитного поля. Такой подход, давая общую картину возбуждаемых внутри магнитосферы МГД-волн, не позволяет, к сожалению, исследовать закономерности и особенности взаимодействия альфвеновских и магнитозвуковых колебаний. В этом отношении к численному моделированию следует относиться как к численному эксперименту, результаты которого сами нуждаются в аналитическом осмыслении.

Другой подход заключается в использовании комбинированного (аналитического и численного) метода решения системы специально выведенных уравнений, описывающих МГД-колебания магнитосферы. Поскольку в неоднородной плазме нет независимых мод МГД-колебаний, их волновое поле имеет сложную структуру. В области альфвеновского резонанса оно похоже на поле альфвеновской волны, а вдали от него — на поле магнитозвуковой волны. Поэтому в неоднородной плазме разделение поля МГД-колебаний на различные моды, аналогичные тем, что имеют место в однородной плазме, становится предметом соглашения.

В ряде работ использован метод описания поля МГД-колебаний в неоднородной плазме с помощью его разделения на потенциальную

и вихревую составляющие. Показано, что потенциальная составляющая поля в однородной плазме соответствует альфвеновским волнам, а вихревая — магнитозвуковым волнам. В работах [189, 190] с помощью этого метода исследован процесс затухания собственных магнитозвуковых колебаний в волноводе из-за их резонансного взаимодействия с альфвеновскими волнами, а в работах [191, 192] определена пространственная структура собственных магнитозвуковых колебаний магнитосферной полости в дипольной модели магнитосферы.

Магнитозвуковые колебания магнитосферы в настоящее время теоретически менее изучены, чем альфвеновские волны. На это указывает хотя бы то, что количество теоретических работ, посвященных магнитозвуковым колебаниям магнитосферы, значительно меньше, чем посвященных альфвеновским волнам. Такое соотношение обусловлено значительными математическими трудностями, возникающими при аналитическом исследовании поля БМЗ-колебаний. Однако и в этой области есть определенные достижения, полученные в простых одномерно-неоднородных моделях магнитосферы. Отметим, прежде всего, работы [193, 194], в которых рассмотрена возможность запираания быстрых магнитозвуковых колебаний в магнитосферном резонаторе, образованном немонокотным градиентом плотности плазмы вблизи плазмплаузы. Этот резонатор, открытый первоначально теоретически, был впоследствии обнаружен и по результатам спутниковых наблюдений [195]. В работах [196, 197] в простой одномерно-неоднородной модели магнитосферы (box model) аналитически исследована структура собственных магнитозвуковых мод ее колебаний. Аналогичный подход при исследовании собственных магнитозвуковых колебаний магнитосферы был использован и в работах [71, 198]. Теоретическое исследование структуры и спектра БМЗ-колебаний дипольноподобной магнитосферы представлено в разд. 3.4–3.6 данной монографии.

Особый вид МГД-колебаний магнитосферы — это поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны. Поперечная мелкомасштабность означает малость характерных масштабов изменения волнового поля поперек магнитных силовых линий по сравнению с типичным масштабом изменения магнитосферных параметров, а также с продольной длиной волны. В частности, это означает, что у таких колебаний азимутальное волновое число  $m \gg 1$ . Поперечная мелкомасштабность — естественное свойство альфвеновских колебаний в поперечно-неоднородной плазме [199, 200]. Это связано с малой поперечной дисперсией альфвеновских волн. Малость дисперсии означает, что соседние силовые линии колеблются почти независимо друг от друга и, в присутствии поперечной неоднородности, с различной частотой. В результате колебания разбегаются по фазам, то есть их поперечная структура измельчается. Только поперечная дисперсия может остановить или предотвратить это измельчение, но из-за ее малости поперечная длина волны оказывается малой.



Однако указанное рассуждение доказывает мелкомасштабность альфвеновских волн только в направлении нормали к магнитным оболочкам. В азимутальном направлении волна может быть как мелкомасштабной, так и крупномасштабной. Какая из этих двух возможностей реализуется, определяется механизмом возбуждения волн. Примером возбуждения азимутально-крупномасштабной волны с  $m \sim 1$  является альфвеновский резонанс.

Магнитозвуковые волны с  $m \gg 1$  не могут извне проникать глубоко внутрь магнитосферы, так как магнитосфера является областью непрозрачности для таких волн. В связи с этим для эффективной генерации альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  требуется, чтобы их источник располагался на тех же магнитных оболочках, где они возбуждаются. Таким источником могут быть, например, сторонние токи в проводящем слое ионосферы, где они вызываются движением нейтралов, связанным с различными процессами как естественного, так и искусственного происхождения (см. разд. 2.17 настоящей монографии).

Если продольная структура альфвеновских волн с  $m \gg 1$  исследуется достаточно давно, то об их структуре поперек магнитных оболочек известно сравнительно мало. Такие исследования проведены в работах [201–203]. В них показано, что поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны имеют более сложную структуру, чем резонансные альфвеновские волны с  $m \sim 1$ . Монохроматический источник возбуждает полоидальную стоячую альфвеновскую волну на резонансной магнитной оболочке там, где его частота совпадает с локальной частотой полоидальных альфвеновских колебаний. Затем эта волна убегает поперек магнитных оболочек к другой, «тороидальной» резонансной поверхности, где полностью поглощается за счет диссипации. В процессе такого перемещения поляризация колебаний меняется от «полоидальной» до «тороидальной». Если перемещение альфвеновской волны вблизи «полоидальной» резонансной поверхности ограничено точками поворота по поперечной координате (возникающими из-за немонотонности в распределении альфвеновской скорости поперек магнитных оболочек), то такая волна захватывается в резонатор и остается полоидальной. Структура поля монохроматических альфвеновских волн с  $m \gg 1$  исследована в данной главе монографии в разд. 3.7–3.10.

Исследование монохроматических колебаний позволяет выявить их нетривиальную пространственную структуру, но его недостаточно для описания реальных МГД-колебаний магнитосферы, которые, как правило, имеют более или менее широкий частотный спектр [204–207]. Характерный пример таких колебаний — дневные геомагнитные пульсации Pc3, возбуждаемые магнитозвуковыми волнами внемагнитосферного происхождения [204, 208–210]. Как правило, это колебания стохастической природы.

Другой тип — это колебания, возбуждаемые в магнитосфере широкополосными коррелированными источниками. Наиболее показательным примером является источник типа внезапного импульса, зависимость

от времени которого описывается  $\delta$ -функцией [176, 211]. К колебаниям этого класса относятся все волны, вызванные переходными процессами в магнитосфере. Характерные примеры — внезапное начало магнитной бури (SSC — sudden storm commencement) или пульсации P<sub>i</sub>2 [212, 213]. Такие колебания более редки, чем стохастические, но играют важную роль в физике магнитосферы.

Источниками поперечно-мелкомасштабных альфвеновских колебаний в магнитосфере могут быть разнообразные явления как естественного, так и искусственного происхождения. Сторонние токи в проводящем слое ионосферы могут возбуждать поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны в магнитосфере. Причиной самих сторонних токов могут быть различные природные процессы. Известно, что в зоне подготовки крупных землетрясений наблюдаются значительные электромагнитные возмущения (см. [214, 215]). Проникая в ионосферу, эти колебания порождают в ее проводящем слое объемные сторонние токи, которые служат источником альфвеновских волн в магнитосфере. Некоторые возмущения связаны с областями повышенной грозовой активности. Часть разрядов из грозовых облаков направлена не на поверхность Земли, а в ионосферу [216]. Это также должно приводить к генерации в ионосфере интенсивных сторонних токов.

Из искусственных источников сторонних токов следует отметить пролеты ракет через проводящий слой ионосферы в ходе запусков космических аппаратов [217]. Аналогичные возмущения регистрируют и при проведении активных экспериментов с выбросом облака заряженных частиц в ионосферу [218] или при их искусственной генерации с помощью больших электромагнитных контуров [148]. Особо отметим работы, в которых представлены наблюдения возмущений, связанных с наземными взрывами.

Относительно этих последних источников имеется подробный наблюдательный материал, который позволяет провести детальное сравнение предсказаний теории с данными наблюдений. В работах [70, 219] представлены данные о сильном импульсе альфвеновских колебаний (амплитуда по магнитной компоненте  $\sim 100$  нТл), наблюдавшемся в ходе активного эксперимента МАССА-1 на спутнике ОРЕОЛ-3. В работе [220] показано, что в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля форма нелинейной альфвеновской волны, которая, возможно, наблюдалась в эксперименте, похожа на наблюдаемый в эксперименте импульс. В работе [221] форма зарегистрированного импульса объясняется поперечной структурой сгенерированного взрывом пакета альфвеновских волн (см. разд. 3.15 настоящей монографии). Поперечно-мелкомасштабные альфвеновские колебания, возбуждаемые в дипольноподобной магнитосфере широкополосными и локализованными источниками, изучены в разд. 3.11–3.15 данной главы монографии.

Отдельную область составляют исследования МГД-колебаний в геомагнитном хвосте. Общей чертой магнитосфер планет, обладающих собственным магнитным полем, является формирование магнитных хвостов

под действием потока солнечного ветра [222, 223]. Типична структура магнитного хвоста с образованием токового слоя, разделяющего его на две доли (например, геомагнитный хвост). Этот ток, замыкаясь через магнитопаузу, формирует магнитное поле, которое вблизи Земли является почти дипольным, а в вершинах вытянутых в хвост силовых линий радиус их кривизны очень мал. Это создает специфические условия для распространения и взаимодействия альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн.

Направление распространения БМЗ-волн определяется их пространственной структурой и может быть любым по отношению к фоновому магнитному полю. А фазовые скорости альфвеновских и ММЗ-волн направлены почти вдоль фонового магнитного поля, что создает возможность для их «запираания» на магнитных оболочках, ограниченных высокопроводящей ионосферой магнитосопряженных полушарий Земли. На вытянутых в магнитный хвост силовых линиях эти моды могут взаимодействовать между собой, создавая сложную картину волнового поля [224–226]. При определенных условиях эти колебания могут переходить в режим баллонной неустойчивости [227–229]. Эту неустойчивость, наряду с тиринг-неустойчивостью (см. [230, 231]), часто рассматривают как механизм пересоединения геомагнитного поля в токовом слое во время суббурь. Иногда эти два типа неустойчивостей привлекают и для объяснения flapping-колебаний токового слоя геомагнитного хвоста (см. [232, 233]).

Часто при исследовании баллонной неустойчивости используют простейшее приближение, в рамках которого анализируется локальное дисперсионное уравнение [229, 234, 235]. Это уравнение получается для однородной вдоль силовых линий магнитного поля среды, параметры которой соответствуют параметрам токового слоя. Однако, как показано в [236], решения МГД-уравнений, полученные для одной и той же модели геомагнитного хвоста, дают разные результаты в локальном и ВКБ-приближениях, учитывающем изменение параметров среды вдоль магнитных силовых линий (см. разд. 3.16 данной главы). Кроме того, на силовых линиях, пересекающих токовый слой, альфвеновские и ММЗ-волны испытывают взаимную линейную трансформацию, в результате чего формируется своеобразная сцепленная мода этих колебаний. Она также может переходить в режим баллонной неустойчивости при достаточной интенсивности тока геомагнитного хвоста. Пространственная структура и спектр колебаний таких сцепленных мод в геомагнитном хвосте исследуются в разд. 3.17 данной главы.

### **3.1. Резонанс БМЗ- и кинетических альфвеновских волн в аксиально-симметричной магнитосфере**

В приближении идеальной МГД решения уравнений, описывающие резонанс альфвеновских и БМЗ-волн, имеют сингулярность на резонансных магнитных оболочках. Здесь частота монохроматической

БМЗ-волны, играющей роль источника резонансных колебаний, совпадает с частотой одной из гармоник стоячих тороидальных альфвеновских волн. Эту сингулярность можно устранить, приняв во внимание эффекты, выходящие за рамки идеальной МГД. Такие, например, как конечность ларморовского радиуса ионов плазмы, или инерцию электронов (см. разд. 2.7 настоящей монографии). Далее мы рассмотрим процесс резонанса кинетических альфвеновских волн в аксиально-симметричной, дипольноподобной модели магнитосферы. С математической точки зрения — это двумерно-неоднородная модель, в которой магнитное поле и плазма неоднородны как поперек магнитных оболочек, так и вдоль силовых линий магнитного поля.

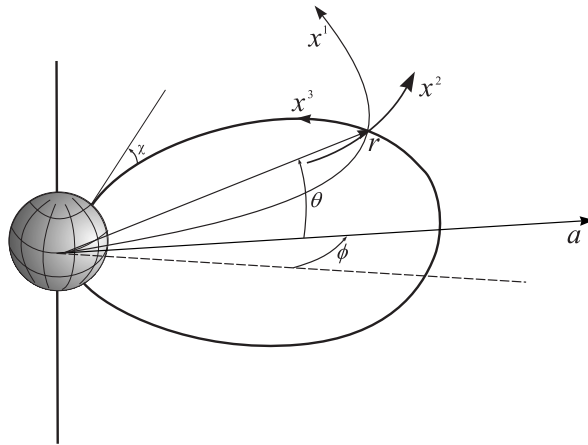


Рис. 3.1. Системы координат, связанные с силовыми линиями геомагнитного поля в аксиально-симметричной модели магнитосферы: криволинейная ортогональная система координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , криволинейная неортогональная система координат  $(a, \phi, \theta)$

Будем считать, что в рассматриваемой модели магнитосферы плазма и магнитное поле однородны в азимутальном направлении. Введем ортогональную систему криволинейных координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , в которой координата  $x^3$  направлена вдоль магнитной силовой линии, координата  $x^1$  — поперек магнитных оболочек, а азимутальная координата  $x^2$  дополняет систему координат до правосторонней (рис. 3.1). В такой модели произвольное возмущение можно искать в виде разложения по фурье-гармоникам  $\exp(ik_2 x^2 - i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота рассматриваемых колебаний,  $k_2$  — азимутальное волновое число (если в качестве координаты  $x^2$  использовать азимутальный угол  $\phi$ , то азимутальное волновое число  $k_2 = m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Проще всего систему МГД-уравнений, связывающих поле БМЗ-колебаний и кинетических альфвеновских волн, получить из приближенного векторного уравнения (2.7.1), в котором тензор

диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\widehat{\varepsilon} = \frac{c^2}{v_A^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3k_1^2 \rho_i^2}{4g_1^2} & -\frac{3k_1 k_2 \rho_i^2}{4\sqrt{g_1 g_2}} & 0 \\ -\frac{3k_1 k_2 \rho_i^2}{4\sqrt{g_1 g_2}} & 1 - \frac{3k_2^2 \rho_i^2}{4g_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & v_A^2 \frac{\widetilde{G}(s_e/\rho_s)}{\omega^2 \rho_s^2} \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

где  $g_1, g_2, g_3$  — диагональные компоненты метрического тензора, а компоненту волнового вектора по координате  $x^1$  следует понимать как производную  $\nabla_1 \equiv \partial/\partial x^1 = ik_1$ , действующую на компоненты волнового поля. Напомним, что здесь  $s_e = c/\omega_{pe}$  — скин-длина электронов в плазме,  $\rho_s = \rho_i \sqrt{T_e/T_i}$ , где  $\rho_i = v_i/\omega_i$  — ларморовский радиус ионов, а функция  $\widetilde{G}(s_e/\rho_s)$  обладает следующим свойством (см. раздел 2.7):

$$\frac{\rho_s^2}{\widetilde{G}(s_e/\rho_s)} \approx \begin{cases} \rho_s^2, & s_e \ll \rho_s, \\ -s_e^2, & s_e \gg \rho_s. \end{cases}$$

Квадрат элемента длины в рассматриваемой ортогональной криволинейной системе координат имеет вид

$$ds^2 = g_1(dx^1)^2 + g_2(dx^2)^2 + g_3(dx^3)^2,$$

а ковариантные компоненты ротора —

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{E})_1 &= \frac{g_1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right), & (\text{rot}\mathbf{E})_2 &= \frac{g_2}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right), \\ (\text{rot}\mathbf{E})_3 &= \frac{g_3}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

где  $g = g_1 g_2 g_3$ . Используем для поперечного электрического поля колебаний разложение (2.7.4), в котором компоненты поля выражаются через скалярный и векторный потенциалы как

$$E_1 = -\nabla_1 \varphi + ik_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi, \quad E_2 = -ik_2 \varphi - \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi. \quad (3.1.2)$$

Расписывая покомпонентно уравнения (2.7.1), получаем

$$E_3 \approx -i \frac{\rho_s^2}{\widetilde{G}(s_e/\rho_s)} \frac{v_A \sqrt{g_3}}{\omega} \Delta_{\perp} \varphi, \quad (3.1.3)$$

где  $\Delta_{\perp} = g_1^{-1} \nabla_1^2 - g_2^{-1} k_2^2$  — поперечный лапласиан. Подставляя это выражение в два других уравнения, имеем

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 p \Delta_{\perp} \varphi' + \widehat{L}_T \varphi' = i \frac{k_2}{\sqrt{g_3}} \left( \widetilde{\Delta} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \psi, \quad (3.1.4)$$

$$\nabla_1 \widetilde{\Delta}_{\perp} \psi + \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_1 \psi = -i \frac{k_2 \sqrt{g}}{g_2} \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \Delta_{\perp} \varphi + p \widehat{L}_P \varphi \right), \quad (3.1.5)$$

где обозначено  $\varphi' \equiv \nabla_1 \varphi$ ,  $p = \sqrt{g_2/g_1}$ ,  $\Lambda^2 = (3/4)\rho_i^2 + s_e^2/\tilde{G}(s_e/\rho_s)$  (в области, где  $s_e \sim \rho_s$ , функция  $\Lambda^2$  комплексная, см. рис. 1.3). Здесь также использованы операторы

$$\hat{L}_T = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (3.1.6)$$

$$\hat{L}_P = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p^{-1} \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (3.1.7)$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_\perp + \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}}, \quad (3.1.8)$$

$$\tilde{\Delta}_\perp = \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \frac{k_z^2}{g_2}, \quad (3.1.9)$$

где  $\nabla_i \equiv \partial/\partial x^i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Операторы (3.1.6), (3.1.7) описывают продольную структуру тороидальных и полоидальных альфвеновских волн, а (3.1.8) и (3.1.9) являются аналогом оператора Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат. Легко проверить, что при переходе к декартовой системе координат в модели с одномерно-неоднородной плазмой получаем систему уравнений (2.7.9), (2.7.10), описывающих альфвеновский резонанс в неидеальной плазме (при этом  $g_1 = g_2 = g_3 = 1$  и  $\nabla_1 = \nabla_x$ ,  $\nabla_3 = ik_z$ ,  $k_2 = k_y$ ).

Для аксиально-симметричных колебаний ( $m = 0$ ) правые части уравнений (3.1.4), (3.1.5) обращаются в нуль. Тогда уравнение (3.1.4) описывает аксиально-симметричную альфвеновскую волну, не связанную с полем БМЗ-волны. Резонансная раскачка такой волны невозможна. Уравнение (3.1.5) в этом случае описывает аксиально-симметричную БМЗ-волну, для которой нет резонансных магнитных оболочек. Конечно, с учетом эффекта гиротропии плазмы (отличного от нуля малого параметра  $u = \omega/\omega_i \ll 1$ ) слабая связь этих колебаний все-таки имеется. Однако, мы этим эффектом пока пренебрежем.

Для колебаний с  $m \neq 0$  уравнение (3.1.4) описывает поле кинетических альфвеновских волн, возбуждаемых на резонансных магнитных оболочках крупномасштабными монохроматическими БМЗ-волнами. Решение второго уравнения, описывающего поле крупномасштабной БМЗ-волны, будет найдено далее в разд. 3.5, 3.6. Отметим здесь, что для БМЗ-волн с  $m \gg 1$  магнитосфера является областью непрозрачности, а их амплитуда экспоненциально убывает внутрь магнитосферы на масштабе  $\sim L/m$ , где  $L$  — характерный поперечный размер магнитосферы. Таким образом, в глубине магнитосферы альфвеновский резонанс достаточно эффективен только для основных азимутальных гармоник МГД-колебаний ( $m \sim 1$ ).

Как мы увидим далее, выражение, стоящее в правой части (3.1.4), мало меняется на масштабе локализации резонансной альфвеновской волны. Поэтому в главном порядке теории возмущений при решении задачи о структуре поля резонансных альфвеновских волн мы

будем полагать его константой. В качестве граничного условия для альфвеновских волн на ионосфере используем продифференцированное по  $x^1$  уравнение (2.17.44), где пренебрежем наличием сторонних токов в проводящем слое ионосферы:

$$\varphi'|_{x^3=x^3_{\pm}} = \left[ \mp i \frac{v_P}{\omega \sqrt{g_3}} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^3} \right]_{x^3=x^3_{\pm}}. \quad (3.1.10)$$

Здесь точки  $x^3_{\pm}$  являются координатами точек пересечения силовой линии с верхней границей ионосферы в северном (+) и южном (–) полушариях соответственно. Напомним, что верхнюю границу мы полагаем на высоте  $z = z_A \approx 1500$  км, где происходит резкое изменение величины градиента альфвеновской скорости. Кроме того, будем считать малым параметр  $\delta_{\pm} = (v_P/v_A)_{\pm} \ll 1$ , по которому далее будет построена теория возмущений.

Для того, чтобы найти решение уравнения в частных производных (3.1.4), сделаем следующее предварительное замечание. Как мы увидим далее, в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля (по координате  $x^3$ ) оно описывает стоячие между магнитоспряженными ионосферами альфвеновские волны. Длина волны основных гармоник этих волн сопоставима с длиной силовой линии ( $\sim L$ ) на резонансной магнитной оболочке. Если искать решение (3.1.4) по координате  $x^3$  в ВКБ-приближении ( $\varphi \sim \exp(\int k_3 dx^3)$ ), то для рассматриваемых колебаний  $k_3 \sim L^{-1}$ . В направлении поперек магнитных оболочек (по координате  $x^1$ ) характерный масштаб локализации резонансных альфвеновских волн мал и определяется малыми параметрами задачи. Таким образом, для ВКБ-компонент волнового вектора выполняется соотношение  $|k_1| \gg |k_3|$ .

Если искать решение (3.1.4) в ВКБ-приближении в общем виде как

$$\varphi' = \exp(i\Theta(x^1, x^3)),$$

где  $\Theta(x^1, x^3)$  — большая квазиклассическая фаза, то

$$k_1 = \nabla_1 \Theta(x^1, x^3), \quad k_3 = \nabla_3 \Theta(x^1, x^3).$$

Условие  $|k_1| \gg |k_3|$  означает, что зависимость фазы  $\Theta$  от  $x^1$  гораздо более сильная, чем от  $x^3$ . В главном порядке по параметру  $|k_3/k_1| \ll 1$  следует считать, что  $\Theta$  не зависит от  $x^3$  и можно выделить основную компоненту фазы  $\Theta_0$ , зависящую только от  $x^1$ , а полную фазу представить в виде

$$\Theta(x^1, x^3) = \Theta_0(x^1) + \Theta_1(x^1, x^3),$$

где  $\Theta_0 \gg \Theta_1$ . Тогда в главном порядке теории возмущений компонента волнового вектора  $k_1 = \nabla \Theta_0(x^1)$  не зависит от  $x^3$  и является функцией только координаты  $x^1$ . Следовательно, полное решение (3.1.4) можно представить в виде

$$\varphi'(x^1, x^3) = V'(x^1)H(x^1, x^3), \quad (3.1.11)$$

где в ВКБ-приближении функция  $V'(x^1) = \exp(i\Theta_0(x^1))$  описывает мелкомасштабную структуру рассматриваемых колебаний поперек магнитных оболочек, а  $H(x^1, x^3) = \exp(i\Theta_1(x^1, x^3))$  — их структуру вдоль магнитных силовых линий. При этом зависимость  $H(x^1, x^3)$  от  $x^1$  достаточно слабая, так, что в главном порядке производные по  $x^1$  следует отнести только к функции  $V'(x^1)$ . Однако решение (3.1.4) можно искать в виде (3.1.11) и в общем случае, когда ВКБ-приближение неприменимо. Такой подход является одним из вариантов метода разных масштабов в задачах для функции двух переменных.

**3.1.1. Продольная структура тороидальных альфвеновских волн.** Будем искать общее решение уравнения (3.1.4) с граничными условиями (3.1.10) в виде

$$\varphi'(x^1, x^3) = V'(x^1)(T(x^1, x^3) + h(x^1, x^3)), \quad (3.1.12)$$

где функция  $T(x^1, x^3)$  является решением задачи нулевого приближения

$$\hat{L}_T T = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 T + p \frac{\omega^2}{v_A^2} T = 0 \quad (3.1.13)$$

с однородными граничными условиями на ионосфере  $T(x^1, x^3_{\pm}) = 0$ . Уравнение (3.1.13) выделяется из (3.1.4), если в нем пренебречь малыми членами: первым слагаемым, пропорциональным малому параметру  $\Lambda^2$ , и правой частью, описывающей источник резонансных колебаний — поле магнитозвуковой волны.

Это уравнение можно рассматривать как уравнение нулевого порядка теории возмущений, определяющее структуру альфвеновских волн вдоль магнитных силовых линий. В нем зависимость функции  $T$  от координаты  $x^1$  определяется коэффициентами уравнения — альфвеновской скоростью  $v_A(x^1, x^3)$  и компонентами метрического тензора  $g_i(x^1, x^3)$ , которые зависят от  $x^1$  как от параметра. Следовательно, характерный масштаб изменения полученного решения  $T(x^1, x^3)$  по координате  $x^1$  определяется масштабом неоднородности фоновой плазмы, который много больше масштаба локализации резонансных альфвеновских колебаний по этой координате.

Второе слагаемое в правой части (3.1.12) является малой поправкой ( $|h(x^1, x^3)| \ll |T(x^1, x^3)|$ ), которую следует учитывать в следующем, первом порядке теории возмущений. В этом же первом порядке будет учтена отличная от нуля правая часть (3.1.4) и малая поправка в граничных условиях (3.1.10), описывающая затухание колебаний в ионосфере. Решениями уравнения (3.1.13) с однородными граничными условиями на ионосфере являются собственные функции и соответствующие им собственные значения частоты

$$T = T_N(x^1, x^3), \quad \omega = \Omega_{TN}(x^1), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Они описывают продольную (вдоль магнитных силовых линий) структуру тороидальных стоячих альфвеновских волн ( $N$  — продольное



волновое число) на резонансной магнитной оболочке. В главном порядке теории возмущений полную двумерную структуру таких волн в меридиональном сечении можно представить в виде

$$\varphi' = \varphi'_N(x^1, x^3) = C\delta(x^1 - x^1_{TN})T_N(x^1, x^3),$$

где  $C$  — произвольная константа,  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $x^1_{TN}$  — координата резонансной магнитной оболочки. То есть, колебания сосредоточены на резонансной магнитной оболочке  $x^1 = x^1_{TN}$ , а вдоль силовых линий магнитного поля имеют структуру, которая описывается собственными функциями  $T_N(x^1_{TN}, x^3)$ .

Как следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [237]), набор решений (3.1.13) образует полную систему, а соответствующие собственные функции можно выбрать ортонормированными:

$$\int_{x^3_-}^{x^3_+} \frac{\sqrt{g}}{v_A g_1} T_N T_{N'} dx^3 = \delta_{NN'}.$$

Произвольное решение уравнения (3.1.4) можно искать в виде разложения по этим функциям:

$$\varphi'(x^1, x^3) = \sum_{N=1}^{\infty} V'_N(x^1) T_N(x^1, x^3). \quad (3.1.14)$$

Для основных гармоник стоячих волн ( $N \sim 1$ ) решение (3.1.13) можно определить только численно. Однако, чтобы представить себе качественное поведение собственных функций  $T_N(x^1, x^3)$  получим это решение в ВКБ-приближении, которое применимо для гармоник с  $N \gg 1$ . Будем искать решение (3.1.13) в виде

$$T = \exp(i\bar{\theta}).$$

Здесь  $\bar{\theta}$  — большая квазиклассическая фаза, которую представим в виде

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 + \dots,$$

где  $\bar{\theta}_0 \gg \bar{\theta}_1 \gg \dots$ . Подстановка этого решения в (3.1.13) дает следующее уравнение для фазы:

$$-\bar{\theta}'^2 + i\bar{\theta}'' + i(\ln \frac{g_2}{g})'\bar{\theta}' + g_3 \frac{\omega^2}{v_A^2} = 0,$$

где штрих обозначает производную:  $\theta' = \nabla_3 \theta = \partial\theta/\partial x^3$ . В нулевом порядке ВКБ-приближения имеем

$$\bar{\theta}'_0 = \pm \sqrt{g_3} \frac{\omega}{v_A},$$

а в первом порядке

$$\bar{\theta}'_1 = \frac{i}{2} \left( \ln \frac{g_2}{\sqrt{g}} \theta'_0 \right)' = \frac{i}{2} \left( \ln \frac{p}{v_A} \right)'.$$

Таким образом, ортонормированные собственные функции имеют в ВКБ-приближении следующий вид:

$$T_N(x^1, x^3) = \sqrt{\frac{2v_A}{pt_A}} \sin \left( \Omega_{TN} \int_{x^3_-}^{x^3_+} \frac{\sqrt{g_3} dx^3}{v_A} \right), \quad (3.1.15)$$

где  $\Omega_{TN} = \pi N/t_A$  — собственные значения задачи (3.1.13) в ВКБ-приближении,

$$t_A = \int_{x^3_-}^{x^3_+} \frac{\sqrt{g_3} dx^3}{v_A} \quad (3.1.16)$$

— время пробега с альфвеновской скоростью вдоль магнитной силовой линии между магнитосопреженными ионосферами на резонансной магнитной оболочке  $x^1 = x^1_{TN}$ . Решения (3.1.15) описывают стоячие между точками  $x^3_+, x^3_-$  волны с  $N - 1$  узлом на силовой линии. Отметим, что в общем случае функции (3.1.15) могут быть несимметричными относительно экваториальной плоскости.

**3.1.2. Структура резонансных кинетических альфвеновских волн поперек магнитных оболочек.** Подставляя в (3.1.4) решение в виде (3.1.12) в первом порядке теории возмущений получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{p\Lambda^2}{g_1} T_N \nabla_1^2 V'_N + V'_N \left( \widehat{L}_T(\Omega_{TN}) h_N + p \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N \right) = \\ = i \frac{k_2}{\sqrt{g_3}} \left( \widetilde{\Delta} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \psi, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

определяющее структуру рассматриваемых колебаний поперек магнитных оболочек (функцию  $V'_N(x^1)$ ). Отметим, что в (3.1.17) мы пренебрегли малым слагаемым  $\sim k_2^2 \Lambda^2$ , дающим небольшую поправку в собственную частоту рассматриваемых колебаний.

В граничных условиях на ионосфере учтем отличную от нуля правую часть в (3.1.10), описывающую диссипацию колебаний в ионосфере:

$$h_N|_{x^3=x^3_{\pm}} = \left[ \mp i \frac{v_P}{\omega \sqrt{g_3}} \frac{\partial T_N}{\partial x^3} \right]_{x^3=x^3_{\pm}}. \quad (3.1.18)$$

Интегрируя (3.1.17) вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами северного и южного полушарий с граничными условиями (3.1.18), получаем

$$\sigma_N(x^1) \frac{\partial^2 V'_N}{\partial x^{1^2}} + \frac{(\omega + i\gamma_{TN})}{\omega^2} V'_N = i \frac{k_2}{\omega^2} \mu_N(x^1), \quad (3.1.19)$$

где обозначено

$$\sigma_N(x^1) = \int_{x^3_-}^{x^3_+} \frac{p\Lambda^2}{g_1 v_A^2} T_N^2(x^1, x^3) \sqrt{g_3} dx^3. \quad (3.1.20)$$

Если для рассматриваемых колебаний применимо ВКБ-приближение по координате  $x^3$  ( $N \gg 1$ ), то

$$\sigma_N(x^1) = \frac{1}{t_A} \int_{x^3_-}^{x^3_+} \frac{\Lambda^2 \sqrt{g_3}}{g_1 v_A} dx^3$$

представляет собой среднее значение величины  $\Lambda^2/g_1$  на силовой линии:  $\sigma_N(x^1) = \langle \Lambda^2/g_1 \rangle$ , где скобки  $\langle f \rangle$  обозначают среднее вдоль магнитной силовой линии значение функции  $f(x^3)$ . Учитывая общие свойства функции  $\Lambda^2$  (см. гл. 1), можно ее представить как  $\sigma_N = \rho_N^2 \exp(-i\alpha_N)$ , где  $\rho_N$  имеет размерность длины, а фаза лежит в интервале  $0 \leq \alpha_N \leq \pi$ .

Кроме того, из граничных условий на ионосфере (3.1.18) в (3.1.19) появилась мнимая добавка к частоте

$$\gamma_{TN} = \frac{1}{\Omega_{TN}^2} \left[ v_{p+p+} \left( \frac{\partial T_N}{\partial l} \right)_+^2 + v_{p-p-} \left( \frac{\partial T_N}{\partial l} \right)_-^2 \right],$$

представляющая собой декремент затухания стоячих тороидальных альфвеновских волн в проводящем слое ионосферы, где индексы  $\pm$  указывают на ионосферу северного и южного полушарий соответственно. Здесь производная берется по физической длине силовой линии ( $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ ).

Функция

$$\mu_N(x^1) = \int_{x^3_-}^{x^3_+} T_N \left( \tilde{\Delta} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \psi dx^3$$

в правой части (3.1.19) описывает источник резонансных альфвеновских волн, связанный с полем БМЗ-колебаний (функцией  $\psi$ ).

Если функции  $\Omega_{TN}(x^1)$  в окрестности резонансной поверхности меняются монотонно, то в области локализации резонансных

альфвеновских колебаний их собственные частоты можно представить в линейном приближении как

$$\Omega_{TN}^2(x^1) \approx \omega^2 \left( 1 - \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N} \right), \quad (3.1.21)$$

где  $a_N = (\nabla_1 \ln \Omega_{TN}^2)_{x_{TN}^1}^{-1}$  — характерный масштаб изменения функции  $\Omega_{TN}^2(x^1)$  вблизи резонансной оболочки. Таким образом, в окрестности резонансной поверхности (3.1.18) можно приближенно представить в виде

$$\rho_N^2 e^{-i\alpha_N} \frac{\partial^2 V'_N}{\partial x^{12}} + \frac{x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon_{TN}}{a_N} V'_N = i \frac{k_2}{\omega^2} \mu_N(x^1), \quad (3.1.22)$$

где  $\varepsilon_{TN} = 2a_N \gamma_{TN} / \omega$  — характерный масштаб убывания амплитуды резонансных колебаний по координате  $x^1$ , обусловленного их диссипативным затуханием в ионосфере. Это уравнение имеет точно такой же вид, как уравнение (2.7.18), описывающее структуру кинетических альфвеновских волн в одномерно-неоднородной плазме. Полагая правую часть уравнения (3.1.22) постоянной, запишем его решение, удовлетворяющее граничным условиям (ограниченность амплитуды на асимптотиках), в виде

$$V'_N(x^1, \omega) = i \frac{k_2}{\omega^2} \mu_N \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} e^{i\alpha_N/3} G \left( e^{i\alpha_N/3} \frac{x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon_{TN}}{a_N^{1/3} \rho_N^{2/3}} \right), \quad (3.1.23)$$

где функция  $G(z)$  является решением неоднородного уравнения Эйри (2.7.20) и имеет интегральное представление (2.7.21) и асимптотики (2.7.22). В двух предельных случаях  $\alpha_N = \pi$  ( $\beta \ll m_e/m_i$  — приближение «холодной плазмы») и  $\alpha_N = 0$  ( $\beta \gg m_e/m_i$  — приближение «теплой плазмы») качественное поведение функции (3.1.23) при малом затухании колебаний ( $\gamma_{TN} \ll (a_N/\rho_N)^{2/3}\omega$ ) представлено на рис. 2.12. Точное распределение реальной и мнимой частей функции  $G(z)$  при  $\alpha_N = 0$  и  $\gamma_{TN} = 0$  приведено на рис. 2.11.

Однако в реальной магнитосфере затухание стоячих альфвеновских волн из-за их диссипации в проводящем слое ионосферы достаточно велико. Поэтому асимптотика функций  $G(z)$  определяется скорее диссипативным масштабом  $\varepsilon_{TN}$  и имеет вид  $G(z) \approx z^{-1}$ , что при  $|z| \rightarrow \infty$  дает

$$V'_N(x^1, \omega) \approx i \frac{k_2}{\omega^2} \frac{\mu_N a_N}{x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon_{TN}}. \quad (3.1.24)$$

Это приближение применимо если характерная длина волны кинетических альфвеновских волн  $l_N$  меньше их диссипативного масштаба  $\varepsilon_{TN}$  (что аналогично условию  $\gamma_{TN} \gtrsim (a_N/\rho_N)^{2/3}\omega$ ). В этом случае выражение (3.1.24) можно использовать даже на резонансной поверхности, а продольная компонента электрического поля колебаний становится пренебрежимо малой (см. (3.1.3)).

Решение (3.1.23) можно обобщить, воспользовавшись разложением (3.1.21). Выражая аргумент функции  $G$  через частоту  $\omega$  и пе-

реходя от компоненты волнового вектора  $k_2$  к производной от поля БМЗ-колебаний по  $x^2$ , получаем

$$V'_N(x^1, \omega) = \frac{\nabla_2 \tilde{\mu}_N(x^1, x^2, \omega)}{\omega^2} \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} e^{i\alpha_N/3} \times \\ \times G \left[ 2 \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} e^{i\alpha_N/3} \frac{\omega - \Omega_{TN} + i\gamma_{TN}}{\Omega_{TN}} \right]. \quad (3.1.25)$$

В таком виде это выражение можно использовать для описания поля монохроматических альфвеновских волн как вблизи резонансной поверхности, где применимо линейное разложение (3.1.21), так и вдали от нее, где оно становится неприменимым. Но, что еще более важно, это выражение можно использовать для исследования широкополосных резонансных альфвеновских колебаний, проводя в точке наблюдения обратное фурье-преобразование по спектру частот источника.

Таким образом, полная пространственная структура резонансных кинетических альфвеновских волн, возбуждаемых монохроматической БМЗ-волной в дипольноподобной магнитосфере, представляет собой набор стоячих альфвеновских волн (каждая гармоника на своей резонансной магнитной оболочке). Продольная структура таких волн описывается уравнением (3.1.13), решение которого в ВКБ-приближении имеет вид (3.1.15). Структура каждой такой волны поперек магнитных оболочек описывается уравнением (3.1.22), решение которого (3.1.23) описывает волны, убегające от резонансной поверхности. Направление распространения этих волн зависит от температуры плазмы. В плазме с  $\langle \beta \rangle \gg m_e/m_i$  кинетические альфвеновские волны убегают по координате  $x^1$  в одну сторону от резонансной магнитной оболочки, а с другой от нее стороны расположена область непрозрачности. В плазме с  $\langle \beta \rangle \ll m_e/m_i$  картина распространения прямо противоположная — области прозрачности и непрозрачности по координате  $x^1$  меняются местами относительно выше рассмотренного случая. Волна убегает в ту сторону, которая в плазме с  $\langle \beta \rangle \gg m_e/m_i$  была областью непрозрачности.

Однако в области, где  $\langle \beta \rangle \sim m_e/m_i$ , поведение амплитуды колебаний, убегających от резонансной поверхности, существенно отличается от ее поведения в этих двух предельных случаях. Используя вдали от резонансной поверхности асимптотические выражения (2.7.22), получим для распределения амплитуды колебаний поперек магнитных оболочек вдали от резонансной поверхности ( $x^1 - x^1_{TN} \gg l_N$ ):

$$|V'_N(x^1)| \approx \sqrt{\pi} \left| \frac{k_2 \mu_N}{\omega^2} \right| \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} \left( \frac{l_N}{x^1 - x^1_{TN}} \right)^{1/4} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{x^1 - x^1_{TN}}{l_N} \right)^{3/2} \sin \frac{\alpha_N}{2} - \varepsilon_{TN} \frac{\sqrt{x^1 - x^1_{TN}}}{l_N^{3/2}} \cos \frac{\alpha_N}{2} \right], \quad (3.1.26)$$

где  $l_N = a_N^{1/3} \rho_N^{2/3}$  — характерная длина волны колебаний по координате  $x^1$ . Таким образом, если при  $\alpha_N = 0$  затухание колебаний,

убегающих от резонансной поверхности, связано только с их (слабым) поглощением в проводящем слое ионосферы, то при  $\alpha_N \sim 1$ , колебания сильно затухают на масштабе, порядка длины волны  $l_N$ . Как мы видели в гл. 1, это связано с бесстолкновительным затуханием альфвеновских волн на электронах фоновой плазмы (затуханием Ландау), приводящим к их сильному поглощению.

В магнитосфере Земли область с сильным поглощением альфвеновских волн расположена в переходном слое плазмоспаузы, в котором параметры плазмы меняются от значений, характерных для холодной плазмосферы ( $\beta \ll m_e/m_i$ ), до значений, типичных для внешней магнитосферы ( $\beta \gg m_e/m_i$ ). В этой же области имеется резкий градиент распределения плотности (и альфвеновской скорости) фоновой плазмы поперек магнитных оболочек, что приводит к большой плотности резонансных магнитных оболочек. Именно с проекцией этой области на ионосферу связана наиболее частая регистрация таких оптических явлений как «красные дуги» [238]. Они инициируются потоками надтепловых электронов, высыпаящихся в ионосферу из магнитосферы. Одним из объяснений возникновения этих потоков является указанное выше взаимодействие альфвеновских волн с электронами фоновой плазмы. В [239] этот механизм был предложен для объяснения затухания магнитосферного кольцевого тока на восстановительной фазе суббури.

**3.1.3. Обратное влияние резонансных альфвеновских колебаний на поле БМЗ-волны.** Выше мы определили пространственное распределение поля резонансных стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых в магнитосфере крупномасштабной монохроматической БМЗ-волной. Теперь оценим уровень обратного влияния резонансной альфвеновской волны на генерирующую ее БМЗ-волну. Мы предполагаем, что крупномасштабная БМЗ-волна имеет характерные пространственные масштабы, сопоставимые с масштабами неоднородности магнитосферной плазмы  $\sim L$ . Проинтегрируем уравнение (3.1.5) по переменной  $x^1$  поперек резонансной магнитной оболочки  $x_{TN}$  на масштабе  $\varepsilon$ , много большем масштаба локализации альфвеновской волны, но много меньшем масштаба БМЗ-волны:  $l_N \ll \varepsilon \ll L$ .

В результате, учитывая в правой части (3.1.5) только слагаемое с максимальной амплитудой  $\sim \nabla_1 \varphi$ , получим следующее приближенное выражение:

$$\left\{ \tilde{\Delta}_\perp \psi \right\}_{x_{TN}^1 \pm \varepsilon} \approx i \frac{k_2 \sqrt{g}}{g_2} \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\Lambda^2}{g_1} \left\{ \varphi' \right\}_{x_{TN}^1 \pm \varepsilon}, \quad (3.1.27)$$

где фигурные скобки обозначают разность значений, стоящего в них выражения в точках  $x_{TN}^1 \pm \varepsilon$ , а коэффициенты в правой части берутся на резонансной поверхности. Используя для  $\varphi'$  выражение (3.1.14), в котором характерная продольная функция определяется как (3.1.15),

а поперечная как (3.1.23), и учитывая что в области прозрачности  $|G(z)| \sim 1$ , получаем следующую оценку:

$$\{\varphi'\} \sim \frac{1}{\sqrt{g_2 g_3}} \frac{k_2 a_N}{\omega^2} \left(\frac{a_N}{\rho_N}\right)^{2/3} \frac{v_A}{t_A} \tilde{\Delta}_\perp \psi,$$

где  $a_N \sim L$  — характерный масштаб изменения  $v_A$  по координате  $x^1$  и все параметры в правой части берутся на резонансной магнитной оболочке. Подставляя это в (3.1.27), получаем следующую оценку:

$$\frac{\{\tilde{\Delta}_\perp \psi\}_{x_{TN}^1 \pm \varepsilon}}{(\tilde{\Delta}_\perp \psi)_{x_{TN}^1}} \sim \frac{(k_2 \rho_N)^2}{g_1 g_2} \left(\frac{a_N}{\rho_N}\right)^{2/3} = \frac{(k_2 l_N)^2}{g_1 g_2} \ll 1,$$

которая показывает, что относительное изменение второй производной по  $x^1$  от функции  $\psi$  при переходе через резонансную поверхность мало. Повторным интегрированием (3.1.5) легко показать, что на рассматриваемых масштабах малы также изменения самой функции  $\psi$  и ее первой производной  $\nabla_1 \psi$ . Следовательно, можно правую часть уравнения (3.1.4) считать практически постоянной на масштабе локализации резонансной альфвеновской волны, а при определении поля БМЗ-волны в главном порядке теории возмущений полагать правую часть (3.1.5) равной нулю.

### 3.2. Альфвеновский резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере

В предыдущем разделе была определена пространственная структура кинетических альфвеновских волн, возбуждаемых БМЗ-волнами на резонансных магнитных оболочках в дипольноподобной аксиально-симметричной модели магнитосферы. В настоящем разделе в рамках такой же модели будет исследован альфвеновский резонанс при достаточно сильном поглощении альфвеновских волн в ионосфере. В этом случае поперечная структура альфвеновских волн определяется их диссипацией, а кинетические поправки, рассмотренные в предшествующем разделе, малы и их можно не учитывать. Мы определим структуру поля как резонансных альфвеновских волн, так и возбуждающих их монохроматических БМЗ-волн. Также проведем оценку обратного влияния альфвеновских волн на поле БМЗ-колебаний.

**3.2.1. Модель среды и основные уравнения.** Как и в предыдущем разделе, рассмотрим модель магнитосферы с дипольноподобным геомагнитным полем (см. рис. 3.1). В численных расчетах будем считать его дипольным, а в аналитических — только дипольноподобным, с похожей геометрией силовых линий магнитного поля. Это позволяет использовать полученные результаты аналитических расчетов для конфигураций поля, аналогичных тем, которые соответствуют дневной

части магнитосферы Земли. Мы не будем учитывать движение плазмы солнечного ветра. Это, конечно, накладывает определенные ограничения на применимость используемой модели. Результаты расчетов в такой модели применимы для дневной части магнитосферы. В подсолнечной области магнитопаузы расположена точка застоя солнечного ветра, поэтому эффекты, связанные с движением плазмы, вносят сравнительно небольшой вклад в структуру поля рассматриваемых МГД-колебаний.

Для численных расчетов зададим следующую модель среды. Используем криволинейную ортогональную систему координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , связанную с силовыми линиями геомагнитного поля, в которой координата  $x^1$  определяет магнитную оболочку,  $x^2$  — силовую линию на данной магнитной оболочке, а  $x^3$  — точку на силовой линии. Геомагнитное поле в численных расчетах будем считать дипольным. В качестве продольной координаты  $x^3$  используем угол  $\theta$ , между точкой на данной силовой линии и экваториальной плоскостью (см. рис. 3.1). Элемент длины вдоль силовой линии дается следующим соотношением:

$$dl = \sqrt{g_3} dx^3 = a\bar{\eta}(\theta) \cos \theta d\theta,$$

где  $\bar{\eta}(\theta) = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}$ ,  $a$  — экваториальный радиус рассматриваемой силовой линии, который мы используем вместо координаты  $x^1$ . В качестве координаты  $x^2$  используем азимутальный угол  $\phi$  (при этом  $k_2 = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — азимутальное волновое число). Отметим, что система криволинейных координат  $(a, \phi, \theta)$ , конечно, не ортогональна, но каждая из этих координат однозначно связана с соответствующими криволинейными координатами  $(x^1, x^2, x^3)$ . Поперечные компоненты метрического тензора в данной системе координат имеют вид

$$g_1 = \cos^6 \theta / \bar{\eta}(\theta), \quad g_2 = a^2 \cos^6 \theta.$$

Широта пересечения силовой линии с ионосферой определяется как

$$\theta^* = \arccos \sqrt{r_i/a},$$

где  $r_i$  — радиус ионосферы.

Еще один элемент модели среды — альфвеновская скорость  $v_A$ . Используем для нее следующую модель:

$$v_A = \frac{v_{Am} + v_{Asw}}{2} - \frac{v_{Am} - v_{Asw}}{2} \operatorname{th} \frac{a \cos^2 \theta - a_m}{\Delta_m}, \quad (3.2.1)$$

где  $v_{Asw}$  — значение альфвеновской скорости в солнечном ветре,  $\Delta_m$  — эффективная толщина магнитопаузы. В численных расчетах мы будем предполагать, что магнитопауза представляет собой сферу радиуса  $a_m$ , хотя представленная модель допускает задание магнитопаузы в любой аксиально-симметричной форме. Функция  $v_{Am}(a, \theta)$  описывает двумер-



ное распределение альфвеновской скорости внутри магнитосферы. Для нее мы используем следующее представление:

$$v_{Am} = \frac{1}{2} \left[ \left( v_{A1} \left( \frac{a_1}{a} \right)^{\mu_1} + v_{A2} \left( \frac{a_2}{a} \right)^{\mu_2} \right) - \left( v_{A1} \left( \frac{a_1}{a} \right)^{\mu_1} - v_{A2} \left( \frac{a_2}{a} \right)^{\mu_2} \right) \operatorname{th} \frac{a - a_p}{\Delta_p} \right] \left( \frac{\bar{\eta}(\theta)}{\cos^6 \theta} \right)^\nu, \quad (3.2.2)$$

где  $v_{A1}$  и  $v_{A2}$  — характерные значения альфвеновской скорости, соответственно во внутренней и внешней областях магнитосферы,  $a_p, \Delta_p$  — экваториальный радиус и характерная толщина плазмопаузы. Последний множитель в этом соотношении описывает изменение альфвеновской скорости вдоль силовых линий геомагнитного поля. Формула (3.2.2) моделирует распределение альфвеновской скорости в дневной части средневозмущенной магнитосферы при выборе следующих величин входящих в нее параметров:  $v_{A1} = 250$  км/с,  $v_{A2} = 500$  км/с,  $v_{Asw} = 50$  км/с,  $a_m = 10R_E$  ( $R_E = 6370$  км — радиус Земли),  $\Delta_m = 0,5R_E$ ,  $a_p = 4R_E$ ,  $\Delta_p = 0,5R_E$ ,  $a_1 = 2,5R_E$ ,  $a_2 = 5R_E$ ,  $\mu_1 = 1,5$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\nu = 0,25$ . На рис. 3.2 представлено экваториальное распределение  $v_A(a, 0)$  поперек магнитных оболочек в данной модели магнитосферы. На этом же рисунке представлено распределение основного периода собственных альфвеновских колебаний магнитосферы в ВКБ-приближении (3.1.16) от параметра магнитной оболочки  $L = a/R_E$  (параметра Макилвейна).

Поле МГД-колебаний в рассматриваемой аксиально-симметричной модели магнитосферы будем искать в виде разложения по фурье-гармоникам вида  $\exp(ik_2 x^2 - i\omega t)$ . Используем приближение холодной плазмы ( $T_i = T_e = 0$ ). В этом случае в плазме отсутствует медленный

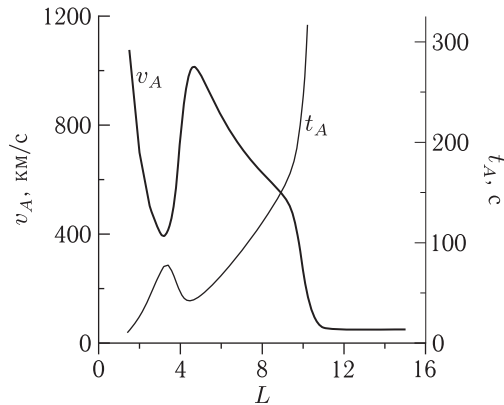


Рис. 3.2. Экваториальная зависимость альфвеновской скорости  $v_A(L, 0)$  в рассматриваемой модели среды и соответствующая зависимость основного периода собственных альфвеновских колебаний магнитосферы от параметра магнитной оболочки  $t_A(L)$

магнитный звук, а есть только альфвеновские волны и быстрые магнитозвуковые колебания. Используя разложение электрического поля колебаний на потенциальную и вихревую составляющие (2.7.4), из системы линеаризованных уравнений идеальной МГД (1.0.5) получим следующую систему уравнений (см. Приложение Д):

$$\begin{aligned} \nabla_1 \sqrt{g_3} \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \varphi = \\ = ik_2 \left( \nabla_1 \sqrt{g_3} \widehat{L}_T \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \psi - \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_1 \psi \right), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\nabla_1 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_1 \psi - k_2^2 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \psi + \sqrt{\frac{g}{g_3}} \widehat{L}_T \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \psi = -\frac{i}{k_2} \sqrt{\frac{g}{g_3}} \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi, \quad (3.2.4)$$

где обозначено:  $\nabla_i = \partial/\partial x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $g_i$  — компоненты метрического тензора,  $g = g_1 g_2 g_3$ ,  $p = \sqrt{g_2/g_1}$ , операторы  $\widehat{L}_T$  и  $\widehat{L}_P$  определяются выражениями (3.1.6) и (3.1.7),  $v_A$  — скорость Альфвена. Уравнения (Д.1) и (Д.2) (Приложение Д) дают связь ковариантных компонент электрического (**E**) и магнитного (**B**) поля МГД-колебаний с потенциалами  $\varphi$  и  $\psi$ . Физические компоненты векторов связаны с ковариантными компонентами соотношениями  $\widetilde{E}_i = E_i/\sqrt{g_i}$ ,  $\widetilde{B}_i = B_i/\sqrt{g_i}$ , а элемент длины вдоль силовой линии определяется как  $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ .

Уравнение (3.2.3) описывает поле альфвеновских волн, а (3.2.4) — поле магнитозвуковых волн. В левых частях этих уравнений стоят операторы, которые при переходе к однородной плазме дают дисперсионные уравнения соответственно для альфвеновских  $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$  и быстрых магнитозвуковых волн  $\omega^2 = k^2 v_A^2$ . Взаимодействие этих волн в неоднородной плазме описывается правыми частями уравнений (3.2.3), (3.2.4), которые при переходе к однородной плазме обращаются в нуль.

Уравнение (3.2.3) можно получить и прямо из системы уравнений (3.1.4), (3.1.5) в пределе  $\Lambda^2 \rightarrow 0$ . Для этого продифференцируем (3.1.4) по  $x^1$ , домножим (3.1.5) на  $-ik_2/\sqrt{g_3}$  и сложим получившиеся уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \sqrt{g} \Delta_{\perp}^2 \varphi + \nabla_1 \sqrt{g_3} \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \varphi = \\ = ik_2 \left( \nabla_1 \sqrt{g_3} \widehat{L}_T \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \psi - \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_1 \psi \right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

При  $\Lambda^2 = 0$  отсюда получается уравнение (3.2.3). Отметим еще раз, что это приближение можно использовать при достаточно сильной диссипации альфвеновских волн, когда их диссипативный масштаб по координате  $x^1$  много больше дисперсионного масштаба ( $\varepsilon_{TN} \gg l_N$ ). Далее мы рассмотрим задачу о падении на магнитосферу монохроматической БМЗ-волны из солнечного ветра и ее отражении от магни-

топаузы при наличии внутри магнитосферы резонансных поверхностей для альфвеновских волн.

### 3.2.2. Структура поля резонансной альфвеновской волны.

В окрестности магнитной оболочки, где сосредоточено поле резонансной альфвеновской волны, масштаб ее локализации по координате  $x^1$  оказывается много меньше длины волны вдоль силовой линии. В этом случае, как показано в разд. 3.1.1, решение уравнения (3.2.3) для потенциала  $\varphi$  можно искать в виде

$$\varphi = [V(x^1)T(x^1, x^3) + h(x^1, x^3)] \exp(ik_2 x^2 - i\omega t). \quad (3.2.6)$$

Здесь функция  $V(x^1)$  описывает мелкомасштабную структуру альфвеновской волны поперек магнитных оболочек,  $T(x^1, x^3)$  — структуру волны вдоль силовой линии, а функция  $h(x^1, x^3)$  является малой поправкой в высших порядках теории возмущений. Подробное решение уравнения вида (3.2.3) методом возмущений представлено в разд. 3.1.1.

В главном порядке теории возмущений на функцию  $T(x^1, x^3)$  получается уравнение вида (3.1.13) с однородными граничными условиями на ионосфере:  $T(x^1, x^3_{\pm}) = 0$ . Его решениями, удовлетворяющими граничным условиям на ионосфере, является набор собственных функций  $T_N(x^1, x^3)$ , где  $N = 1, 2, \dots$  продольное собственное число, нумерующее гармоники стоячих альфвеновских волн, и соответствующий им набор собственных частот  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$ . Эти решения описывают стоячие альфвеновские волны тороидального типа на магнитной оболочке, соответствующей координате  $x^1$ . В ВКБ-приближении по координате  $x^3$  решения этого уравнения имеют вид (3.1.15), а соответствующие им собственные значения частот стоячих альфвеновских волн — (3.1.16).

Для основных гармоник стоячих альфвеновских волн ВКБ-приближение по координате  $x^3$ , строго говоря, неприменимо. Его в этом случае можно использовать только для качественного представления структуры рассматриваемых колебаний. Для более точного исследования таких колебаний был проведен численный расчет их собственных функций и собственных частот. На рис. 3.3 представлены графики зависимости собственных частот  $\Omega_{TN}(x^1)$  первых семи гармоник стоячих тороидальных альфвеновских волн от параметра магнитной оболочки  $L$  в описанной выше модели дипольной магнитосферы. Особенностями этих распределений является характерное «колени» в окрестности плазмотаузы ( $L = 4$ ) и резкое уменьшение величины  $v_A$  (и  $\Omega_{TN}(x^1)$ ) в переходной области магнитопаузы ( $L \approx 10$ ).

В следующем порядке теории возмущений из (3.2.3) получается уравнение на функцию  $V_N$ , аналогичное (3.1.17). Если умножить это уравнение слева на  $T_N$  и проинтегрировать вдоль силовой линии, оно приобретает вид

$$\nabla_1 [(\omega + i\gamma_{TN})^2 - \Omega_{TN}^2] \nabla_1 V_N - k_y^2 [(\omega + i\gamma_{TN})^2 - \Omega_{TN}^2] V_N = i \frac{k_y}{\beta_N} \mu_N, \quad (3.2.7)$$

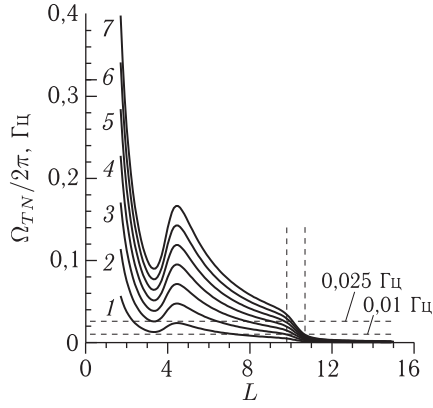


Рис. 3.3. Распределение собственных частот первых семи гармоник стоячих тороидальных альфвеновских волн поперек магнитных оболочек в дипольной модели магнитосферы. Горизонтальные штриховые линии соответствуют частотам магнитозвуковых волн, падающих на магнитосферу из солнечного ветра. Вертикальные штриховые линии — условные границы переходного слоя магнитопаузы

где введены следующие обозначения:

$$k_y = k_2 \sqrt{\alpha_{PN}/\alpha_{TN}}, \quad \beta_N = \sqrt{\alpha_{PN}\alpha_{TN}},$$

$$\alpha_{PN} = \oint \frac{T_N^2 dl}{pA^2}, \quad \alpha_{TN} = \oint \frac{pT_N^2 dl}{A^2},$$

$$\mu_N = \oint T_N \left[ \nabla_1 \sqrt{g_3} \hat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi - \sqrt{g_3} \hat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right] dx^3.$$

При выводе (3.2.7) в левой части уравнения мы пренебрегли различием операторов  $\hat{L}_P$  и  $\hat{L}_T$ . Это допустимо для гармоник альфвеновских колебаний с  $m \sim 1$ , поскольку их характерный масштаб по координате  $x^1$  много больше расстояния между полоидальной и тороидальной резонансными поверхностями и структура волнового поля на них практически идентична (см. разд. 3.7, 3.13). Декремент затухания стоячих альфвеновских волн  $\gamma_{TN}$  появился здесь из граничных условий на ионосфере и связан с диссипацией их энергии в проводящем слое ионосферы (см. разд. 3.1.2).

Если в рассматриваемой области магнитосферы альфвеновская скорость поперек магнитных оболочек меняется монотонно, то в узких окрестностях резонансных оболочек  $x^1 = x_{TN}^1$  (где  $\omega = \Omega_{TN}(x_{TN}^1)$ ) функции  $\Omega_{TN}(x^1)$  можно линеаризовать и представить в виде (3.1.21). Переходя к безразмерной координате  $\xi = k_y(x^1 - x_N^1)$ , перепишем уравнение (3.2.7) следующим образом:

$$\nabla_\xi (\xi + i\varepsilon_N) \nabla_\xi V_N - (\xi + i\varepsilon_N) V_N = i \frac{a_N \mu_N}{\beta_N \omega^2},$$

где  $\varepsilon_N = 2\gamma_{TN} k_y a_N / \omega$ . Как было показано в предшествующем разделе, правая часть этого уравнения меняется поперек магнитных оболочек на масштабах значительно больших масштаба локализации резонансных альфвеновских волн. В этом случае решение можно искать методом Фурье (см. раздел 3.13). Решение (3.2.7), удовлетворяющее граничным

условиям (ограниченность амплитуды колебаний на асимптотиках по координате  $x^1$ ), можно представить в виде

$$V_N = -\frac{a_N \mu_N}{\beta_N \omega^2} F_N(\xi + i\varepsilon_N), \quad (3.2.8)$$

где функция  $F_N(\xi + i\varepsilon_N)$  имеет следующее интегральное представление:

$$F_N(\xi + i\varepsilon_N) = \int_0^{\infty} \frac{\exp[ik(\xi + i\varepsilon_N)]}{\sqrt{1+k^2}} dk. \quad (3.2.9)$$

Она описывает структуру резонансной альфвеновской волны поперек магнитных оболочек. Если  $\varepsilon_N \ll 1$ , то при  $|\xi| \rightarrow 0$  основная часть интеграла (3.2.9) набирается при  $k \gg 1$ . В этом случае имеем  $F_N \sim \ln(\xi + i\varepsilon_N)$ . То есть, при  $\varepsilon_N \rightarrow 0$  на тороидальной резонансной оболочке для альфвеновских волн ( $\xi = 0$ ) имеется известная логарифмическая особенность. Такую особенность имеют, например, компоненты поля резонансных альфвеновских колебаний  $E_2$  и  $B_1$ , а компоненты  $E_1$  и  $B_2$ , которые пропорциональны  $\nabla_{\xi} F_N(\xi)$ , имеют особенность вида  $\xi^{-1}$ . На асимптотиках ( $|\xi| \gg \varepsilon_N$ ), основная часть интеграла (3.2.9) набирается при  $k \ll 1$ , в результате чего имеем здесь следующее асимптотическое представление:  $F_N(\xi) \approx i(\xi + i\varepsilon_N)^{-1}$ .

Таким образом, мы определили структуру резонансных альфвеновских волн вблизи резонансной магнитной оболочки. Однако для определения полного поля МГД-колебаний во всей модельной магнитосфере необходимо найти также структуру поля быстрой магнитозвуковой волны, которая раскачивает альфвеновские волны на резонансных магнитных оболочках.

**3.2.3. Структура поля монохроматических БМЗ-колебаний дипольноподобной магнитосферы.** Поле магнитозвуковой волны определяется уравнением (3.2.4). В отличие от (3.2.3), в нем нет параметров, которые позволяли бы строго обосновать использование метода разных масштабов, использованного выше для исследования структуры поля резонансных альфвеновских волн. Тем не менее, мы используем этот метод для качественного (а с определенной точностью и количественного) исследования поля магнитозвуковой волны.

Сравнение пространственной структуры БМЗ-колебаний, полученной этим методом, показывает ее хорошее качественное совпадение с той, что была получена при численном решении системы МГД-уравнений (см. [184]). Кроме того, специальное исследование показало, что решение уравнений, не имеющих особенностей в коэффициентах, полученное методом ВКБ на пределе его применимости (когда характерная длина волны порядка масштаба неоднородности среды), дает неплохое (с погрешностью  $\sim 10$ – $15$  %) совпадение с точным численным решением [240].

Исходя из этого, будем искать решение уравнения (3.2.4) в виде

$$\psi = w(x^1)[H(x^1, x^3) + h(x^1, x^3)] \exp(ik_2 x^2 - i\omega t),$$

где функция  $w(x^1)$  описывает структуру магнитозвуковой волны поперек магнитных оболочек,  $H(x^1, x^3)$  — ее продольную структуру, а  $h(x^1, x^3)$  является малой поправкой к решению в высших порядках теории возмущений. Будем искать решение для функции  $w(x^1)$  в ВКБ-приближении в виде

$$w(x^1) = \exp[i\Theta(x^1)],$$

где  $\Theta$  — большая квазиклассическая фаза, которую можно представить в виде ряда  $\Theta = \Theta^{(0)} + \Theta^{(1)} + \Theta^{(2)} + \dots$ , ( $|\Theta^{(0)}| \gg |\Theta^{(1)}| \gg |\Theta^{(2)}| + \dots$ ). В главном порядке теории возмущений из (3.2.4) получаем уравнение на функцию  $H$ , решением которого является набор собственных функций  $H_n(x^1, x^3)$  ( $n = 1, 2, \dots$  продольное волновое число для БМЗ-волн) и соответствующий им набор собственных значений волнового вектора  $k_{1n}$  ( $k_1 \equiv \nabla_1 \Theta^{(0)}(x^1)$ ). Подробно метод решения этого уравнения (в ВКБ-приближении и численно) представлен в разд. 3.5.

В следующем, первом порядке теории возмущений получаем уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{L}_f h_n - \frac{2k_{1n}k_{1n}^{(1)}}{g_1} H_n + i \frac{k_{1n}}{g_1} \nabla_1 H_n + i \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} k_{1n} H_n + \\ + \frac{\sqrt{g}}{k_2 g_1} \sum_{N=1}^{\overline{N}} \frac{k_{1n} \delta_{nN}^{(1)} T_N}{\beta_N v_A^2} \xi F'_N(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где  $\widehat{L}_f$  представляет собой оператор нулевого приближения для БМЗ-волн (умноженный слева на  $(g_1 g_2)^{-1/2}$  оператор в левой части (3.2.4), в котором  $\nabla_1 = i k_{1n}$ ),  $\overline{N}$  — число резонансных поверхностей для альфвеновских волн при заданной частоте БМЗ-волны, и введены следующие обозначения  $k_{1n}^{(1)} \equiv \nabla_1 \Theta_n^{(1)}(x^1)$ :

$$\begin{aligned} \delta_{nN}^{(1)} = \oint T_N \left( \widehat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} - \widehat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \right) H_n \sqrt{g_3} dx^3 = \\ = 2 \oint H_n (\nabla_l \ln p) (\nabla_l T_N) dx^3, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

где  $\nabla_l \equiv \partial / \sqrt{g_3} \partial x^3$  — производная по продольной координате, а интеграл по замкнутому контуру предполагает интегрирование вдоль силовой линии между магнитоспряженными ионосферами «туда и обратно». Последнее слагаемое в (3.2.10) описывает обратное влияние резонансных альфвеновских волн на возбуждающую их магнитозвуковую волну. Следует отметить, что в рассматриваемой модели магнитосферы, включающей прилегающую область солнечного ветра, число резонансных поверхностей может быть достаточно большим. Однако, исходя из того, что данная модель применима только вблизи магнитосферы, ограничимся учетом только тех резонансов, которые попадают в область, включающую саму магнитосферу и переходную область магнитопазы (в нашей модели  $L \leq 10.5$ ). Кроме того, как будет видно

из последующих расчетов, влияние резонансов, попадающих в область солнечного ветра, пренебрежимо мало. Таким образом, общее число резонансов  $\bar{N}$ , возбуждаемых в магнитосфере монохроматической магнитозвуковой волной, ограничено.

На рис. 3.3 штриховые горизонтальные линии соответствуют частоте падающей на магнитосферу БМЗ-волны. Точки пересечения этих линий с графиками функций  $\Omega_{TN}(x^1)$  определяют координаты резонансных поверхностей  $x^1 = x_{TN}^1$ , количество которых  $\bar{N}$  зависит от частоты магнитозвуковой волны. Умножим (3.2.10) слева на  $H_n g_1 / \sqrt{g}$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. В результате получим уравнение, разрешая которое относительно функции  $k_{1n}^{(1)}$ , получим

$$k_{1n}^{(1)} = \frac{i}{2} \oint \nabla_1 \ln k_{1n} + i \tilde{k}_{1n} + \bar{k}_{1n}, \quad (3.2.12)$$

где обозначено

$$\tilde{k}_{1n} = \frac{1}{2} \oint \nabla_1 \left( \frac{g_2 H_n^2}{\sqrt{g}} \right) \frac{dx^3}{g_2}, \quad (3.2.13)$$

$$\bar{k}_{1n} = \frac{1}{2k_2} \sum_{N=1}^{\bar{N}} \frac{a_{nN} \delta_{nN}^{(1)}}{\beta_N} \xi F'_N(\xi), \quad (3.2.14)$$

$$a_{nN} = \oint \frac{T_N H_n}{v_A^2} dx^3, \quad (3.2.15)$$

а функция  $H_n$  предполагается нормированной следующим образом:

$$\oint \frac{H_n^2}{\sqrt{g}} dx^3 = 1.$$

Функция  $k_{1n}^{(1)}$  описывает изменение амплитуды магнитозвуковой волны. Первое слагаемое в (3.2.12) представляет собой предэкспоненту в приближении ВКБ, второе —  $\tilde{k}_{1n}^{(1)}$  — геометрический фактор, связанный с распространением волны в магнитном поле, силовые линии которого сходятся к началу координат, а последнее —  $\bar{k}_{1n}^{(1)}$  — поправку, связанную с обратным влиянием резонансных альфвеновских волн на магнитозвуковую волну. Структуру  $n$ -й продольной гармоники магнитозвуковых колебаний поперек магнитных оболочек можно представить в ВКБ-приближении следующим образом (см. разд. 3.5):

$$w_n = C_n \frac{\exp \left[ \int_{x_n^1}^{x^1} (\tilde{k}_{1n} - i \bar{k}_{1n}) dx^{1'} \right]}{\sqrt{|k_{1n}|}} \begin{cases} \exp \left[ \int_{x_n^1}^{x^1} |k_{1n}| dx^{1'} \right], & x^1 < x_n^1, \\ \sin \left[ \int_{x_n^1}^{x^1} k_{1n} dx^{1'} + \frac{\pi}{4} \right], & x^1 > x_n^1, \end{cases}$$

где  $x_n^1$  точка поворота БМЗ-волны, определяемая условием  $k_{1n}^2(x_n^1) = 0$ ,  $C_n$  — амплитуда колебаний, независящая от  $x^1$ . Отметим, что это

решение неприменимо в окрестности точки поворота, где следует использовать приближенное аналитическое решение, сшивающееся с ВКБ-решениями на асимптотиках.

В предшествующем разделе предполагалось, что наличие резонансных альфвеновских волн мало влияет на структуру и спектр возбуждающих их магнитозвуковых колебаний. Чтобы проверить это предположение, рассчитаем численно поперечную структуру магнитозвуковой волны с учетом обратного влияния резонансных альфвеновских волн. Отметим, что если магнитосфера симметрична относительно экваториальной поверхности, то отличными от нуля будут только те функции  $a_{nN}$  и  $\delta_{nN}^{(1)}$ , у которых продольные волновые номера  $n$  и  $N$  имеют одинаковую четность. На рис. 3.4 представлены графики двух функций  $w_1$  и  $w_2$ , построенные без учета (сплошные линии) и с учетом (штриховые линии) обратного влияния альфвеновских волн на поле магнитозвуковых колебаний.

Для расчета функций, представленных на рис. 3.4, принималась достаточно малая величина диссипации альфвеновских волн в ионосфере:  $\varepsilon_N = 5 \cdot 10^{-3}$ . При характерной величине  $k_y a_N \sim 0,2$  в выбранной модели магнитосферы это соответствует малому декременту затухания альфвеновских волн:  $\gamma_{TN} \sim 10^{-2}\omega$ . Для функции  $w_2$  оба графика практически слились, а для  $w_1$  различие хотя и заметно, но также мало. При больших декрементах затухания ( $\varepsilon_N \geq 10^{-1}$ ) это отличие становится пренебрежимо малым и для  $w_1$ . Таким образом, обратное влияние резонансных альфвеновских колебаний на структуру возбуждающей их магнитозвуковой волны действительно мало. При исследо-

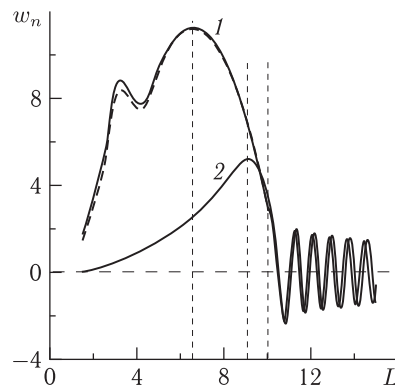


Рис. 3.4. Структура монохроматических ( $f = \omega/2\pi = 0,01$  Гц) БМЗ-волн поперек магнитных оболочек для двух первых продольных гармоник ( $n = 1, 2$ ), с учетом (штриховые линии) и без учета (сплошные линии) обратного влияния на них резонансных альфвеновских волн. Вертикальные штриховые линии соответствуют точкам поворота БМЗ-волн ( $L = 6,1$  и  $L = 9,2$ ) и магнитопаузе ( $L = 10$ )



вании поля магнитозвуковых волн этим влиянием в главном порядке теории возмущений можно пренебречь.

Этот факт замечателен сам по себе, поскольку связан с вполне определенным разделением поля МГД-колебаний на потенциальную и вихревую составляющие. Коэффициенты в левой части уравнения (3.2.4) не имеют особенностей даже на резонансных магнитных оболочках, что позволяет использовать ВКБ-приближение по координате  $x^1$  для описания поля БМЗ-волн везде, за исключением малых окрестностей точек поворота. На рис. 3.4 этим точкам соответствуют абсолютные максимумы в распределении функций  $w_1$  и  $w_2$ .

**3.2.4. Распределение амплитуды магнитного поля МГД-колебаний в меридиональной плоскости.** Определим, прежде всего, распределение амплитуды магнитного поля МГД-колебаний поперек магнитных оболочек. Проведем численный расчет амплитуды в меридиональной плоскости вдоль некоторых линий, пересекающих магнитные оболочки. Для альфвеновских волн удобно в качестве такой линии использовать верхнюю границу ионосферы, на которой поперечные компоненты магнитного поля  $B_{rA} = B_{1A}/\sqrt{g_1}$  и  $B_{\phi A} = B_{2A}/\sqrt{g_2}$  имеют пучность. Для БМЗ-волн выбор такой линии более сложен. Для продольной компоненты  $B_{lf} = B_{3f}/\sqrt{g_3}$  проведем линию так, чтобы она на каждой магнитной оболочке проходила через максимум функций  $\nabla_l H_n$ , а для компонент  $B_{rf}$  и  $B_{\phi f}$  — через максимум функций  $H_n$ , определяющих их структуру вдоль магнитных силовых линий. Для функций  $H_1(x^1, l)$  и  $\nabla_l H_2(x^1, l)$  эта линия лежит в плоскости магнитного экватора, а для функций  $H_2(x^1, l)$  и  $\nabla_l H_1(x^1, l)$  она проходит по границе области прозрачности.

Ограничимся расчетом достаточно низкочастотных колебаний  $f = \omega/2\pi = 0,01$  Гц, для которых внутри магнитосферы существует только одна резонансная поверхность (см. рис. 3.3). Как мы увидим далее, эта частота существенно ниже частот собственных магнитозвуковых колебаний магнитосферы. На рис. 3.5 представлено распределение амплитуд трех компонент магнитного поля колебаний с азимутальным волновым числом  $m = 1$  для двух первых продольных гармоник падающих на магнитосферу магнитозвуковых волн ( $n = 1, 2$ ).

На этом рисунке амплитуды падающей и отраженной БМЗ-волн одинаковы. Их различие, связанное с диссипацией части энергии в области альфвеновского резонанса, можно найти только во втором порядке метода ВКБ. Константы  $C_n$  выбраны таким образом, чтобы амплитуда продольной компоненты поля колебаний  $B_{lf}$  на магнитной оболочке  $L = 11$  была равна единице ( $|B_{lf}| = 1$  нТл).

На рис. 3.5а представлено распределение компонент  $B_{rf}$ ,  $B_{\phi f}$  и  $B_{lf}$  внутри магнитосферы ( $L < 10$ ), а на рис. 3.5,б — компонент  $B_{rf}$  и  $B_{lf}$  в области солнечного ветра ( $L > 10$ ). Компонента  $B_{\phi f}$  в области солнечного ветра имеет настолько малую величину, что на представленном графике неразличима. Такое соотношение

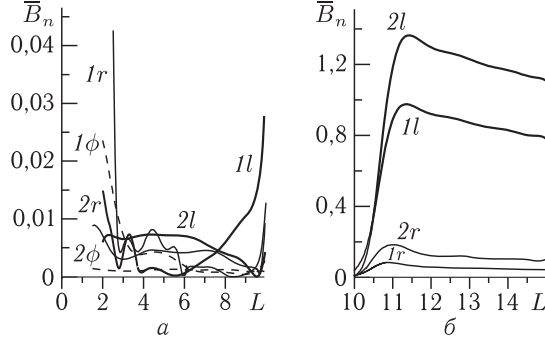


Рис. 3.5. Распределение амплитуд компонент магнитного поля монохроматических ( $f = 0,01$  Гц) магнитозвуковых колебаний  $B_{rf}$ ,  $B_{\phi f}$  и  $B_{lf}$  поперек магнитных оболочек внутри магнитосферы (а) и в области солнечного ветра (б). Цифры 1 и 2 на рисунках соответствуют двум первым продольным гармоникам БМЗ-колебаний ( $n = 1, 2$ )

амплитуд обусловлено различной их зависимостью от компоненты волнового вектора  $k_{1n}$ . Из (Д.2) (Приложение Д) следует  $B_{lf} \sim k_{\perp fn}^2$ , где  $k_{\perp fn}^2 = (k_{1n}^2/g_1 + k_2^2/g_2)$  — квадрат поперечной составляющей волнового вектора БМЗ-волны,  $B_{rf} \sim k_{1n}$  и  $B_{\phi f} \sim k_2$ , причем в области солнечного ветра  $k_{1n} \gg k_2$ . С этим же связано резкое уменьшение амплитуд  $B_{lf}$  и  $B_{rf}$  компонент поля колебаний при переходе из области солнечного ветра в магнитосферу, поскольку  $k_{1n}$  при этом уменьшается на несколько порядков величины. Внутри магнитосферы амплитуды всех трех компонент поля магнитозвуковой волны сравнимы по величине (рис. 3.5, а).

Как видно из рис. 3.3, даже небольшое изменение частоты падающей на магнитосферу БМЗ-волны (смещение горизонтальной штриховой линии по вертикали) приводит к существенному изменению местоположения резонансных поверхностей. Аналогичный эффект будет и при небольшом изменении модели распределения альфвеновской скорости. Особенно это касается первых продольных гармоник резонансных альфвеновских волн  $N \sim 1$ . Чтобы проследить, как изменяется амплитуда возбуждаемой альфвеновской волны в зависимости от местоположения резонансной магнитной оболочки, на рис. 3.6 приведены распределения средних амплитуд  $B_{\phi A}$  компоненты четырех первых гармоник стоячих альфвеновских волн ( $N = 1, 2, 3, 4$ ). Отметим, что средние амплитуды  $\bar{B}_{rA}$  и  $\bar{B}_{\phi A}$  определены следующим образом:

$$B_{rA} = \bar{B}_{rA} F(\xi), \quad B_{\phi A} = \bar{B}_{\phi A} F'(\xi),$$

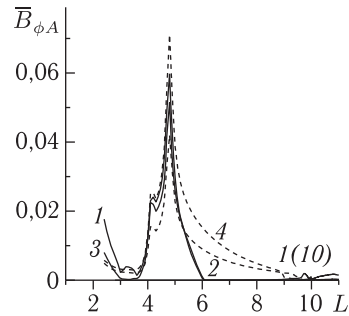
где

$$\bar{B}_{rA} = -\sqrt{2} \frac{\Omega_{TN}}{\omega^3 \beta_N} \frac{c t a_N}{\sqrt{t_{AV} p_i g_{2i}}} \delta_{nN}^{(1)} (\nabla_1 w_n),$$

$$\bar{B}_{\phi A} = i \beta_N p_i \bar{B}_{rA},$$

$t_A$  — время пробега с альфвеновской скоростью между магнитоспряженными ионосферами,  $v_{Ai} = 2 \cdot 10^3$  км/с, а индекс  $i$  означает, что соответствующие величины берутся на верхней границе ионосферы. Чтобы получить значение амплитуды на резонансной поверхности ( $\xi = 0$ ), необходимо среднюю амплитуду  $\bar{B}_{\phi A}$  умножить на  $F'(0)$ , т.е., как следует из (3.2.9), при  $\varepsilon_N \ll 1$  умножить на  $\varepsilon_N^{-1}$ .

Рис. 3.6. Распределение средней амплитуды  $B_{\phi A}$  компоненты поля четырех первых гармоник ( $N = 1, 2, 3, 4$ ) резонансных альфвеновских волн поперек магнитных оболочек. Гармоники возбуждаются монохроматической ( $m = 1, f = 0,01$  Гц) магнитозвуковой волной. Для сравнения приведено распределение амплитуды первой гармоники ( $N = 1$ ), возбуждаемой магнитозвуковой волной с  $m = 10$ , которая практически не проникает внутрь магнитосферы



Два пика в распределении  $\bar{B}_{\phi A}$  в окрестности плазмопаузы связаны с изменением параметра  $a_N$  при переходе через экстремумы функций  $\Omega_{TN}(x^1)$ . Строго говоря, если пользоваться разложением (3.1.21), в точках экстремумов  $a_N$  обращается в бесконечность. В этом случае необходимо пользоваться разложением с точностью до следующего, второго, порядка величины, что и было сделано при расчете графиков на рис. 3.6. Следует, однако, отметить, что представленное выше решение для резонансных альфвеновских волн неприменимо в непосредственной окрестности этих точек (см. пересечение горизонтальной прямой  $f = 0,025$  Гц с графиком  $\Omega_{T2}(x^1)$  на рис. 3.3). Для описания резонансного взаимодействия МГД-волн вблизи экстремумов  $\Omega_{TN}(x^1)$  следует использовать другой метод аналитического исследования, аналогичный тому, что использован в [181]. Именно вблизи этих точек следует ожидать наибольшей амплитуды резонансных альфвеновских колебаний.

Еще одна парадоксальная особенность представленных на рис. 3.6 графиков заключается в резком увеличении амплитуды резонансных альфвеновских колебаний при переходе из области прозрачности в область непрозрачности через точку поворота магнитозвуковой волны, определяемую условием  $k_{1n}(x_n^1) = 0$ . Для гармоники с  $n = 1$  эта точка расположена на  $L = 6,1$ , а для гармоники с  $n = 2$  — на  $L = 9,2$ . Именно поэтому амплитуды двух четных гармоник резонансных альфвеновских волн ( $N = 2, 4$ ), возбуждаемых гармоникой БМЗ-колебаний с  $n = 2$ , оказываются доминирующими во внешней магнитосфере ( $6 < L < 10$ ). При переходе в область непрозрачности происходит резкое изменение структуры магнитозвуковой волны вдоль силовых линий геомагнитного поля. В области непрозрачности эта структура оказывается похожей

на продольную структуру возбуждаемых БМЗ-волной стоячих альфвеновских волн. При этом величина коррелятора  $\delta_{nN}^{(1)}$ , определяющего амплитуду резонансных альфвеновских колебаний (см. (3.2.11)), резко увеличивается, что и приводит к наблюдаемому эффекту.

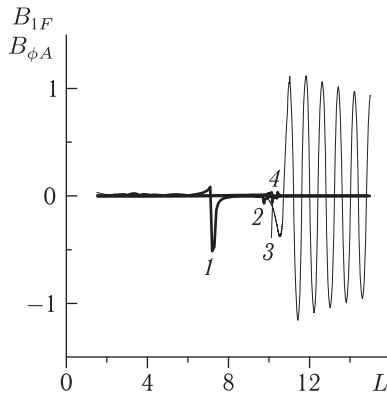


Рис. 3.7. Распределение  $B_{\phi A}$ -компоненты поля резонансных альфвеновских колебаний (толстые линии), возбуждаемых падающими на магнитосферу монохроматическими ( $f = 0,01$  Гц) БМЗ-волнами. Цифрами пронумерованы первые четыре гармоники резонансных альфвеновских волн ( $N = 1, 2, 3, 4$ ). Для сравнения здесь же приведено распределение продольной  $B_{I f}$ -компоненты поля второй продольной гармоники ( $n = 2$ ) БМЗ-волны (тонкая линия)

На рис. 3.7 представлена поперечная структура  $B_{\phi A}$ -компоненты поля резонансных альфвеновских колебаний, которые возбуждаются магнитозвуковыми колебаниями с частотой  $f = 0,01$  Гц. На этом же рис. для сравнения представлена структура продольной  $B_{I f}$ -компоненты поля магнитозвуковой волны с  $n = 2$ . Напомним, что распределение амплитуды резонансных альфвеновских колебаний приведено вдоль верхней границы ионосферы, а магнитозвуковой волны — вдоль специально выбранной линии в меридиональной плоскости, на которой ее амплитуда максимальна. Видно, что амплитуды резонансных пиков внутри переходного слоя значительно меньше амплитуды единственной резонансной гармоники, расположенной внутри магнитосферы.

Амплитуда резонансной гармоники внутри магнитосферы сопоставима с амплитудой магнитозвуковых колебаний в солнечном ветре и значительно превышает амплитуду магнитозвуковых колебаний в магнитосфере. Из рис. 3.6 следует, что внутри магнитосферы резонансная гармоника ( $N = 1$ ) расположена в области ( $L \approx 7,1$ ), где ее амплитуда минимальна. Если резонансная поверхность попадает в область непрозрачности возбуждающей магнитозвуковой волны ( $L < 6$ ), величина резонансных альфвеновских колебаний существенно возрастает. Это означает, что резонансные альфвеновские колебания внутри магнитосферы могут быть сопоставимы и даже превышать по амплитуде падающие на магнитосферу из солнечного ветра магнитозвуковые волны. Это может наблюдаться даже при достаточно большой величине декремента затухания альфвеновских волн, связанного с диссипацией их энергии в ионосфере (скажем при  $\gamma_{TN} \sim 0,1\omega$ ).

На рис. 3.8 представлено распределение амплитуды полного магнитного поля резонансных альфвеновских колебаний в меридиональ-

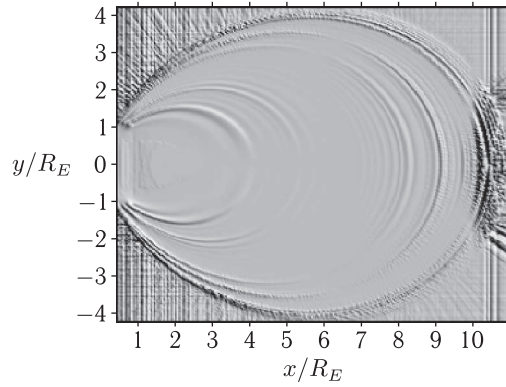


Рис. 3.8. Распределение в меридиональной плоскости амплитуды полного поля резонансных альфвеновских колебаний, возбуждаемых монохроматической (с частотой 0,01 Гц) магнитозвуковой волной в дипольной магнитосфере

ной плоскости, возбуждаемых монохроматической БМЗ-волной, падающей на магнитосферу из солнечного ветра. Частота БМЗ-волны равна 0,01 Гц, а ее пространственная структура соответствует гармонике с продольным волновым числом  $n = 1$  и азимутальным волновым числом  $m = 1$ . Видно, как внутри магнитосферы на различных резонансных магнитных оболочках возбуждаются три основных гармоники стоячих альфвеновских волн ( $N = 1$  — во внутренней магнитосфере), три вторых гармоники ( $N = 2$  — во внешней магнитосфере) и более высокие гармоники — в области переходного слоя. Возбуждение нескольких одинаковых гармоник стоячих альфвеновских волн обусловлено немонотонным распределением альфвеновской скорости в рассматриваемой модели среды. Амплитуда резонансных колебаний достигает максимума в пучностях их продольной структуры. Например, на верхней границе ионосферы, а для четных гармоник  $N = 2, 4, \dots$  — вблизи экваториальной плоскости.

### 3.3. Возбуждение резонансных альфвеновских волн в дипольноподобной магнитосфере широкополосными источниками

В разд. 3.1 и 3.2 исследована структура поля резонансных стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых в дипольноподобной магнитосфере монохроматическими БМЗ-колебаниями. В реальной магнитосфере источники БМЗ-волн, как правило, широкополосные. Поэтому мы рассмотрим здесь поведение поля резонансных альфвеновских волн, возбуждаемых в магнитосфере широкополосными источниками различных видов, следуя работе [241]. Проследим динамику поля резонансных альфвеновских волн на примере поведения основной компоненты их

магнитного поля  $B_2$ , которая, как следует из (Д.2) (приложение Д), связана со скалярным потенциалом следующим соотношением:

$$B_2 = i \frac{c}{\omega} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \varphi',$$

где  $\varphi' = \nabla_1 \varphi$ . Используя для потенциала  $\varphi'$  полного поля резонансных колебаний представление в виде суммы по всем гармоникам стоячих альфвеновских волн (3.1.14), запишем

$$B_2(x^1, x^2, x^3, t) = \sum_{N=1}^{\infty} F_N(x^1, x^2, t) \nabla_3 T_N(x^1, x^3), \quad (3.3.1)$$

где обозначено

$$F_N(x^1, x^2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}_N(x^1, x^2, \omega) \tilde{Q}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.3.2)$$

$$\tilde{\mu}_N = i \frac{g_2}{\sqrt{g}} \frac{c \nabla_2 \mu_N(x^1, x^2, \omega)}{\Omega_{TN}^3},$$

$$\tilde{Q}_N(x^1, \omega) = \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} e^{i\alpha_N/3} G \left[ 2 \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} e^{i\alpha_N/3} \frac{\omega - \Omega_{TN} + i\gamma_{TN}}{\Omega_{TN}} \right]. \quad (3.3.3)$$

Здесь для функции  $V'_N(x^1, \omega)$ , описывающей поперечную структуру  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн, использовано выражение (3.1.25), функция  $G(z)$  имеет интегральное представление (2.7.21), а ее асимптотики на действительной оси имеют вид (2.7.22). Функция  $\tilde{\mu}_N$  описывает источник альфвеновских волн, определяемый полем БМЗ-колебаний в магнитосфере.

Выражая в (3.3.2) подынтегральные функции через их фурье-образы, запишем

$$F_N(x^1, x^2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mu}_N(x^1, x^2, t') Q_N(x^1, t - t') dt',$$

где

$$Q_N(x^1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = Q_N^{(+)}(x^1, \tau) + Q_N^{(-)}(x^1, \tau),$$

$$Q_N^{(+)}(x^1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{Q}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

$$Q_N^{(-)}(x^1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \tilde{Q}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.3.4)$$

Очевидно,  $Q_N^{(-)}(x^1, \tau) = [Q_N^{(+)}(x^1, \tau)]^*$ , где \* обозначает комплексно-сопряженную величину. Поскольку функция  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  аналитична в верхней полуплоскости комплексного  $\omega$ , имеем  $Q_N(x^1, \tau) = 0$  при  $\tau < 0$ , то есть можно записать

$$\begin{aligned} F_N(x^1, x^2, t) &= \int_{-\infty}^t \bar{\mu}_N(x^1, x^2, t') Q_N(x^1, t - t') dt' = \\ &= \int_0^{\infty} \bar{\mu}_N(x^1, x^2, t - \tau) Q_N(x^1, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Представление (3.3.5) выражает принцип причинности: поле резонансных колебаний в момент времени  $t$  определяется действием источника за предшествующий ему интервал времени.

Рассмотрим несколько примеров поведения резонансных стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых полем БМЗ-колебаний, для которого используем некоторые модельные представления.

**3.3.1. Монохроматический источник БМЗ-волн.** Пусть функция источника имеет вид

$$\tilde{\mu}_N(x^1, x^2, \omega) = M_N(x^1, x^2) \delta(\omega - \omega_0),$$

где  $M_N(x^1, x^2)$  описывает пространственную структуру поля монохроматического источника с частотой  $\omega_0$ , определяемого полем БМЗ-колебаний. Подставляя это выражение в (3.3.2), получаем

$$\begin{aligned} F_N(x^1, x^2, t) &= \frac{1}{2\pi} M_N(x^1, x^2) \tilde{Q}_N(x^1, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} M_N(x^1, x^2) \tilde{Q}_N(x_{TN}^1(\omega_0), \omega_0) e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что по переменной  $x^1$  шкала вариации функции  $M_N(x^1, x^2)$  значительно шире, чем функции  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega_0)$ . Таким образом, мы получили тот же результат, что и в разд. 3.1 и 3.2, где рассматривались альфвеновские волны, возбуждаемые монохроматическими БМЗ-колебаниями.

**3.3.2. Импульсный источник БМЗ-волн.** Рассмотрим функцию источника вида

$$\bar{\mu}_N(x^1, x^2, t) = M_N(x^1, x^2) \delta(t)$$

— внезапный импульс БМЗ-колебаний в момент времени  $t = 0$ . Подставляя это выражение в (3.3.5), получаем

$$F_N(x^1, x^2, t) = M_N(x^1, x^2) Q_N(x^1, t).$$

Отсюда следует, что функция  $Q_N(x^1, t)$  описывает отклик  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн на внезапный импульс БМЗ-коле-

баний. Рассмотрим эту функцию подробнее. Подставим выражение для  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  из (3.3.3) (для примера при  $\alpha_N = 0$ ) в определение функции  $Q_N^{(+)}(x^1, \tau)$  и перейдем в подынтегральном выражении к переменной интегрирования  $\xi = 2(a_N/\rho_N)^{2/3}(\omega - \Omega_{TN})/\Omega_{TN}$ :

$$Q_N^{(+)}(x^1, \tau) = \frac{\Omega_{TN}}{4\pi} e^{-i\Omega_{TN}\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi + i2^{1/3}\gamma_{TN}\tau_N) \exp\left(-i\xi \frac{\tau}{2^{1/3}\tau_N}\right) d\xi,$$

где  $\tau_N = (2a_N/\rho_N)^{2/3}/\Omega_{TN}$  — характерное время, в течение которого проявляются эффекты, связанные с «кинетической» дисперсией альфвеновских волн. Здесь нижний предел интегрирования распространен до  $-\infty$ , поскольку мы предполагаем выполнение условия  $\Omega_{TN}\tau_N \gg 1$ , что означает сильную локализацию подынтегрального выражения вблизи  $\omega = \Omega_{TN}$ . Используя для функции  $G(z)$  интегральное представление (2.7.21) и проводя последовательное интегрирование по  $\xi$  (что под интегралом по  $v$  дает выражение  $\sim 2\pi\delta(v - \tau/2^{1/3}\tau_N)$ ) и  $v$ , получаем

$$Q_N^{(+)}(x^1, \tau) = -i\Theta(\tau) \frac{\Omega_{TN}}{2} \exp\left(-i\Omega_{TN}\tau - \gamma_{TN}\tau - i\frac{\tau^3}{6\tau_N^3}\right),$$

где  $\Theta(\tau)$  — ступенчатая функция Хевисайда ( $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\Theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ ). Таким образом, полный отклик  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн можно представить в виде

$$Q_N(x^1, t) = -\Theta(t)\Omega_{TN}(x^1)e^{-\gamma_{TN}t} \sin\left(\Omega_{TN}t + \frac{t^3}{6\tau_N^3}\right),$$

— колебания с переменной частотой  $\Omega_{TN} + t^2/6\tau_N^3$ , возникающие сразу вслед за внезапным импульсом (в момент времени  $t = 0$ ) и затухающие с декрементом  $\gamma_{TN}$ . Изменение частоты колебаний в точке наблюдения связано с дисперсией альфвеновских волн. Оно объясняется тем, что колебания возбуждаются сразу в широком диапазоне резонансных магнитных оболочек (на каждой оболочке со своей резонансной частотой). За счет поперечной дисперсии альфвеновские волны медленно (со скоростью много меньше альфвеновской) перемещаются поперек магнитных оболочек. В результате этого в момент наблюдения  $t$  в точке наблюдения появляются волны с частотами, соответствующими той резонансной оболочке, от которой они за это время добежали. Конечно, эти дисперсионные эффекты могут стать заметными только если дисперсионное время не превышает декремента затухания альфвеновских волн:  $\gamma_{TN}\tau_N \lesssim 1$ .

**3.3.3. Источник БМЗ-волн в виде волнового пакета (модель суббуревых Рi2).** Рассмотрим источник, имеющий вид волнового пакета (рис. 3.9, а):

$$\bar{\mu}_N(x^1, x^2, t) = M_N(x^1, x^2)e^{-\Gamma|t|} \sin \omega_0 t.$$



При  $\omega_0 \gtrsim \Gamma$  он похож по форме на волновой пакет суббуревых геомагнитных пульсаций Р12. Посмотрим, какой отклик вызывает такой пакет БМЗ-волн в стоячих альфвеновских волнах. Подставляя это выражение в (3.3.5), получаем

$$F_N(x^1, x^2, t) = M_N(x^1, x^2) \int_0^\infty \left[ \cos \left( \omega_0 t - (\omega - \Omega_{TN})\tau + \frac{\tau^3}{6\tau_N^3} \right) - \cos \left( \omega_0 t - (\omega + \Omega_{TN})\tau - \frac{\tau^3}{6\tau_N^3} \right) \right] \exp[-\gamma_{TN}\tau - \Gamma|t - \tau|] d\tau.$$

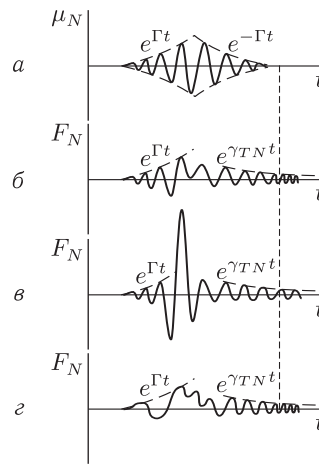
Если  $\Gamma \gg \gamma_{TN}$ , то основная часть интеграла набирается вблизи  $\tau = t$  и в аргументах косинуса можно положить  $\tau^3 \approx t^3$ , после чего интеграл легко вычисляется. Получаем

$$F_N(x^1, x^2, t) \approx \frac{M_N(x^1, x^2)\Omega_{TN}^2}{(\Gamma^2 + (\omega_0 - \Omega_{TN})^2)(\Gamma^2 + (\omega_0 + \Omega_{TN})^2)} \times \left[ (2\Gamma\omega_0 \cos \omega_0 t + (\omega_0^2 - \Omega_{TN}^2 - \Gamma^2) \sin \omega_0 t) e^{-\Gamma|t|} + 4\Gamma\omega_0 \Theta(t) e^{-\gamma_{TN}t} \cos \left( \Omega_{TN}t + \frac{t^3}{6\tau_N^3} \right) \right].$$

Здесь первое слагаемое в квадратной скобке описывает вынужденные альфвеновские колебания в точке наблюдения, вызванные прохождением пакета БМЗ-волн. Время жизни этих колебаний ограничено временем прохождения волнового пакета. Второе слагаемое описывает, как и в случае импульсного источника, собственные колебания стоячих альфвеновских волн, имеющих переменную частоту и затухающих с декрементом  $\gamma_{TN}$ .

На рис. 3.9 качественно представлено поведение альфвеновских волн, возбуждаемых таким источником. Показаны случаи когда частота заполнения волнового пакета много больше частоты соб-

Рис. 3.9. *a* — пакет БМЗ-волн; *б-г* — поведение *N*-й гармоники стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых пакетом БМЗ-волн: *б* — частота возбуждающей БМЗ-волны выше частоты собственных альфвеновских колебаний,  $\omega_0 \gg \Omega_{TN}$ ; *в* —  $|\omega_0 - \Omega_{TN}| \ll \Gamma$  — резонанс стоячих альфвеновских волн и БМЗ-колебаний; *г* —  $\omega_0 \ll \Omega_{TN}$



ственных альфвеновских колебаний магнитосферы ( $\omega_0 \gg \Omega_{TN}$  — рис. 3.9, б), когда она много меньше этой частоты ( $\omega_0 \ll \Omega_{TN}$  — рис. 3.9, в) и когда эти частоты близки между собой ( $|\omega_0 - \Omega_{TN}| \ll \Gamma$  — рис. 3.9, г). Последний случай соответствует резонансу волнового пакета с частотой заполнения, совпадающей с частотой одной из гармоник стоячих альфвеновских волн на рассматриваемой магнитной оболочке.

**3.3.4. Стохастический источник БМЗ-волн (модель дневных РсЗ).** Во многих случаях источник магнитосферных БМЗ-колебаний имеет стохастический характер. Например, таким источником являются БМЗ-колебания, проникающие в дневную часть магнитосферы Земли из солнечного ветра. В этом случае величину  $\bar{\mu}_N(x^1, x^2, t)$  нельзя считать заданной, но можно задать статистические характеристики ансамбля случайных функций, описывающих поведение поля стохастических БМЗ-колебаний. В простейшем случае будем считать волны с разными частотами некоррелированными («белый шум»). Тогда можно записать

$$\langle \tilde{\mu}_N(x^1, x^2, \omega) \mu_{N'}(x^1, x^2, \omega') \rangle = m_N(x^1, x^2, \omega) m_{N'}(x^1, x^2, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (3.3.6)$$

— парный коррелятор функций, описывающих источники БМЗ-колебаний с частотами  $\omega$  и  $\omega'$ , которые возбуждают гармоники стоячих альфвеновских волн с продольными волновыми числами  $N$  и  $N'$ . Здесь угловые скобки означают усреднение по фазам случайных колебаний.

Тогда для парного коррелятора основных компонент поля стоячих альфвеновских волн имеем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{B}_2^*(x^1, x^2, x^3, \omega) \tilde{B}_2(x^1, x^2, x^3, \omega') \rangle = \\ = \sum_{N, N'} m_N^*(x^1, x^2, \omega) m_{N'}(x^1, x^2, \omega) \tilde{Q}_N^*(x^1, \omega) \tilde{Q}_{N'}(x^1, \omega) \times \\ \times \nabla_3 T_N(x^1, x^3) \nabla_3 T_{N'}(x^1, x^3) \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Учитывая, что функции  $Q_N(x^1, \omega)$  узко локализованы по частоте вблизи  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$ , можно в главном порядке теории возмущений пренебречь в сумме (3.3.7) корреляторами с  $N' \neq N$ . В результате для среднего квадрата амплитуды альфвеновских колебаний в точке наблюдения имеем

$$\langle \left| \tilde{B}_2(x^1, x^2, x^3, \omega) \right|^2 \rangle = P(x^1, x^2, x^3, \omega) \delta(\omega - \omega'),$$

где

$$P(x^1, x^2, x^3, \omega) = \sum_N \left| m_N(x^1, x^2, \Omega_{TN}) \right|^2 \left| \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \right|^2 \left| \nabla_3 T_N(x^1, x^3) \right|^2.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \tilde{B}_2(x^1, x^2, x^3, t) \right|^2 \right\rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \exp[i(\omega - \omega')] \left\langle \left| \tilde{B}_2^*(x^1, x^2, x^3, \omega) \right|^2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x^1, x^2, x^3, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

Используя для  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  представление (3.3.3) (при  $\alpha_N = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \right|^2 d\omega &= \frac{\Omega_{TN}}{2} \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dv' \times \\ &\times \exp \left[ i \left( \frac{v^3}{3} - \frac{v'^3}{3} \right) - i(v - v')\xi - (v + v') \frac{\varepsilon_{TN}}{l_N} \right], \end{aligned}$$

где  $\xi = 2(a_N/\rho_N)^{2/3}(\omega - \Omega_{TN})/\Omega_{TN}$ ,  $\varepsilon_{TN} = 2\gamma_{TN}a_N/\Omega_{TN}$ ,  $l_N = a_N^{1/3}\rho_N^{2/3}$ .  
Выполняя последовательно интегрирование по  $\xi$ ,  $v'$  и  $v$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \right|^2 d\omega = \pi \left( \frac{a_N}{\rho_N} \right)^{2/3} \frac{l_N \Omega_{TN}}{\varepsilon_{TN}} = \frac{\pi \Omega_{TN}^2}{2 \gamma_{TN}},$$

откуда

$$\left\langle \left| \tilde{B}_2(x^1, x^2, x^3, t) \right|^2 \right\rangle = \frac{\pi}{2} \sum_N \frac{\Omega_{TN}^2}{\gamma_{TN}} \left| m_N(x^1, x^2, \Omega_{TN}) \right|^2 \left| \nabla_3 T_N(x^1, x^3) \right|^2. \quad (3.3.8)$$

Выражение (3.3.8) полностью определяет распределение амплитуды стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых в аксиально-симметричной магнитосфере стохастическими БМЗ-колебаниями, спектр которых имеет вид «белого шума» (3.3.6).

Обсудим распределение амплитуды геомагнитных пульсаций РсЗ, постоянно наблюдающихся в дневном секторе магнитосферы, предполагая, что они представляют собой набор гармоник стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых стохастическими БМЗ-колебаниями. В [242] в качестве источника таких БМЗ-колебаний рассматривается неустойчивость протонов солнечного ветра, отраженных от фронта головной ударной волны. БМЗ-колебания проникают внутрь магнитосферы и возбуждают стоячие альфвеновские волны на резонансных магнитных оболочках.

Важную роль в распределении амплитуды альфвеновских волн в (3.3.8) играет спектральная функция источника  $m(x^1, x^2, \omega)$ , описывающая поле БМЗ-колебаний. Предположим, что она имеет достаточно выраженный локальный максимум на некоторой частоте  $\omega = \bar{\omega}$ , которая определяется механизмом генерации БМЗ-колебаний. Это подтверждается и данными наблюдений геомагнитных пульсаций типа Pc3 на спутниках [205, 206].

На рис. 3.10 представлена схема возбуждения стоячих альфвеновских волн таким источником. С увеличением номера продольной гармоники стоячих альфвеновских волн их амплитуда убывает. При этом функция  $m_1(x^1, x^2, \omega)$  имеет два, а функция  $m_2(x^1, x^2, \omega)$  три локальных максимума в распределении амплитуды поперек магнитных оболочек, что определяется немонотонным изменением альфвеновской скорости вблизи плазмопаузы. Правые максимумы этих функций выше левых, так как мы предполагаем, что магнитосфера является областью непрозрачности для рассматриваемых БМЗ-колебаний и их амплитуда убывает от магнитопаузы внутрь магнитосферы. Поэтому во внутренней магнитосфере доминируют колебания первой гармоники  $N = 1$ , а во внешней части — более высоких гармоник стоячих альфвеновских волн  $N = 2, 3, \dots$ , частоты которых  $\Omega_{TN}$  приближенно равны центральной частоте источника  $\bar{\omega}$ . Подобная картина распределения амплитуды

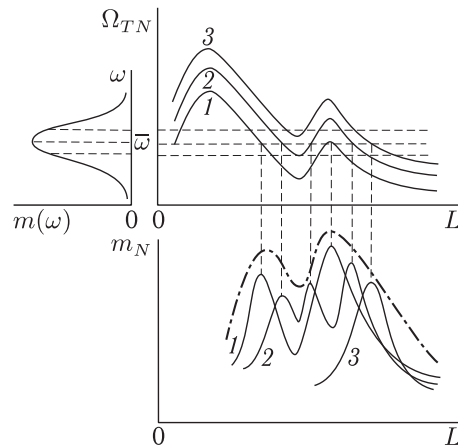


Рис. 3.10. Возбуждение стоячих альфвеновских волн в магнитосфере стохастическим источником БМЗ-колебаний. Слева сверху — спектр стохастических БМЗ-колебаний  $m(\omega)$ . Справа сверху — распределение собственных частот трех первых гармоник ( $N = 1, 2, 3$ ) резонансных альфвеновских волн поперек магнитных оболочек ( $L = a/R_E$  — параметр Макилвейна). Внизу — распределение поперек магнитных оболочек амплитуды колебаний первых трех гармоник возбуждаемых стоячих альфвеновских волн и их огибающая (штрихпунктирная линия)

дневных геомагнитных пульсаций подтверждается и данными наземных наблюдений [11].

### 3.4. Магнитозвуковой резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере

В предшествующих разделах данной главы мы рассмотрели альфвеновский резонанс в дипольноподобной модели магнитосферы. При этом мы использовали модель среды с «холодной плазмой». Эффекты, определяющие поперечную дисперсию кинетических альфвеновских волн, можно учесть как малые поправки к этой модели. В плазме с конечным давлением имеется еще одна ветвь МГД-колебаний — медленный магнитный звук (ММЗ). Распространение ММЗ-волн происходит почти вдоль силовых линий магнитного поля. Это делает ММЗ-волны похожими на альфвеновские.

Аналогично резонансным альфвеновским волнам, ММЗ-колебания с малыми азимутальными волновыми числами ( $m \sim 1$ ) могут генерироваться в результате резонанса с быстрым магнитным звуком, что было продемонстрировано в работе [243]. Для того, чтобы различать процессы резонансного взаимодействия БМЗ-колебаний с альфвеновскими и ММЗ-волнами, будем далее называть их соответственно альфвеновским и магнитозвуковым резонансами. В процессе магнитозвукового резонанса монохроматическая БМЗ-волна возбуждает ММЗ-колебания на тех магнитных оболочках, где частота БМЗ-волны совпадает с локальной частотой собственных ММЗ-колебаний. В работе [243] не проводились расчеты структуры и спектра резонансных ММЗ-колебаний. Такие расчеты проведены в разд. 2.6 настоящей монографии в одномерно-неоднородной модели магнитосферы (см. также работы [50, 59, 244]).

Далее мы рассмотрим магнитозвуковой резонанс в двумерно-неоднородной модели магнитосферы с дипольноподобным магнитным полем.

**3.4.1. Самосогласованная модель дипольной магнитосферы с вращающейся плазмой.** Для описания динамики плазмы в магнитном поле используем систему уравнений идеальной МГД (1.0.1)–(1.0.4). Будем считать магнитное поле в рассматриваемой модели магнитосферы дипольным, уравнение силовых линий которого в меридиональной плоскости имеет вид

$$r = a \cos^2 \theta, \quad (3.4.1)$$

где  $r$  — радиус точки на силовой линии в сферической системе координат,  $a$  — экваториальный радиус силовой линии,  $\theta$  — широта, отсчитываемая от экваториальной плоскости (см. рис. 3.11). Элемент длины вдоль силовой линии имеет вид

$$dl = a \cos \theta \sqrt{1 - 3 \sin^2 \theta} d\theta,$$

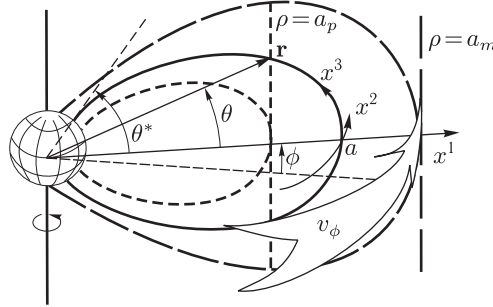


Рис. 3.11. Модель аксиально-симметричной магнитосферы и системы координат:  $(x^1, x^2, x^3)$  — ортогональная система криволинейных координат, связанных с силовыми линиями магнитного поля,  $(a, \phi, \theta)$  — неортогональная система криволинейных координат. Штриховыми линиями показаны плазмопауза ( $\rho = a_p$ ) и магнитопауза ( $\rho = a_m$ )

а напряженность дипольного магнитного поля определяется выражением

$$B_0(a, \theta) = \bar{B} \left( \frac{\bar{a}}{a} \right)^3 \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}{\cos^6 \theta}. \quad (3.4.2)$$

Для магнитосферы Земли можно выбрать  $\bar{a} = R_E$ , тогда  $\bar{B} \approx 0,32$  Гс — экваториальная напряженность магнитного поля на поверхности Земли.

Наиболее простой вид МГД-уравнения имеют в системе координат, связанной с силовыми линиями магнитного поля. Для проведения расчетов мы используем ортогональную систему криволинейных координат  $(x^1, x^2, x^3)$  (см. рис. 3.11). В качестве координат можно использовать также и другие функции, однозначно связанные с каждой из координат  $x^1, x^2, x^3$ . При проведении численных расчетов оказывается удобным использовать вместо координаты  $x^1$  экваториальный радиус силовой линии  $a$ , координаты  $x^2$  — азимутальный угол  $\phi$ , а продольной координаты  $x^3$  — широту  $\theta$  (или длину силовой линии  $l$ ), отсчитываемую от экваториальной плоскости. Отметим, что координаты  $a, \phi, \theta$ , конечно, не ортогональны.

Компоненты метрического тензора, определяющие элементы длины вдоль координатных линий в переменных  $a, \theta$ , имеют вид (см. Приложение P)

$$g_1 = \frac{\cos^6 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}, \quad g_2 = a^2 \cos^6 \theta. \quad (3.4.3)$$

Третью компоненту метрического тензора можно определить через отношение отрезков двух силовых линий с экваториальными радиусами  $a$  и  $a_0$ , заключенными между двумя бесконечно близкими координатными поверхностями  $x^3$  и  $x^3 + dx^3$ . Если силовая линия с экваториальным радиусом  $a$  пересекается координатной поверхностью  $x^3 = \text{const}$  на широте  $\theta$ , а силовая линия с экваториальным радиусом  $a_0$  — на

широте  $\theta_0$ , то выражение для  $g_3$  имеет вид

$$\frac{g_3(a, \theta)}{g_3(a_0, \theta_0)} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^6 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}\right)^{12} \frac{1 + 3 \sin^2 \theta_0}{1 + 3 \sin^2 \theta} = \frac{B_0^2(a_0, \theta_0)}{B_0^2(a, \theta)}. \quad (3.4.4)$$

Легко проверить, что уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$ , которое в выбранной системе координат сводится к

$$\frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\sqrt{g}}{g_3} B_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{g_1 g_2} B_0 = 0,$$

выполняется для дипольного магнитного поля. Для него выполняется также условие  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = 0$ , означающее отсутствие токов в плазме. В этом случае магнитное поле называют бессильным.

Далее мы построим стационарное ( $\partial/\partial t = 0$ ) решение системы уравнений (1.0.1)–(1.0.4), определяющее пространственное распределение параметров равновесной плазмы. Для простоты будем считать, что движение плазмы происходит только в азимутальном направлении  $\mathbf{v}_0 = (0, v_\phi = v_2/\sqrt{g_2}, 0)$  (см. рис. 3.11). Будем также предполагать азимутальную симметрию рассматриваемой модели. При этом уравнения (1.0.3) и (1.0.4) выполняются тождественно, поскольку каждое слагаемое в них равно нулю. Первая и третья компоненты векторного уравнения (1.0.2) также тождественно равны нулю, а вторая компонента дает

$$\frac{B_3}{g_3} \nabla_3 \frac{v_2}{g_2} = 0. \quad (3.4.5)$$

В любой аксиально-симметричной системе координат, в которой в качестве координаты  $x^2$  используется азимутальный угол  $\phi$ -компоненту метрического тензора  $g_2$  можно представить в виде  $g_2 = \rho^2$ , где  $\rho$  — радиус в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$ , отсчитываемый от оси симметрии. Учитывая, что  $\Omega = v_\phi/\rho = v_2/g_2$  — угловая скорость вращения плазмы, а  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_3/\sqrt{g_3})$ , можно переписать (3.4.5) в виде

$$\mathbf{B}_0 \nabla \Omega = 0. \quad (3.4.6)$$

Из этого уравнения следует, что в рассматриваемой модели магнитосферы угловая скорость движения плазмы постоянна на каждой магнитной оболочке и меняется только поперек магнитных оболочек — по координате  $x^1$ :  $\Omega \equiv \Omega(x^1)$ . Таким образом, азимутальное вращение плазмы на каждой магнитной оболочке осуществляется с постоянной угловой скоростью и не меняет геометрии силовых линий магнитного поля. Это, в частности, означает, что условные границы, разделяющие области с резко отличающимися скоростями движения плазмы (такие как плазмопауза и магнитопауза), должны совпадать с одной из магнитных оболочек, как показано на рис. 3.11.

В численных расчетах использована следующая модель  $\Omega(x^1)$ :

$$\Omega(a) = \frac{d(a)}{2} \left[ (\Omega_m + \Omega_{sw}) - (\Omega_m - \Omega_{sw}) \operatorname{th} \frac{a - a_m}{\Delta_{mp}} \right], \quad (3.4.7)$$

где  $\Omega_m, \Omega_{sw}$  — характерные значения угловой скорости плазмы в окрестности магнитопаузы, в магнитосфере и в солнечном ветре соответственно,  $a_m$  — экваториальный радиус магнитопаузы,  $\Delta_{mp}$  — характерная толщина ее переходного слоя. Коэффициент  $d(a)$  позволяет смоделировать характер движения плазмы внутри магнитосферы и в солнечном ветре. Выберем для него следующую модель:

$$d(a) = \begin{cases} \exp(-\alpha(a)(a - a_m)^2/\Delta_m^2), & a \leq a_m, \\ a_m/a, & a > a_m, \end{cases}$$

где  $\Delta_m$  — характерный масштаб замедления движения плазмы в магнитосфере,  $\alpha(a)$  — коэффициент порядка единицы. Используем следующие численные значения параметров задачи:  $a_m = 10R_E$ ,  $\Delta_{mp} = 0,5R_E$ , где  $R_E$  радиус Земли,  $\Omega_m = v_{\phi m}/a_m$ ,  $\Omega_{sw} = v_{\phi sw}/a_m$ , где  $v_{\phi m} = 50$  км/с,  $v_{\phi sw} = 400$  км/с — характерные азимутальные скорости движения плазмы в окрестности магнитопаузы в магнитосфере и солнечном ветре,  $\Delta_m = 10R_E$ .

Для выбранных моделей магнитного поля и скорости движения плазмы вторая компонента векторного уравнения (1.0.1) обращается в нуль тождественно, а два других уравнения можно записать в виде

$$\frac{\rho_0 \Omega^2}{2} \nabla_1 g_2 = \nabla_1 P_0, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{\rho_0 \Omega^2}{2} \nabla_3 g_2 = \nabla_3 P_0. \quad (3.4.9)$$

Равновесие вращающейся плазмы поддерживается градиентом ее газокINETического давления.

Чтобы решить систему уравнений (3.4.8), (3.4.9) в общем виде, продифференцируем (3.4.8) по  $x^3$ , (3.4.9) — по  $x^1$  и вычтем одно из другого. В результате получим

$$(\nabla_1 g_2) \nabla_3 (\rho_0 \Omega^2) - (\nabla_3 g_2) \nabla_1 (\rho_0 \Omega^2) = 0. \quad (3.4.10)$$

Будем искать решение этого уравнения методом характеристик. Характеристики оператора, стоящего в левой части (3.4.10), определяются уравнением

$$\frac{dx^1}{dx^3} = -\frac{\nabla_3 g_2}{\nabla_1 g_2},$$

которое сводится к полному дифференциалу  $dg_2 = 0$ , т. е. компонента метрического тензора  $g_2$  не меняется вдоль характеристики. В аксиально-симметричной системе координат  $g_2 = \rho^2$  и, следовательно, характеристики в плоскости  $x^2 = \text{const}$  представляют собой прямые линии, параллельные оси симметрии. Две из них на рис. 3.11 представлены вертикальными штриховыми линиями.



Если ввести координату  $s$ , меняющуюся вдоль характеристики, то, параметризуя координаты  $x^1$  и  $x^3$ :

$$\frac{dx^1}{ds} = 1, \quad \frac{dx^3}{ds} = -\frac{\nabla_3 g_2}{\nabla_1 g_2},$$

уравнение (3.4.10) приводится к виду

$$\frac{\partial \rho_0 \Omega^2}{\partial s} = 0. \quad (3.4.11)$$

Отсюда следует, что величина  $\rho_0 \Omega^2$  сохраняется вдоль характеристики. В частности можно записать выражение, определяющее плотность плазмы в произвольной точке в меридиональной плоскости через ее значение в точке ее вертикальной проекции на экваториальную плоскость:

$$\rho_0(a, \theta) = \rho_0(\rho, 0) \frac{\Omega^2(\rho)}{\Omega^2(a)}. \quad (3.4.12)$$

Одним из наиболее важных параметров, определяющих структуру МГД-колебаний плазмы, является величина альфвеновской скорости  $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ . Используя для  $B_0$  выражение (3.4.2), а для  $\rho_0$  — (3.4.12), получим

$$v_A(a, \theta) = v_A(\rho, 0) \frac{\Omega(a)}{\Omega(\rho)} \cos^3 \theta \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}. \quad (3.4.13)$$

Равновесное давление плазмы при заданном распределении магнитного поля  $B_0(a, \theta)$  и плотности  $\rho_0(a, \theta)$ , также можно определить из уравнений (3.4.8) и (3.4.9). Интегрируя (3.4.9) вдоль силовой линии, получим

$$\begin{aligned} P_0(a, \theta) &= P_0(a, 0) + \frac{\Omega^2(a)}{2} \int_0^\theta \rho_0(a, \theta') \frac{\partial g_2(a, \theta')}{\partial \theta'} d\theta' = \\ &= P_0(a, 0) - 3a^2 \Omega^2(a) \int_0^\theta \rho_0(a, \theta') \sin \theta' \cos^5 \theta' d\theta', \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

где  $P_0(a, 0)$  — давление в точке пересечения рассматриваемой силовой линии с экваториальной плоскостью, для определения которого проинтегрируем (3.4.8) при  $\theta = 0$ :

$$P_0(a, 0) = P_0(\bar{a}, 0) + \int_{\bar{a}}^a \rho_0(a', 0) \Omega^2(a') a' da', \quad (3.4.15)$$

где  $\bar{a}$  — экваториальный радиус граничной магнитной оболочки, который выберем равным радиусу ионосферы  $\bar{a} = a_i$ .

На рис. 3.12 представлено экваториальное распределение скорости движения плазмы для двух различных моделей распределения  $\Omega(a)$ , задаваемых функцией  $\alpha(a)$ . Кривая 1 соответствует значению  $\alpha = 1$  внутри всей магнитосферы, а кривая 2 получена для  $\alpha(a) = (3 - \text{th}(a - a_p)/\Delta_p)/4$ , где  $a_p = 4R_E$  — экваториальный радиус плазмопаузы, а  $\Delta_p = 0,5R_E$  — характерная толщина ее переходного слоя. Использование такой модели  $\alpha(a)$  позволяет смоделировать резкое изменение  $v_\phi$  на плазмопаузе. Такое распределение  $v_\phi$  приводит к резкому скачку плотности плазмы при переходе через плазмопаузу.

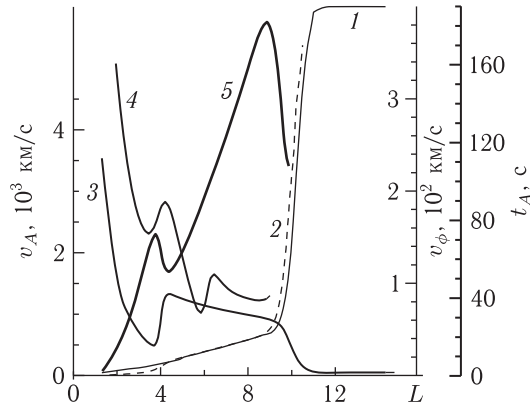


Рис. 3.12. Распределение поперек магнитных оболочек экваториальной скорости движения плазмы  $v_\phi$  (кривые 1 и 2), альфвеновской скорости  $v_A(a, \theta)$  (кривая 3 — в экваториальной плоскости  $\theta = 0$ , кривая 4 — вдоль радиуса  $\mathbf{r}$  под углом  $\theta = 30^\circ$  к экватору) и периода основной гармоники собственных альфвеновских колебаний магнитосферы  $t_A$  (кривая 5)

Резкие изменения в распределении альфвеновской скорости при переходе через плазмопаузу и магнитопаузу связаны с изменением плотности плазмы  $\rho_0(a, \theta)$ . На рис. 3.12 кривая 3 представляет экваториальное распределение альфвеновской скорости  $v_A(a, 0)$ , соответствующее модели [245], которое задается аналитически формулами (3.2.1), (3.2.2) при  $\theta = 0$ . Здесь же представлено распределение  $v_A$  вдоль радиуса  $\mathbf{r}$  с углом наклона к экваториальной плоскости  $\theta = 30^\circ$  (кривая 4). Интересной особенностью этого распределения является «двойная плазмопауза» — явление нередко наблюдаемое на спутниках. В рамках рассматриваемой модели образование одного из локальных максимумов связано с резким изменением плотности в переходном слое плазмопаузы. Второй максимум обусловлен аналогичным резким изменением плотности в цилиндрическом слое, образованном проекцией плазмопаузы вдоль характеристик (см. (3.4.12)). На этом же рисунке кривая 5 представляет величину основного периода

собственных альфвеновских колебаний магнитосферы  $t_A$ , определяемого в ВКБ-приближении выражением (3.1.16).

На рис. 3.13 представлено распределение изолиний параметра  $\beta = 8\pi P_0(a, \theta)/B_0^2(a, \theta)$ , определяющего отношение газокINETического давления плазмы к магнитному. В качестве граничного условия на ионосфере выбрано значение давления  $P_0(\bar{a}, 0) = 0,2$  нПа на высоте  $h = 1500$  км над поверхностью Земли. При концентрации плазмы  $n_0 = 10^4$  см $^{-3}$  это соответствует температуре  $T_0 = 1500$  К. Часто в качестве условной границы магнитосферы принимают такую поверхность, на которой суммарное кинетическое и газокINETическое давление плазмы солнечного ветра сравнивается с давлением геомагнитного поля ( $\beta = 1$ ). Видно, что в рассматриваемой модели магнитосферы эта поверхность существенно отличается от магнитопаузы, определенной ранее как граница, разделяющая области быстро движущейся плазмы солнечного ветра и медленной конвекции магнитосферной плазмы. Эти поверхности совпадают только в приэкваториальной области.

Таким образом, мы построили самосогласованную модель дипольной магнитосферы с вращающейся плазмой, уравновешенной градиентом ее газокINETического давления.

**3.4.2. Основные уравнения для магнитозвуковых волн.** Для описания поля магнитозвуковых колебаний в плазме с конечным давлением используем уравнение (Д.7) (Приложение Д), в котором пренебрежем отличием от нуля его правой части, описывающей влияние поля альфвеновских волн на магнитозвуковые колебания. Как мы видели в предыдущих разделах, даже на резонансных поверхностях обратное влияние альфвеновских волн на БМЗ-колебания мало. Взаимодействие альфвеновских и ММЗ-волн может быть существенным для колебаний с большими азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$ . Для рассматриваемых здесь колебаний с  $m \sim 1$  это взаимодействие несущественно.

При переходе к однородной плазме оператор в левой части (Д.7) дает дисперсионное уравнение для магнитозвуковых волн:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + v_s^2) + k^2 k_{\parallel}^2 v_A^2 v_s^2 = 0, \quad (3.4.16)$$

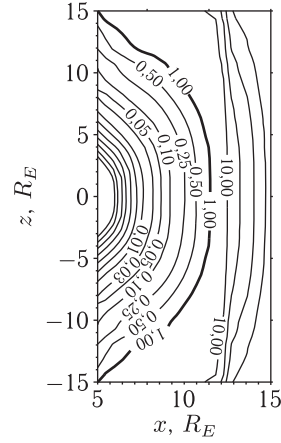


Рис. 3.13. Изолинии параметра  $\beta = 8\pi P_0(a, \theta)/B_0^2(a, \theta)$  в меридиональной плоскости  $(x, z)$ . Координаты  $x = r \cos^2 \theta$  и  $z = r \cos^2 \theta \sin \theta$  выражены в единицах радиуса Земли

где  $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2$ ,  $k_{\parallel}^2 = k_3^2/g_3$ ,  $k_{\perp}^2 = k_1^2/g_1 + k_2^2/g_2$ . Решение (3.4.16) можно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2}(v_A^2 + v_s^2) \pm \sqrt{\frac{k^4}{4}(v_A^2 + v_s^2)^2 - k^2 k_{\parallel}^2 v_A^2 v_s^2}.$$

Знак плюс соответствует дисперсионному уравнению для БМЗ-волн, а знак минус — для ММЗ-волн. Если выполняется одно из неравенств:  $v_s \ll v_A$ ,  $v_A \ll v_s$ ,  $|k_{\parallel}| \ll |k_{\perp}|$ , можно получить следующие приближенные дисперсионные уравнения:

$$\omega^2 \approx k^2 c_f^2$$

— для БМЗ-волн, где  $c_f^2 = v_A^2 + v_s^2$  и,

$$\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 c_s^2,$$

— для ММЗ-волн, где  $c_s^2 = v_A^2 v_s^2 / (v_A^2 + v_s^2)$ . В рассматриваемой нами модели магнитосферы выполняется по крайней мере одно из указанных выше неравенств ( $v_s \ll v_A$ ).

Поскольку потенциал  $\psi$  описывает как быстрые, так и медленные магнитозвуковые волны, в линейном приближении его можно представить в виде суммы  $\psi = \psi_f + \psi_s$ , где составляющая  $\psi_f$  связана с БМЗ-волной, а  $\psi_s$  — с ММЗ-волной. Можно показать, что в однородной плазме для полного возмущенного давления ММЗ-волн выполняются следующие соотношения:

$$\left(\tilde{P} + P_m\right) / \tilde{P} \sim \left(\tilde{P} + P_m\right) / P_m = \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2},$$

где  $P_m = B_0 B_{\parallel} / 4\pi$  — возмущенное магнитное давление, а  $\tilde{P}$  — возмущенное газокINETическое давление, описываемое уравнением (Д.5) (приложение Д) при  $\varphi = 0$ . Отсюда следует, что для колебаний с  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$  полное давление в ММЗ-волне практически не возмущается:

$$\tilde{P} + \frac{B_0 B_{\parallel}}{4\pi} \approx 0. \quad (3.4.17)$$

Как будет видно из дальнейших расчетов, поле резонансных ММЗ-волн узко локализовано поперек магнитных оболочек вблизи резонансной поверхности. Вдали от этой поверхности потенциал  $\psi$  определяется полем БМЗ-колебаний ( $\psi \approx \psi_f$ ). Пренебрегая в операторе  $\hat{L}_0$  в (Д.7) (приложение Д) малой составляющей (порядка  $v_s/v_A \ll 1$ ), связанной с производными по продольной координате  $x^3$ , получим уравнение

$$v_A^2 \tilde{\Delta} \psi_f + v_s^2 \bar{\Delta} \psi_f + \omega^2 \psi_f = 0, \quad (3.4.18)$$

описывающее поле БМЗ-волны вдали от резонансной поверхности, где

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{g_2} + \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}}, \\ \bar{\Delta} &= \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \left( \nabla_1 \frac{p P_0^\sigma}{B_0} \nabla_1 - \frac{k_2^2 P_0^\sigma}{p B_0} + \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{\rho_0}{B_0 \sqrt{g_3}} \right),\end{aligned}$$

$\sigma = 1/\gamma$ ,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты.

Вблизи резонансной поверхности полное поле магнитозвуковых колебаний представляется суммой полей БМЗ и ММЗ-волн:  $\psi = \psi_f + \psi_s$ . Подставляя это выражение для потенциала  $\psi$  в (Д.7) и учитывая (3.4.18), получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{B_0 \sqrt{g_3}}{4\pi\rho_0} \hat{L}_0 \frac{B_0}{\sqrt{g_3}} \tilde{\Delta} \psi_s + v_s^2 \bar{\Delta} \psi_s + \omega^2 \psi_s = \\ = - \frac{v_A^2 v_s^2}{\omega^2} \frac{\rho_0 / \sqrt{g_1 g_2}}{B_0 P_0^\sigma} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{B_0}{\sqrt{g_3}} \tilde{\Delta} \psi_f,\end{aligned}\quad (3.4.19)$$

описывающее резонансные ММЗ-колебания, где

$$\hat{L}_0 = \frac{v_s^2}{\omega^2} \frac{\rho_0}{P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 + 1.$$

Правая часть (3.4.19) описывает источник резонансных ММЗ-волн — поле монохроматической БМЗ-волны. Будем считать его известным из решения уравнения (3.4.18) (см. разд. 3.5).

Граничные условия для ММЗ-волн на ионосфере задаются уравнением (2.17.10), в котором мы пренебрежем сторонними токами и генерацией альфвеновской волны за счет конечной холловской проводимости в ионосфере. Кроме того, как показано в разд. 3.5, вблизи Земли магнитосфера является областью непрозрачности для рассматриваемых здесь БМЗ-волн и их вкладом в полное поле магнитозвуковых волн на ионосфере мы также пренебрежем. Будем считать компоненту векторного потенциала  $\psi$  в граничном условии (2.17.10) связанной только с полем ММЗ-волн:

$$\psi_s|_{l=l_\pm} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \frac{\partial \psi_s}{\partial l} \Big|_{l=l_\pm}, \quad (3.4.20)$$

где производная  $\partial/\partial l \equiv \partial/\sqrt{g_3} \partial x^3$  берется вдоль силовой линии, а в качестве продольной координаты используется длина силовой линии  $l$ , отсчитываемая от экваториальной плоскости ( $l_\pm$  — координаты пересечения силовой линии с ионосферами северного и южного полушарий). Правая часть (3.4.20) описывает затухание ММЗ-волн за счет джоулевой диссипации их энергии в проводящем слое ионосферы.

**3.4.3. Структура стоячих ММЗ-волн вдоль силовых линий магнитного поля.** В последующих расчетах мы будем рассматривать несколько первых гармоник стоячих вдоль магнитных силовых линий

ММЗ-волн. Характерная длина волны таких колебаний в продольном направлении порядка длины силовой линии. Как мы увидим, характерный масштаб резонансных ММЗ-колебаний поперек магнитных оболочек много меньше их продольной длины волны:  $|\nabla_1 \psi_s / \psi_s| \gg |\nabla_3 \psi_s / \psi_s|$ . Это позволяет искать решение (3.4.19) методом разных масштабов, представляя потенциал  $\psi_s$  в виде

$$\psi_s = U(x^1)(S(x^1, x^3) + h(x^1, x^3)) \exp(ik_2 x^2 - i\omega t), \quad (3.4.21)$$

где функция  $U(x^1)$  описывает мелкомасштабную структуру колебаний по координате  $x^1$ , а  $S(x^1, x^3)$  — структуру колебаний вдоль силовых линий магнитного поля в главном порядке теории возмущений. Характерный масштаб изменения  $S(x^1, x^3)$  по  $x^1$  много больше, чем масштаб изменения  $U(x^1)$ . Малая поправка  $h(x^1, x^3)$  описывает колебания в более высоких порядках теории возмущений.

Уравнение на продольную структуру ММЗ-волн получается, если в (3.4.19) оставить только слагаемые главного порядка ( $\sim \nabla_1^2 \psi_s$ ) теории возмущений:

$$\frac{\rho_0 p^{-1}}{B_0 P_0^\sigma} \nabla_3 \frac{\sqrt{g} P_0^\sigma}{g_3 \rho_0} \nabla_3 \frac{B_0}{g_1 \sqrt{g_3}} S + \frac{\omega^2}{c_s^2} S = 0. \quad (3.4.22)$$

Будем полагать, что в главном порядке функции  $S(x^1, x^3)$  удовлетворяют однородным граничным условиям на ионосфере:  $S(x^1, x_\pm^3) = 0$ . Решением (3.4.22) являются собственные функции  $S_N(x^1, x^3)$ , ( $N = 1, 2, 3, \dots$  — продольное волновое число) и соответствующие им собственные значения частоты колебаний:  $\omega^2 = \Omega_{sN}^2$ . Будем считать собственные функции нормированными следующим условием

$$\int_{l_-}^{l_+} \frac{p P_0^\sigma}{g_1 g_3} \frac{v_A^2}{c_s^2} S_N^2 dl = 1. \quad (3.4.23)$$

Чтобы получить качественное представление о структуре рассматриваемых собственных функций  $S_N(x^1, x^3)$ , найдем решение (3.4.22) в ВКБ-приближении, которое применимо для гармоник с  $N \gg 1$ . Используя стандартный метод ВКБ-приближения, аналогичный представленному в разд. 3.1.1, запишем решение (3.4.22), нормированное условием (3.4.23), в первых двух порядках ВКБ-приближения в виде

$$S_N(x^1, x^3) = \sqrt{\frac{2}{t_s} \frac{g_3 g_1^{3/2} c_s}{P_0^\sigma g_2^{1/2} v_A^2}} \sin \left( \Omega_{sN} \int_{l_-}^l \frac{dl}{c_s} \right), \quad (3.4.24)$$

где  $\Omega_{sN} = 2\pi N / t_s$ ,

$$t_s = \int_{l_-}^{l_+} \frac{dl}{c_s}, \quad (3.4.25)$$

— время пробега вдоль силовой линии магнитного поля между магнитосопряженными ионосферами со скоростью медленной магнитозвуковой волны. Решение (3.4.22) для основных гармоник ( $N \sim 1$ ) может быть найдено только численно, как это сделано далее в разд. 3.4.6.

**3.4.4. Структура резонансных ММЗ-колебаний поперек магнитных оболочек.** В первом порядке теории возмущений будем полагать, что функции  $h_N(x^1, x^3)$  в (3.4.21) удовлетворяют следующим граничным условиям на ионосфере:

$$h_N|_{l=l_{\pm}} = \mp i U_N(x^1) \frac{v_{p\pm}}{\omega} \frac{\partial S_N}{\partial l} \Big|_{l=l_{\pm}}. \quad (3.4.26)$$

Домножим (3.4.19) слева на  $S_N p P_0^\sigma / \sqrt{g_3} v_s^2$  и проинтегрируем вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами. С учетом (3.4.22) и граничного условия (3.4.26), получаем для функции  $U_N(x^1)$  следующее уравнение:

$$\frac{(\omega^2 + i\gamma_N)^2 - \Omega_{sN}^2}{\omega^2} \nabla_1^2 U_N^2 - \left[ \beta_{1N} + (k_2^2 \beta_{2N} + \beta_{3N}) \frac{(\omega^2 + i\gamma_N)^2 - \Omega_{sN}^2}{\omega^2} \right] U_N = D_N, \quad (3.4.27)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \beta_{1N} &= \int_{l_-}^{l_+} \frac{p P_0^\sigma}{g_3} S_N \left( \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} S_N + \frac{\Omega_{sN}^2}{c_s^2} S_N \right) dl, \\ \beta_{2N} &= \int_{l_-}^{l_+} \frac{p P_0^\sigma}{g_2 g_3} \frac{v_A^2}{c_s^2} S_N^2 dl, \\ \beta_{3N} &= - \int_{l_-}^{l_+} \frac{p P_0^\sigma}{g_3} \frac{v_A^2}{v_s^2} S_N \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} S_N dl, \\ D_N &= \frac{\Omega_{sN}^2}{\omega^2} \int_{l_-}^{l_+} \frac{p P_0^\sigma}{g_3} \frac{v_A^2}{c_s^2} S_N \tilde{\Delta} \psi_f dl, \end{aligned}$$

а также выражение для декремента:

$$\gamma_N = \frac{1}{2\Omega_{sN}^2} \left[ \frac{p P_0^\sigma v_A^2}{g_1 g_3} v_{p+} \frac{\partial S_N}{\partial l} \Big|_{l=l_+} + \frac{p P_0^\sigma v_A^2}{g_1 g_3} v_{p-} \frac{\partial S_N}{\partial l} \Big|_{l=l_-} \right], \quad (3.4.28)$$

связанного с джоулевой диссипацией энергии ММЗ-волн в ионосферах северного ( $l = l_+$ ) и южного ( $l = l_+$ ) полушарий.

Выражения для коэффициентов уравнения (3.4.27) существенно упрощаются для колебаний с  $N \gg 1$ , когда применимо ВКБ-приближение по продольной координате:

$$\beta_{1N} \approx 0, \quad \beta_{2N} \approx \frac{1}{t_s} \int_{l_-}^{l_+} \frac{g_1}{g_2} \frac{dl}{c_s}, \quad \beta_{3N} \approx \frac{\Omega_{sN}^2}{t_s} \int_{l_-}^{l_+} \frac{g_1 dl}{c_s v_s^2},$$

$$\gamma_N = \frac{1}{t_s} \left[ \frac{v_{p+}}{c_s^+} + \frac{v_{p-}}{c_s^-} \right].$$

Интересно отметить, что в этом приближении декремент затухания не зависит от номера гармоники стоячих ММЗ-волн, т. е. не зависит от частоты колебаний.

Найдем решение (3.4.27) вблизи резонансной магнитной оболочки  $x^1 = x_{sN}^1$ , определяемой условием  $\omega = \Omega_{sN}(x_{sN}^1)$ . Рассмотрим область магнитосферы, где функция  $\Omega_{sN}(x^1)$  меняется монотонно. Вблизи резонансной поверхности можно разложить  $\Omega_{sN}(x^1)$  с точностью до линейных слагаемых:

$$\Omega_{sN} \approx \omega \left( 1 - \frac{x^1 - x_{sN}^1}{a_N} \right). \quad (3.4.29)$$

Это разложение применимо при  $|x^1 - x_{sN}^1| \ll L$ , где  $a_N = (\partial \ln \Omega_{sN} / \partial x^1)^{-1}$  — характерный масштаб изменения  $\Omega_{sN}$  в точке  $x^1 = x_{sN}^1$ . Подставляя (3.4.29) в (3.4.27) и переходя к безразмерной переменной  $\xi = (x^1 - x_{sN}^1) / \lambda_{sN}$ , где  $\lambda_{sN} = 1 / \sqrt{\beta_{3N}}$ , получаем уравнение

$$(\xi + i\varepsilon) \frac{\partial^2 U_N}{\partial \xi^2} - [c_N + (1 + d_N)(\xi + i\varepsilon)] U_N = G_N, \quad (3.4.30)$$

описывающее поперечную структуру резонансной ММЗ-волны вблизи резонансной поверхности. Коэффициенты этого уравнения:  $\varepsilon = \gamma_N a_N / \omega \lambda_{sN}$ ,  $c_N = \beta_{1N} a_N \lambda_{sN}$ ,  $d_N = \beta_{2N} k_2^2 \lambda_{sN}^2$ ,  $G_N = D_N \lambda_{sN} a_N$ , можно считать постоянными, поскольку они мало меняются на масштабе локализации искомого решения  $U_N(\xi)$ .

Решение (3.4.30) можно найти, представляя искомую функцию  $U_N(\xi)$  в виде интеграла Фурье:

$$U_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_N(k) e^{ik\xi} dk.$$

Подставляя это выражение в (3.4.30), получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $\bar{U}_N(k)$ , решение которого легко найти (см. разд. 3.13). Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем решение исходного уравнения в виде

$$U_N(\xi) = iG_N(0) \int_0^{\infty} \frac{\exp[ik(\xi + i\varepsilon) + i\zeta(k)]}{k^2 + 1 + d_N} dk, \quad (3.4.31)$$



где обозначено

$$\zeta(k) = \frac{c_N}{\sqrt{1+d_N}} \operatorname{arctg} \frac{k}{\sqrt{1+d_N}}.$$

Рассмотрим поведение  $U_N(\xi)$  вблизи резонансной поверхности ( $\xi \rightarrow 0$ ) и на асимптотиках ( $|\xi| \rightarrow \infty$ ). При  $\xi \rightarrow 0$  основная часть интеграла (3.4.31) набирается при  $k \gg 1$  так, что в показателе экспоненты подынтегрального выражения можно положить  $\zeta(k) \approx \zeta(\infty)$ , а в знаменателе пренебречь всеми слагаемыми кроме  $k^2$ . При этом легко получить выражение для второй производной:

$$U_N''(\xi) \Big|_{|\xi| \rightarrow \infty} \approx \frac{G_N(0)e^{i\zeta(\infty)}}{(\xi + i\varepsilon)},$$

интегрируя которое, получаем

$$U_N(\xi) \Big|_{|\xi| \rightarrow \infty} \approx G_N(0)e^{i\zeta(\infty)}(\xi + i\varepsilon) \ln(\xi + i\varepsilon). \quad (3.4.32)$$

Такое поведение  $U_N(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0$  можно получить сразу из (3.4.30) методом Фробениуса.

На асимптотиках  $|\xi| \rightarrow \infty$  основная часть интеграла (3.4.31) набирается при  $k \ll 1$  так, что в  $\zeta(k)$  и в знаменателе подынтегрального выражения можно положить  $k = 0$ . После этого интеграл легко вычисляется:

$$U_N(\xi) \Big|_{|\xi| \rightarrow \infty} \approx \frac{G_N(0)}{1+d_N} \frac{1}{\xi + i\varepsilon}. \quad (3.4.33)$$

Амплитуда резонансных ММЗ-колебаний при удалении от резонансной поверхности линейно убывает на асимптотиках. Такое поведение удовлетворяет граничным условиям по координате  $x^1$  — ограниченности амплитуды колебаний во всей области их существования.

**3.4.5. Структура компонент поля резонансных ММЗ-колебаний вблизи резонансной поверхности.** Рассмотрим поведение различных компонент поля резонансных ММЗ-колебаний вблизи резонансной поверхности. Для компонент магнитного поля используем выражения (Д.2) (приложение Д), в которых положим  $\varphi = 0, \psi = \psi_{sN}$ . Используя для функции  $U_N(\xi)$  ее приближенное представление (3.4.32), получим

$$\begin{aligned} B_{1N} &\approx -i \frac{\bar{B}_N}{\lambda_{sN}} \ln(\xi + i\varepsilon) \left( \frac{g_1}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} S_N \right), \\ B_{2N} &\approx k_2 \bar{B}_N (\xi + i\varepsilon) \ln(\xi + i\varepsilon) \left( \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} S_N \right), \\ B_{3N} &\approx i \frac{\bar{B}_N}{\lambda_{sN}^2} \frac{1}{(\xi + i\varepsilon)} \frac{S_N}{g_1}, \end{aligned}$$

где обозначено  $\bar{B}_N = (c/\omega)G_N(0)e^{i\zeta(\infty)}$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  особенность высшего порядка ( $\sim \xi^{-1}$ ) имеет продольная компонента поля  $B_{3N}$ . Однако вблизи ионосферы, где функция  $S_N(x^1, x^3)$  имеет узел, доминирующей

является радиальная компонента поля  $B_{1N}$ , имеющая логарифмическую особенность. Азимутальная компонента  $B_{2N}$  в распределении амплитуды особенностей не имеет.

Для компонент электрического поля используем выражения (Д.1) (приложение Д). Подставляя в них  $U_N$  в виде (3.4.32), получим

$$\begin{aligned} E_{1N} &\approx ik_2 \bar{E}_N (\xi + i\varepsilon) \ln(\xi + i\varepsilon) \left( \frac{g_1}{\sqrt{g}} S_N \right), \\ E_{2N} &\approx -\frac{\bar{E}_N}{\lambda_{sN}} \ln(\xi + i\varepsilon) \left( \frac{g_2}{\sqrt{g}} S_N \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{E}_N = G_N(0)e^{i\zeta(\infty)}$ . Логарифмическую особенность при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет азимутальная компонента  $E_{2N}$ .

Для компонент поля скоростей используем (Д.3) (приложение Д), а также уравнение (Д.4), связывающее их с возмущенным давлением. Вблизи резонансной поверхности имеем

$$\begin{aligned} v_{1N} &\approx -\frac{\bar{v}_N}{\lambda_{sN}} \ln(\xi + i\varepsilon) \frac{S_N}{\sqrt{g_3}}, \\ v_{2N} &\approx -ik_2 \bar{v}_N (\xi + i\varepsilon) \ln(\xi + i\varepsilon) \frac{S_N}{\sqrt{g_3}}, \\ v_{3N} &\approx -\frac{\bar{v}_N / \rho_0}{\lambda_{sN}^2 \omega^2 (\xi + i\varepsilon)} \nabla_3^2 \frac{v_A^2 \rho_0}{g_1} \frac{S_N}{\sqrt{g_3}}, \end{aligned}$$

где  $\bar{v}_N = (c/B_0)G_N(0)e^{i\zeta(\infty)}$ . Характер колебаний скорости плазмы, несколько отличается от колебаний компонент электромагнитного поля. Обе поперечных компоненты  $v_{1N}$  и  $v_{2N}$  имеют узел вблизи ионосферы. Таким образом, продольная компонента  $v_{3N}$ , имеющая особенность  $\sim \xi^{-1}$  доминирует во всей области существования резонансных ММЗ-колебаний.

Выражение для возмущенного давления вблизи резонансной поверхности имеет вид

$$\tilde{P}_N \approx -i \frac{\bar{B}_N B_0}{4\pi \lambda_{sN}^2} \frac{1}{(\xi + i\varepsilon)} \frac{S_N}{g_1 \sqrt{g_3}}.$$

Легко проверить, что для резонансной ММЗ-волны выполняется условие равенства нулю полного возмущенного давления (3.4.17).

**3.4.6. Численное решение уравнений для резонансных ММЗ-волн.** Точные решения уравнений (3.4.22) и (3.4.30), описывающих структуру резонансных ММЗ-колебаний, для основных гармоник стоячих ММЗ-волн могут быть найдены только численно. При численном решении используем систему координат  $(a, \phi, \theta)$ , связанную с силовыми линиями дипольного магнитного поля (см. рис. 3.11).

В последующих численных расчетах параметры плазмы и магнитного поля заданы в рамках самосогласованной модели дипольной магнитосферы, представленной в разд. 3.4.1. Распределение этих параметров

в плоскости магнитного меридиана соответствует средневозмущенному состоянию дневной части магнитосферы. Расчеты проведены для магнитной оболочки  $L = 6,6$ , которая соответствует положению геостационарных спутников. Отметим, что в этих расчетах пренебрежено эффектами, связанными с движением фоновой плазмы на рассматриваемых магнитных оболочках. Специальные расчеты, посвященные резонансным альфвеновским волнам, показали, что эти эффекты малы [246].

На рис. 3.14, *a* представлены распределения собственных частот первых трех гармоник стоячих ММЗ-волн. Они получены в результате численного решения уравнения (3.4.22) с однородными граничными условиями на ионосфере. Для сравнения на рис. 3.14, *б* приведены аналогичные распределения первых трех гармоник стоячих тороидальных альфвеновских волн для той же модели магнитосферы. На каждом из рисунков представлено время пробега вдоль силовой линии между магнитосопреженными ионосферами со скоростью ММЗ-волн ( $t_s$ ) и со скоростью Альфвена ( $t_A$ ), которые определяют значение собственных частот колебаний в ВКБ-приближении. В отличие от альфвеновских волн, частоты основных гармоник ММЗ-волн сильно отличаются от их значений в ВКБ-приближении. Так, для первой гармоники ММЗ-волн, точное значение частоты отличается от ее ВКБ-величины почти в 5 раз.

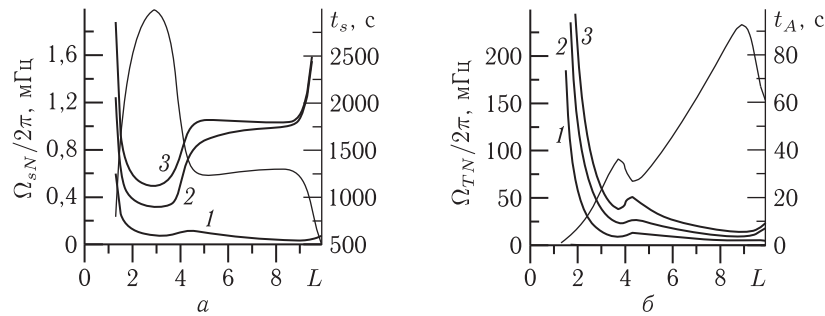


Рис. 3.14. *a* — распределение поперек магнитных оболочек собственных частот первых трех гармоник стоячих ММЗ-волн ( $\Omega_{sN}/2\pi$ ) и времени пробега вдоль силовой линии со скоростью медленных магнитозвуковых волн  $t_s$ . *б* — частоты трех первых гармоник стоячих тороидальных альфвеновских волн ( $\Omega_{TN}/2\pi$ ) и время пробега с альфвеновской скоростью между магнитосопреженными ионосферами  $t_A$

На рис. 3.15, *a* представлены структуры первых трех гармоник стоячих вдоль силовой линии альфвеновских и ММЗ-волн. Для альфвеновских волн мы имеем приблизительно ту же картину, что и в ВКБ-приближении. Структура основных гармоник стоячих ММЗ-волн отличаются от их ВКБ-представления (3.4.24) радикально. Отметим немонотонность функций  $S_N(x^1, x^3)$  при  $\theta \approx \pm 28^\circ$ . Это связано с особенностью используемой модели магнитосферы, в которой присутствует двойная плазмапауза. В окрестности  $\theta \approx \pm 28^\circ$  силовая

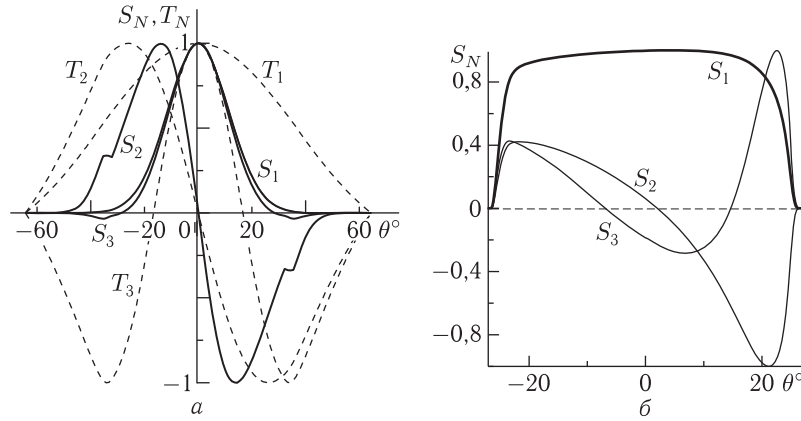


Рис. 3.15. *а* — структура вдоль силовых линий магнитного поля первых трех гармоник стоячих альфвеновских волн ( $T_N(\theta)$ ,  $N = 1, 2, 3$ ) и ММЗ-волн ( $S_N(\theta)$ ,  $N = 1, 2, 3$ ) на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . *б* — структура первых трех гармоник стоячих ММЗ-волн ( $S_N(\theta)$ ,  $N = 1, 2, 3$ ) на магнитной оболочке  $L = 1,3$

линия пересекает плазмопаузу второго рода, которая не совпадает с поверхностью магнитной оболочки. Главная особенность основных гармоник ММЗ-волн в рассматриваемой модели магнитосферы — быстрое убывание их амплитуды при приближении к ионосфере.

Для сравнения на рис. 3.15, *б* представлена структура трех первых гармоник ММЗ-волн на коротких магнитных силовых линиях на магнитной оболочке  $L = 1,3$ . Для этих расчетов использовалась другая модель магнитосферы (см. [89]). Эти расчеты проводились для определения структуры ММЗ-волн, генерируемых в плазмосфере движущимся по ионосфере солнечным терминатором [27, 247]. Структура рассматриваемых стоячих ММЗ-волн асимметрична относительно экваториальной плоскости — силовые линии на рассматриваемой магнитной оболочке пересекают ионосферу в северном полушарии в освещенной области, а в южном — в затененной. Следует отметить, что внутренняя плазмосфера является единственной областью в магнитосфере Земли, где температура электронов фоновой плазмы существенно превышает ионную температуру:  $T_e \approx 2T_i$ . Поэтому ММЗ-волны слабо затухают, что позволяет наблюдать их здесь с заметной амплитудой.

На рис. 3.16 представлена структура физических компонент магнитного поля ( $B_x \equiv B_1/\sqrt{g_1} = |B_x|e^{i\alpha x}$ ,  $B_y \equiv B_2/\sqrt{g_2} = |B_y|e^{i\alpha y}$ ,  $B_z \equiv B_3/\sqrt{g_3} = |B_z|e^{i\alpha z}$ ) основной гармоники резонансных ММЗ-волн ( $N = 1$ ) в окрестности резонансной магнитной оболочки  $L = 6,6$ . На рис. 3.16, *а* представлена структура колебаний в приэкваториальной области (вдали от узлов функций  $S_N$  и  $\partial S_N/\partial l$ ). Амплитуда монохроматической ММЗ-волны, играющей роль источника резонансных ММЗ-колебаний, выбрана так, что в точке максимума распределе-

ния амплитуды  $|B_z| = 1$ . Начальная фаза колебаний выбрана равной нулю в асимптотически далекой области справа от резонансной оболочки. При численных расчетах использовалась такая величина декремента затухания, для которой  $\varepsilon = 10^{-2}$ . В этом случае резонансная структура колебаний выделяется вполне отчетливо. При увеличении  $\gamma_N$  (и  $\varepsilon$ ) максимум амплитуды уменьшается, а ширина резонансного пика увеличивается. При переходе через резонансный пик фаза продольной  $|B_z|$ -компоненты изменяется приблизительно на  $\pi$ ,  $|B_x|$ -компоненты — на  $\sim \pi/2$ , а у  $|B_y|$ -компоненты — практически не меняется.

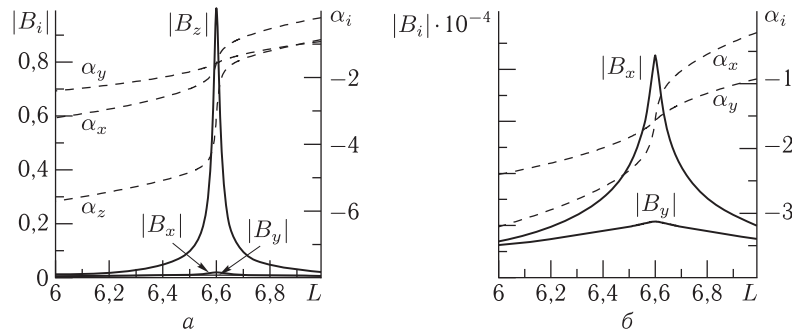


Рис. 3.16. Поперечная структура компонент магнитного поля первой гармоники ( $N = 1$ ) резонансных ММЗ-колебаний вблизи резонансной оболочки  $L = 6,6$ : *a* — распределение амплитуды  $|B_i|$  и фазы  $\alpha_i$  стоячих ММЗ-волн вблизи экваториальной поверхности ( $i = x, y, z$ ); *б* — распределения амплитуды и фазы колебаний вблизи ионосферы (продольная компонента  $B_z$  обращается в нуль)

На рис. 3.16, *б* приведены соответствующие распределения  $|B_x|$ -,  $|B_y|$ -компонент поля колебаний вблизи ионосферы. Напомним, что  $|B_z|$ -компонента на ионосфере обращается в нуль. Однако амплитуды поперечных компонент поля вблизи ионосферы также мало отличаются от нуля (по сравнению с их экваториальной величиной). Это связано с быстрым уменьшением функции  $\partial S_N / \partial l$ , описывающей продольную структуру поля колебаний, при приближении к ионосфере (см. рис. 3.15, *a*). Таким образом, именно альфвеновские волны являются основной компонентой МГД-колебаний, регистрируемых на поверхности Земли. Для БМЗ-волн Земля находится в области непрозрачности, а амплитуда ММЗ-волн сильно убывает при приближении к ионосфере.

### 3.5. БМЗ-колебания дипольноподобной магнитосферы

В данном разделе мы исследуем БМЗ-колебания аксиально симметричной магнитосферы. Аксиальная симметрия предполагает, что геомагнитное поле и плазма неоднородны как вдоль силовых линий геомагнитного поля, так и поперек магнитных оболочек. Силовые

линии криволинейны и пересекают ионосферу в северном и южном полушариях (типичный пример — дипольное магнитное поле). Магнитосфера имеет достаточно резкую границу, отделяющую ее от солнечного ветра — магнитопаузу. Магнитопауза представляет собой тонкий переходной слой, внутри которого параметры плазмы меняются от величин, характерных для магнитосферы, до величин, типичных для солнечного ветра. Магнитозвуковые колебания могут с определенной эффективностью проникать через такую границу из солнечного ветра внутрь магнитосферы и обратно. При этом магнитосфера может служить резонатором для БМЗ-волн — внутри нее могут генерироваться собственные БМЗ-колебания. Далее мы исследуем пространственную структуру и спектр частот таких колебаний.

**3.5.1. Структура БМЗ-колебаний вдоль силовых линий магнитного поля.** Как было показано в предшествующих разделах, при исследовании быстрых магнитозвуковых колебаний можно в главном порядке теории возмущений пренебречь их взаимодействием с резонансными альфвеновскими и ММЗ-волнами даже на резонансных поверхностях. Поэтому для исследования пространственной структуры и спектра БМЗ-колебаний аксиально-симметричной магнитосферы используем однородное уравнение (3.4.18) в криволинейных ортогональных координатах  $(x^1, x^2, x^3)$ , связанных с силовыми линиями геомагнитного поля. В большей части магнитосферы выполняется условие  $v_s^2 \ll v_A^2$ . Поэтому для простоты мы ограничимся моделью магнитосферы с «холодной» плазмой (см. разд. 3.2.1). В такой среде распространение БМЗ-волн определяется, в основном, пространственным распределением альфвеновской скорости. При необходимости полученные ниже решения легко обобщаются на случай «теплой» плазмы ( $v_s^2 \lesssim v_A^2$ ).

Кроме того, будем предполагать, что длина волны рассматриваемых БМЗ-колебаний в направлении поперек магнитных оболочек много меньше характерного масштаба неоднородности магнитосферной плазмы. Для описания таких колебаний вдали от точек поворота можно использовать ВКБ-приближение по координате  $x^1$ . Такое рассмотрение качественно применимо и для колебаний, у которых длина волны порядка масштаба неоднородности магнитосферы. Колебания же с обратным соотношением длины волны к масштабу неоднородности внутри магнитосферы не существуют. Будем также полагать, что длина волны рассматриваемых колебаний вдоль силовой линии порядка характерного масштаба неоднородности магнитосферной плазмы. Такой подход дает возможность искать решение уравнения (3.4.18) методом разных масштабов. Представим искомое решение в виде

$$\psi_f = u(x^1) \exp[i\tilde{\Phi}(x^1)] [H(x^1, x^3) + h(x^1, x^3)] \exp[i(k_2 x^2 - \omega t)], \quad (3.5.1)$$

где  $\tilde{\Phi}(x^1)$  — большая квазиклассическая фаза,  $u(x^1)$  — функция, описывающая медленное изменение амплитуды колебаний поперек магнит-

ных оболочек,  $H(x^1, x^3)$  — функция, описывающая структуру колебаний в направлении вдоль силовых линий геомагнитного поля в главном порядке теории возмущений,  $h(x^1, x^3)$  — малая поправка к  $H(x^1, x^3)$  в более высоких порядках.

При подстановке этого выражения в (3.4.18) в главном порядке теории возмущений получается уравнение для функции  $H(x^1, x^3)$ :

$$\nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} H + \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_\perp^2 \right) H = 0, \quad (3.5.2)$$

где  $p = \sqrt{g_2/g_1}$ ,  $k_\perp^2 = (k_1^2/g_1 + k_2^2/g_2)$  — квадрат поперечного волнового вектора ( $k_1 = \nabla_1 \tilde{\Phi}$ ). Уравнение (3.5.2) следует дополнить граничными условиями на ионосфере. Как будет показано ниже, ионосфера лежит глубоко внутри области непрозрачности для рассматриваемых магнитозвуковых мод и не играет особой роли в определении их структуры. В связи с этим для простоты будем считать ионосферу идеально проводящей. Это означает, что на ионосфере  $E_1 = E_2 = 0$ , откуда

$$H|_{x^3=x_\pm^3} = 0, \quad (3.5.3)$$

где  $x_\pm^3$  — точки пересечения силовой линии с ионосферой соответственно в северном и южном полушариях. Задачу (3.5.2), (3.5.3) можно рассматривать как задачу на собственные значения квадрата волнового числа  $k_1^2$  при заданной частоте БМЗ-колебаний  $\omega$ . Решением этой задачи является набор собственных функций  $H_n$  (где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер продольной гармоники БМЗ-волн) и соответствующий им набор собственных значений  $k_{1n}^2$ . Набор  $H_n$  является полным, поэтому любое возмущение поля монохроматических БМЗ-колебаний в магнитосфере можно разложить по этим собственным функциям.

Чтобы качественно представить структуру собственных мод, используем ВКБ-приближение по продольной координате  $x^3$ , т.е. запишем решение (3.5.2) в виде

$$H = \exp[i\Theta(x^1, x^3)],$$

где  $\Theta(x^1, x^3) = \Theta_0(x^1, x^3) + \Theta_1(x^1, x^3) + \dots$  — квазиклассическая фаза по продольной координате ( $|\Theta_0| \gg |\Theta_1| \gg \dots$ ). Подставляя это решение в (3.5.2), получим уравнение для фазы:

$$-(\Theta')^2 + i\Theta'' + i\Theta' \left( 2\nabla_3 \ln \frac{g_1}{\sqrt{g}} + \nabla_3 \ln \frac{g_2}{\sqrt{g}} \right) + g_3 \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} + k_3^2 = 0,$$

где обозначено  $k_3^2 = g_3 (\omega^2/v_A^2 - k_\perp^2)$ . В главном порядке теории возмущений имеем  $\Theta'_0 = \pm k_3$ , откуда

$$\Theta_0 = \pm \int_{x_-^3}^{x_+^3} k_3 dx^3.$$

В первом порядке получаем

$$\Theta_1 = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{|k_3|g_1}{g_3\sqrt{g}} \right).$$

Таким образом, общее ВКБ-решение (3.5.2) можно представить в виде

$$H = f[A \exp(i\Theta_0) + B \exp(-i\Theta_0)], \quad (3.5.4)$$

где  $f = \sqrt{g_3\sqrt{g}/|k_3|g_1}$ .

Дальнейшее исследование полученного решения проведем, используя модель среды, представленную в разд. 3.2.1. Как следует из общего вида решения (3.5.4), его поведение определяется функцией  $k_3 = \pm \sqrt{g_3(F(a, \theta) - k_{1n}^2)/g_1}$ , где

$$F(a, \theta) = g_1 \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - \frac{m^2}{g_2} \right).$$

В областях прозрачности, где  $F > k_{1n}^2$ , решение представляет собой периодическую функцию, а в областях непрозрачности, где  $F < k_{1n}^2$ , оно состоит из суммы падающей и растущей экспонент. Таким образом, вид решения определяется поведением функции  $F(a, \theta)$ .

На рис. 3.17 представлена зависимость функции  $F(a, \theta)$  от продольной координаты (угла  $\theta$ ) для четырех различных значений параметра  $m$  на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . Как следует из граничных условий

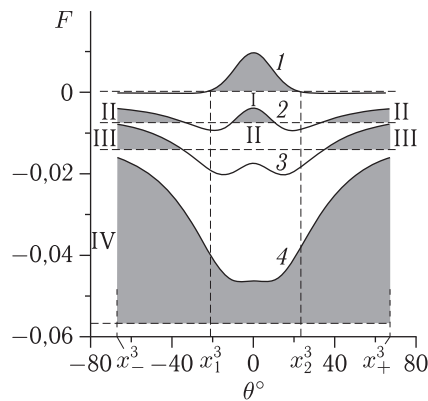


Рис. 3.17. Зависимость функции  $F(L, \theta)$  от геомагнитной широты и азимутального волнового числа  $m$  на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . Кривая 1 соответствует  $m = 1$ , кривая 2 —  $m = 5$ , кривая 3 —  $m = 7$ , кривая 4 —  $m = 10$ . Горизонтальные штриховые линии — возможные собственные значения параметра  $k_{1n}^2$ . Области, где  $F(a, \theta) - k_{1n}^2 > 0$ , пронумерованные как I, II, III, IV (показаны серым цветом), соответствуют четырем типам продольной структуры собственных БМЗ-колебаний



на ионосфере (3.5.3), нетривиальное решение (3.5.2) существует, только если на силовой линии имеется по крайней мере один интервал, где  $F > k_{1n}^2$ . На рис. 3.17 изображены четыре варианта разности  $F - k_{1n}^2$  (I, II, III, IV), отвечающие четырем различным типам решений для собственных мод. Наиболее простым является решение типа IV, для которого  $F > k_{1n}^2$  вдоль всей силовой линии. Решение в этом случае имеет вид

$$H_n = Cf \sin \left( \int_{x_-^3}^{x_+^3} k_3(x^1, x^{3'}) dx^{3'} \right), \quad (3.5.5)$$

где  $C$  — произвольная константа, а собственные значения  $k_{1n}^2$  определяются условием квантования

$$\int_{x_-^3}^{x_+^3} k_3 dx^3 = \pi(n+1),$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — продольное волновое число. Решения типа I имеют вид (см. приложение E)

$$H_n = Cf \begin{cases} \operatorname{sh} \left( \int_{x_-^3}^{x^3} |k'_3| dx^{3'} \right), & x_-^3 \leq x^3 < x_1^3, \\ e^{\bar{\psi}} \sin \left( \int_{x_1^3}^{x^3} k'_3 dx^{3'} + \frac{\pi}{4} \right), & x_1^3 < x^3 < x_2^3, \\ \mp \operatorname{sh} \left( \int_{x_2^3}^{x^3} |k'_3| dx^{3'} - \bar{\psi} \right), & x_2^3 < x^3 \leq x_+^3, \end{cases} \quad (3.5.6)$$

где два разных знака  $\mp$  соответствуют четным и нечетным  $n$  в условии квантования

$$\int_{x_1^3}^{x_2^3} k_3 dx^3 = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

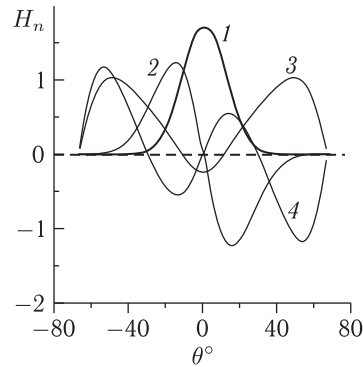


Рис. 3.18. Продольная структура первых четырех гармоник ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) собственных БМЗ-мод дипольноподобной магнитосферы на магнитной оболочке  $L = 6,6$

Координаты  $x_1^3, x_2^3$  являются точками поворота, в которых  $k_{1n}^2 = F(x^1, x_{1,2}^3)$ . Кроме того, введено обозначение для интегральной фазы:

$$\bar{\psi} = \int_{x_-^3}^{x_1^3} |k_3| dx^3 = \int_{x_2^3}^{x_+^3} |k_3| dx^3.$$

Выражения для ВКБ-решений типа II и III более громоздки и мы их здесь не выписываем, хотя их качественное поведение достаточно очевидно из двух приведенных выше примеров. Отметим только, что если на силовой линии имеется больше одной области прозрачности, где  $F > k_{1n}^2$ , спектр собственных значений  $k_{1n}^2$  (и соответствующих им собственных функций  $H_n$ ) расщепляется.

Для более точного определения структуры основных гармоник БМЗ-колебаний, проинтегрируем уравнение (3.5.2) численно. На рис. 3.19 представлена структура четырех первых гармоник  $H_n(L, \theta)$  на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . Они нормированы следующим образом:

$$\oint H_n^2 dx^3 \equiv 2 \int_{x_-^3}^{x_+^3} H_n^2 dx^3 = 1.$$

В этих расчетах использованы следующие величины параметров волны:  $m = 1$ ,  $f = \omega/2\pi = 0,025$  Гц — частота, равная частоте второй гармоники собственных альфвеновских колебаний ( $\Omega_{T2}$ ) в рассматриваемой модели магнитосферы на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . На этом

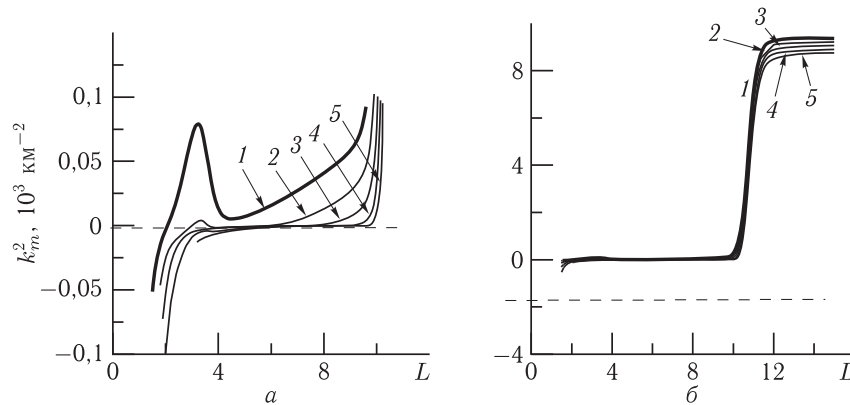


Рис. 3.19. Зависимость квадрата квазиклассического волнового вектора  $k_{1n}^2$  первых пяти гармоник собственных мод ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), от параметра магнитной оболочки  $L$ : *a* — распределение  $k_{1n}^2(L)$  внутри магнитосферы, *б* — распределение  $k_{1n}^2(L)$  в диапазоне магнитных оболочек  $1,5 < L < 15$ , включающем область солнечного ветра

и последующих рисунках жирной линией выделены функции, соответствующие собственной моде ( $n = 0$ ,  $m = 1$ ,  $f = f_2 = \Omega_{T2} = 0,025$  Гц), которую мы выберем в качестве эталонной для сравнения с другими модами БМЗ-колебаний. Гармоники  $H_1$ ,  $H_2$  представляют собой решения уравнения (3.5.2) вида (3.5.6) (тип I на рис. 3.17), т.е. являются периодическими функциями вблизи экваториальной плоскости и экспоненциально убывают по амплитуде при приближении к ионосфере. Гармоники  $H_3$ ,  $H_4$  представляют собой решения вида (3.5.5) (тип IV на рис. 3.17), имеющие вид периодических функций вдоль всей силовой линии.

На рис. 3.19 представлены зависимости собственных значений  $k_{1n}^2$  от параметра магнитной оболочки  $L$  для пяти первых гармоник собственных БМЗ-мод ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ). На рис. 3.19, б представлена зависимость  $k_{1n}^2(L)$  во всем диапазоне рассматриваемых магнитных оболочек ( $1,5 \leq L \leq 15$ ), а на рис. 3.19, а — зависимость  $k_{1n}^2(L)$  внутри магнитосферы ( $1,5 \leq L \leq 10$ ). Видно, что для эталонной гармоники  $k_{10}^2 > 0$  при  $L > 2,2$ , а при  $L < 2,2$  —  $k_{10}^2 < 0$ . Для второй гармоники неравенство  $k_{11}^2 > 0$  выполняется во внешней магнитосфере при  $L > 6,1$ , а также в области  $3,1 < L < 3,6$  под плазмопаузой. Для гармоник  $n = 2, 3, 4$  неравенство  $k_{1n}^2 > 0$  выполняется только во внешней магнитосфере.

Определим область прозрачности для рассматриваемых магнитозвуковых мод требованием одновременного выполнения трех неравенств:  $k_{1n}^2 > 0$ ,  $k_2^2 > 0$ ,  $k_{3n}^2 > 0$ . Это означает, что в рассматриваемой области магнитозвуковая волна может свободно распространяться в любом направлении. На рис. 3.20 представлены границы областей прозрачности для рассмотренных выше четырех гармоник БМЗ-мод. Граница эталонной моды наиболее близка к ионосфере и односвязана. Эта мода сильно локализована вблизи экваториальной плоскости. Для второй моды ( $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $f = f_2$ ) внутренняя граница области прозрачности расположена дальше от ионосферы, а сама эта область состоит из двух не связанных областей: внешней — при  $L > 6,1$  и внутренней — при  $3,1 < L < 3,6$ . Вторая область прозрачности представляет собой резонатор для БМЗ-колебаний, описанный впервые в работах [193, 194].

Для гармоник  $n = 2, 3, 4$  внутренние границы областей прозрачности приближаются к магнитопаузе. Все моды колебаний имеют вблизи экваториальной плоскости узкий канал выхода из магнитосферы в солнечный ветер. Это дает возможность проникновения БМЗ-колебаний из солнечного ветра внутрь магнитосферы. Источником таких колебаний может служить, например, неустойчивость протонов солнечного ветра, отраженных от фронта головной ударной волны [248, 249]. Отметим, что форма областей прозрачности в солнечном ветре может существенно отличаться от полученной в настоящей работе из-за движения плазмы и отличия конфигурации магнитного поля от дипольной. Однако можно надеяться, что это отличие не слишком велико на небольшом удалении от магнитопаузы, поскольку здесь вблизи экватора расположена точка застоя, где скорость солнечного ветра

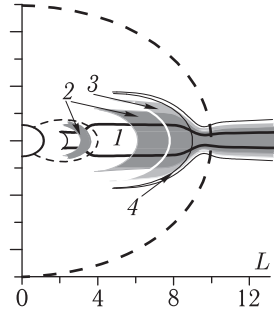


Рис. 3.20. Границы областей прозрачности (в меридиональной плоскости) для первых четырех продольных гармоник БМЗ-колебаний ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) в дипольноподобной модели магнитосферы при частоте  $\omega = 2\pi f_2$  и азимутальном волновом числе  $m = 1$

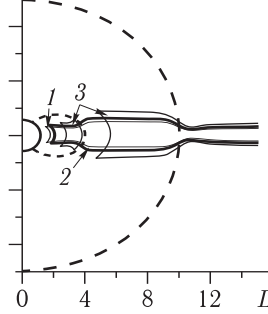


Рис. 3.21. Границы областей прозрачности для гармоники БМЗ-колебаний ( $n = 0, m = 1$ ) при различных значениях частоты:  $f = f_1$  (1),  $f_2$  (2),  $f_3$  (3)

$v_{sw} = 0$ . Размер областей прозрачности в магнитосфере уменьшается с увеличением  $n$ .

На рис. 3.21 представлены границы областей прозрачности моды ( $n = 0, m = 1$ ) для различных значений частоты  $f = f_1 = f_2/2$ ;  $f = f_2$ ;  $f = f_3 = 3f_2/2$ . Расстояние от экватора боковых границ для этих трех частот близки между собой, а внутренняя граница приближается к магнитопаузе с увеличением частоты  $f$ . Отметим, что для частоты  $f = f_3$  область прозрачности состоит из двух несвязанных частей — внутренней, образующей резонатор под плазмопаузой, и внешней — открытой в солнечный ветер. Аналогично ведут себя границы областей прозрачности при фиксированной частоте, но с меняющимся азимутальным волновым числом  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Боковые границы первых азимутальных гармоник практически совпадают, а внутренняя граница приближается к магнитопаузе с увеличением  $m$ .

**3.5.2. Структура БМЗ-колебаний дипольноподобной магнитосферы поперек магнитных оболочек.** В первом порядке теории возмущений из (3.4.18) получается следующее уравнение на функцию  $u(x^1)$ , описывающую медленное изменение амплитуды колебаний поперек магнитных оболочек (см. (3.5.1)):

$$\sqrt{g_3} u_n \hat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} h_n - k_{\perp n}^2 u_n h_n + i \left[ \frac{k_{1n}}{g_1} \nabla_1 u_n H_n + \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} k_{1n} u_n H_n \right] = 0.$$

Умножая это уравнение слева на  $g_1 u_n H_n / \sqrt{g}$  и интегрируя вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами «туда и обратно», получим

$$\oint \nabla_1 \left( \frac{g_2}{\sqrt{g}} k_{1n} u_n^2 H_n^2 \right) \frac{dx^3}{g_2} = 0. \quad (3.5.7)$$

Здесь учтено, что интеграл от слагаемых, пропорциональных  $h_n$ , обращается в нуль из-за эрмитовости оператора  $\hat{L}_T$ . Уравнение (3.5.7) можно переписать в виде

$$a_{1n} \nabla_1 (k_{1n} u_n^2) = a_{2n} k_{1n} u_n^2, \quad (3.5.8)$$

где

$$a_{1n} = \oint \frac{H_n^2}{\sqrt{g}} dx^3, \quad a_{2n} = \oint \nabla_1 \left( \frac{g_2 H_n^2}{\sqrt{g}} \right) \frac{dx^3}{g_2}.$$

Нормируя функцию  $H_n$  так, что  $a_{1n} = 1$ , и обозначая  $\tilde{k}_{1n} \equiv a_{2n}(x^1)/2$ , запишем решение (3.5.8) в виде

$$u_n(x^1) = \frac{C}{\sqrt{|k_{1n}|}} \exp \left( - \int \tilde{k}_{1n} dx^1 \right),$$

где  $C$  — произвольная константа. Таким образом, общее решение уравнения (3.4.18) можно представить как

$$\psi_f = \frac{C}{\sqrt{|k_{1n}|}} \exp \left( i \int (k_{1n} + i\tilde{k}_{1n}) dx^1 + ik_2 x^2 - i\omega t \right) H_n(x^1, x^3). \quad (3.5.9)$$

Конкретный вид этого решения зависит от граничных условий по координате  $x^1$ . В разд. 3.4.4 мы рассмотрели задачу о возбуждении в магнитосфере альфвеновских резонансов БМЗ-волной, падающей на магнитосферу из солнечного ветра. Далее мы рассмотрим задачу о собственных БМЗ-колебаниях магнитосферы в резонаторах, образованных неоднородностью распределения альфвеновской скорости.

### 3.6. БМЗ-резонаторы в магнитосфере Земли

Гипотеза о том, что магнитосфера Земли может играть роль резонатора для БМЗ-волн, возникла довольно давно [196, 197, 250]. Собственные моды такого резонатора, названные в работе [196] глобальными (Global modes), должны представлять собой самые крупномасштабные, а следовательно, и самые низкочастотные геомагнитные колебания, охватывающие всю магнитосферу. Околосферная часть магнитосферы, как мы видели в предшествующих разделах, для таких колебаний недоступна (является областью непрозрачности). Однако колебания такого резонатора могут передаваться на Землю резонансными альфвеновскими волнами, возбуждаемыми на силовых линиях, проходящих через область резонатора. Особенностью таких колебаний является независимость их частоты от точки регистрации на поверхности Земли.

И такие сверхнизкочастотные колебания с дискретным спектром действительно были обнаружены по наблюдениям как на ВЧ-радарх [251, 252], так и на сетях наземных магнитометров [253, 254]. В спектрах этих колебаний имеются ярко выраженные максимумы на частотах 1,3, 1,9, 2,6, 3,4, ... мГц. Эти частоты почти не изменяются

как от события к событию, так и внутри одного события. В связи с этим они были названы «магическими частотами». Такие колебания, как правило, регистрируются на Земле в полуденно-утреннем секторе на широтах от  $60^\circ$  до  $80^\circ$ .

Однако рассматривать эти наблюдения как подтверждение теории глобального магнитосферного БМЗ-резонатора, как оказалось, несколько преждевременно. Критический анализ, представленный в следующем разделе, показывает, что имеющиеся варианты теории не только не описывают основные характеристики наблюдаемых колебаний, но даже не дают приемлемого объяснения самой возможности существования магнитосферного резонатора.

**3.6.1. Качественное обоснование существования БМЗ-резонаторов в магнитосфере.** Если БМЗ-волна локализована в прямоугольном однородном резонаторе с отражающими стенками со сторонами  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  (см. рис. 3.22), то компоненты ее волнового вектора квантуются:

$$k_x = \frac{\pi n_x}{l_x}; \quad k_y = \frac{\pi n_y}{l_y}; \quad k_z = \frac{\pi n_z}{l_z}, \quad (3.6.1)$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  — волновые числа, которые могут принимать значения из натурального ряда. По порядку величины частота основного тона резонатора

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \sim \frac{v_A}{l}, \quad (3.6.2)$$

где  $l$  — минимальный из размеров резонаторного ящика. Приближенная формула (3.6.2) остается верной и для резонаторов произвольной формы с неоднородными плазмой и магнитным полем. При этом под  $v_A$  следует понимать характерное значение скорости Альфвена, а под  $l$  — наименьший из трех его взаимно перпендикулярных размеров. Можно уточнить, что  $l$  — это минимальное расстояние между параллельными плоскостями, между которыми помещается резонатор.

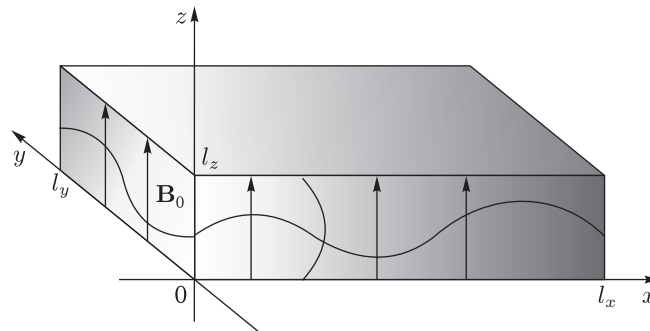


Рис. 3.22. Модель резонатора для БМЗ-волн в виде прямоугольного ящика с идеально отражающими стенками («box model»)

Для естественных резонаторов, в том числе магнитосферных, роль отражающих стенок играет неоднородность среды. Можно выделить два существенно различных случая. В первом случае отражение происходит от точек (точнее, от поверхностей) поворота волны. Это понятие строго определено, если применимо приближение ВКБ. Пусть рассмотренный выше резонатор неоднороден по одной из координат, скажем по  $x$ , и неоднородность такова, что применимо приближение ВКБ. Тогда можно найти квазиклассический волновой вектор для БМЗ-волны:

$$k_x^2(x) = \frac{\omega^2}{v_A^2(x)} - k_y^2 - k_z^2. \quad (3.6.3)$$

Здесь предполагается, что  $\omega$ ,  $k_y$  и  $k_z$  фиксированы, а скорость Альфвена зависит от  $x$ . Волна распространяется в области прозрачности, где  $k_x^2 > 0$ , и не может распространяться в области непрозрачности, где  $k_x^2 < 0$ . Легко видеть, что в области прозрачности скорость Альфвена имеет меньшие значения, чем в области непрозрачности. Поверхности, на которых  $k_x^2 = 0$ , играют роль отражающих стенок. В зависимости от широты и высоты потенциального барьера, образуемого областью непрозрачности, отражение может быть частичным или полным. Резонатор возникает, если область прозрачности по координате  $x$  ограничена точками поворота. В трехмерном случае существование резонатора возможно, если область прозрачности, расположенная в районе относительно малых значений скорости Альфвена, со всех сторон ограничена поверхностью поворота.

Второй вариант отражающих стенок резонатора — резкие границы, разделяющие скачкообразные изменения параметров среды (в нашем случае — скорости Альфвена). На такой границе приближение ВКБ неприменимо. Волна испытывает частичное отражение (тем большее, чем больше скачок скорости Альфвена), даже если граница разделяет две области прозрачности. Два рассмотренных выше варианта резонатора с разными типами отражающих стенок не исключают друг друга. Вполне возможна ситуация, когда одна часть границ резонатора — поверхности поворота, а другая часть — резкие границы раздела.

Перейдем теперь от общих замечаний к рассмотрению различных вариантов теории магнитосферного резонатора. Во всех этих вариантах внешней границей резонатора является резкая граница магнитосферы — магнитопауза [183, 191, 196], в некоторых вариантах — фронт головной ударной волны [252]. Под магнитопаузой имеется область прозрачности для БМЗ-волн, которая образует для них резонатор. Солнечный ветер, где скорость Альфвена существенно меньше, также является областью прозрачности для такой волны. Поэтому магнитопауза не может быть обычной поверхностью отражения, но способна играть роль частично отражающей границы из-за имеющегося на ней резкого скачка скорости Альфвена.

В настоящее время имеются теоретические работы, в которых проведены расчеты структуры и спектра «глобальных мод» (Global modes) в различных моделях магнитосферы. В работах [196, 197] это сделано для модели магнитосферы в виде box model, в работе [176] — в модели в виде полуцилиндра, а в работах [184, 191, 255] — в рамках аксиально-симметричной модели с дипольным геомагнитным полем. Во всех этих моделях собственные моды БМЗ-резонатора заключены между магнитопаузой и поверхностью поворота, отделяющей область прозрачности во внешней магнитосфере от области непрозрачности во внутренней магнитосфере. Наличие области непрозрачности обусловлено значительным возрастанием скорости Альфвена при приближении к Земле.

Как мы увидим из представленных ниже расчетов, собственные частоты таких мод ( $f > 5$  мГц) оказались гораздо выше наблюдаемых ( $\sim 1$  мГц). Этот результат можно ожидать даже из простой оценки. Характерные для магнитосферы значения  $v_A \sim 10^3$  км/с,  $l \sim 10^5$  км, что дает  $f \sim 10$  мГц. Конечно, результат точного расчета может отличаться от оценки в 2–3 раза, но вряд ли на целый порядок величины. Значение  $f > 5$  мГц, полученное в упомянутых выше работах, подтверждает это.

Но трудности со значениями собственных частот можно считать второстепенными по сравнению со следующим принципиально важным обстоятельством. Наличие магнитосферного хвоста ставит под вопрос всю концепцию глобального магнитосферного резонатора. Как представляется, рассмотренная выше БМЗ-волна может свободно убежать в открытый геомагнитный хвост. По этой причине в работах [71, 198, 252] предложена трактовка наблюдаемых сверхнизкочастотных колебаний с дискретным спектром как собственных мод волновода в геомагнитном хвосте. Однако вряд ли и эту трактовку можно признать успешной. В ее рамках очень трудно объяснить дискретность спектра колебаний. Авторы используют модель волновода в виде прямоугольного канала, обозначая поперечные координаты  $y$  и  $z$ , а координату вдоль канала, уходящую вдоль волновода в геомагнитный хвост —  $x$ . Квантование  $k_y$  и  $k_z$  следует из геометрических соображений, но компонента  $k_x$  может принимать непрерывный ряд значений, а с ней и частота  $\omega$ . Предположение авторов, что наблюдаемые колебания соответствуют значениям  $k_x \ll k_y, k_z$  (в этом случае при определении собственной частоты конкретное значение  $k_x$  несущественно), никак не аргументировано. Совершенно непонятно, почему механизм возбуждения волновода, генерируя волну с  $k_y, k_z \sim 1/l$  ( $l$  — поперечный масштаб магнитосферы), не может возбуждать волну с  $k_x \sim 1/l$ , а только с  $k_x \ll 1/l$ . Учитывая, что по координате  $x$  имеется неоднородность примерно с тем же масштабом  $l$ , предположение о существовании волны с  $k_x \ll 1/l$  вообще неправомерно. Длина волны не может быть много больше масштаба неоднородности, поскольку размер ее источника при этом много больше размеров самой плазменной конфигурации, и такое колебание не может быть собственным.



В дальней части хвоста, где масштаб неоднородности вдоль хвоста много больше поперечного, возможны волны с  $k_x \ll k_y, k_z$ . Но и в этом случае остается вопрос, связанный с механизмом возбуждения колебаний. Кроме того, усугубляется трудность по согласованию теоретических значений собственных частот колебаний с наблюдаемыми. При характерном поперечном масштабе волновода  $l \sim (1 - 3) \cdot 10^5$  км скорость Альфвена в долях хвоста  $v_A \sim (3 - 10) \cdot 10^3$  км/с, что дает для основной гармоники частоту  $f \approx 30$  мГц, слишком далекую от частот наблюдаемых колебаний. Наконец, имеется возможность существования БМЗ-волновода в нейтральном плазменном слое [256]. Для этого волновода сохраняются те же трудности. В частности, для частоты основной гармоники при  $l \sim 10^4$  км,  $v_A \sim 10^2$  км/с имеем  $f \sim 10$  мГц.

Таким образом, следует признать, что к настоящему времени концепция магнитосферных «глобальных мод» находится в неудовлетворительном состоянии. Неизвестна область локализации собственных мод, причины их запираания внутри магнитосферы и их пространственная структура. Слишком велико различие между теоретическими и наблюдаемыми значениями собственных частот колебаний.

Как было указано выше, БМЗ-резонаторы и волноводы располагаются в областях минимума в распределении альфвеновской скорости  $v_A$  (точнее, скорости распространения БМЗ-волн  $c_f = \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$ ). В большей части магнитосферы  $\beta^* = v_s^2/v_A^2 \ll 1$  и  $c_f \approx v_A$ . В отдельных областях величина  $\beta^*$  может принимать значения  $\beta^* \sim 1$ , но и в этом случае  $c_f \sim v_A$ . Имеется только одна область в магнитосфере, где  $\beta^* \gg 1$ , — это тонкая приэкваториальная часть плазменного слоя, которая не играет существенной роли для крупномасштабных БМЗ-колебаний магнитосферы. Таким образом, определяющую роль для исследования БМЗ-резонаторов и волноводов играет глобальное распределение в магнитосфере скорости Альфвена. Не менее важное значение это распределение имеет и для стоячих альфвеновских волн. Их продольная структура определяется распределением скорости Альфвена вдоль силовой линии, а поперечная — некоторыми интегральными (вдоль силовой линии) характеристиками, также связанными с ее распределением.

На рис. 3.23 схематически представлено глобальное распределение скорости Альфвена в магнитосфере. В этом распределении находят отражение основные структурные элементы магнитосферы: магнитопауза, каспы, плазмосфера, доли геомагнитного хвоста и плазменный слой. При построении распределения, представленного на рис. 3.23, использованы характерные значения параметров магнитного поля и плазмы, представленные в работах [111, 112].

Для описания распределения концентрации плазмы и магнитного поля в диапазоне  $-10R_E > z > -80R_E$  использовались следующие эмпирические зависимости:  $B_0 \approx 3,5(20/z)^{1,95}$  нТл,  $n_0 \approx (10/z)^{1,3}$  см<sup>-3</sup> — в плазменном слое и  $B_0 \approx 75/\sqrt{z}$  нТл,  $n_0 \approx (10/z)^{2,6}$  см<sup>-3</sup> — в долях

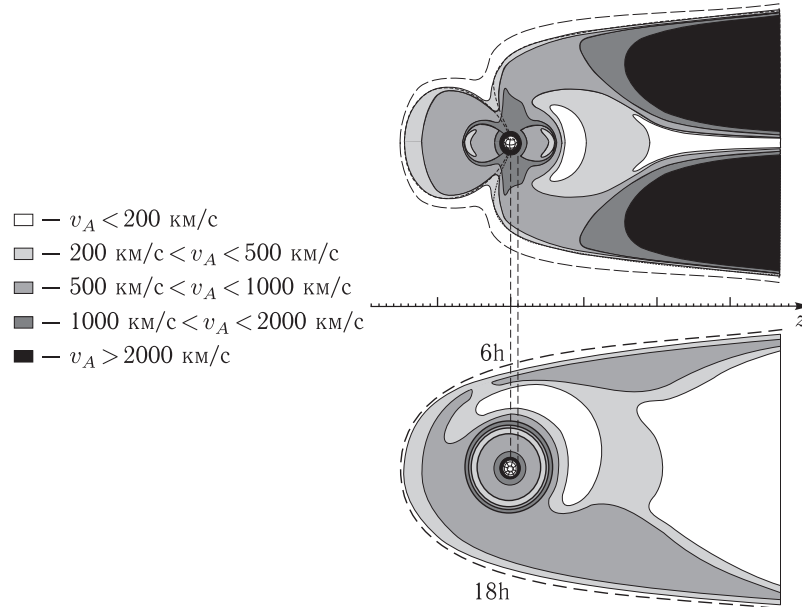


Рис. 3.23. Глобальное распределение скорости Альфвена в магнитосфере Земли

геомагнитного хвоста, где  $z$  выражено в единицах радиуса Земли. В этом случае для альфвеновской скорости имеем  $v_A$  (км/с)  $\approx 2,18B_0$  (нТл)/ $\sqrt{n_0(\text{см})^{-3}}$ . Максимальная величина альфвеновской скорости  $\sim 5000$  км/с достигается в долях геомагнитного хвоста. Вне магнитосферы альфвеновская скорость стремится к значениям  $\sim 50\text{--}100$  км/с, типичным для солнечного ветра.

Альфвеновская скорость в плазменном слое более чем на порядок меньше ее величины в долях хвоста. Используя данные, представленные в [112], мы можем оценить величину  $v_A$  в ближнем плазменном слое на разных удалениях от Земли:  $v_A \approx 240$  км/с на расстоянии  $z = -10R_E$ ,  $v_A \approx 70$  км/с при  $z = -15R_E$  и  $v_A \approx 200$  км/с при  $z = -25R_E$ . Таким образом, можно принять следующее типичное для ближнего плазменного слоя значение  $v_A \approx 200$  км/с.

Как видно из рис. 3.23, минимумы в распределении  $v_A$  имеются во внешней части дневной магнитосферы и внутри плазмосферы. Именно здесь локализованы указанные выше магнитосферные резонаторы для БМЗ-волн. Однако самый крупномасштабный и глубокий минимум скорости Альфвена находится в ближней к Земле части плазменного слоя (далее: NEPS — near-Earth part of the plasma sheet). Сравнительно малое значение напряженности геомагнитного поля и высокая плотность плазмы обеспечивает в этой области минимальное для всей магнитосферы значение скорости Альфвена  $v_{A0} \sim 100$  км/с. Характер-

ный размер этой области  $L_0 \sim 10^5$  км. Из соображений размерности для частоты основной моды возможного резонатора получаем оценку  $f_0 = \omega_0/2\pi \sim v_{A0}/L_0 \sim 1$  мГц.

Многочисленное (в несколько десятков раз) увеличение  $v_A$  при удалении от ближнего плазменного слоя к Земле и в доли геомагнитного хвоста обеспечивает надежное запираание БМЗ-волны в этих направлениях. В направлении к магнитопаузе увеличение  $v_A$  гораздо меньше (в 2–5 раз), что может оказаться недостаточным для существования поверхности поворота. В этом случае отражение БМЗ-волны обеспечивается скачком скорости Альфвена на магнитопаузе, ограничивающей этот резонатор с флангов магнитосферы. Остается вопрос о возможности утекания БМЗ-волн из ближнего плазменного слоя в его плоскую и тонкую дальнюю часть толщиной  $a_0 \sim 10^4$  км, где  $v_A$  того же порядка, что и в ближней части (рис. 3.24). Простые соображения показывают, что такое утекание невозможно. Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$  так, чтобы координата  $z$  была направлена от Земли в геомагнитный хвост, а координата  $x$  — поперек плазменного слоя. Для БМЗ-волны внутри дальней части плазменного слоя имеем  $k_x \sim \pi/a_0$ ,  $k_y \sim \pi/L$ , где  $a_0$  — характерная толщина плазменного слоя,  $L$  — характерный размер магнитосферы по оси  $y$ . Учитывая, что в этой области  $v_A \sim v_{A0}$  и  $a_0 \ll L_0, L$ , имеем

$$k_z^2 = \omega_0^2/v_A^2 - k_x^2 - k_y^2 \sim -\pi^2/a_0^2,$$

т. е. дальняя часть плазменного слоя является областью непрозрачности для мод с частотой  $\sim \omega_0$ .

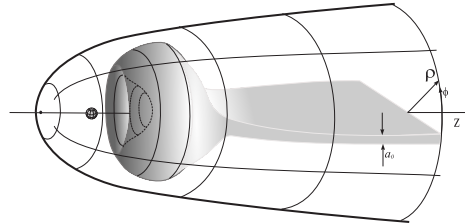


Рис. 3.24. Аксиально-симметричная модель магнитосферы с плазменным слоем

Таким образом, ближняя часть плазменного слоя может служить резонатором для БМЗ-волн, поскольку со всех сторон окружена границей, отражающей эти волны. Характерная частота собственных мод такого резонатора  $f \sim 1$  мГц, что соответствует наблюдаемым в магнитосфере колебаниям. На Земле моды БМЗ-резонатора должны проявляться посредством стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых механизмом альфвеновского резонанса (field line resonance). Силовые линии, проходящие через ближнюю часть плазменного слоя, пересекают земную поверхность на широтах от  $60^\circ$  до  $80^\circ$ , что находится в согласии с широтной локализацией наблюдаемых колебаний. Можно

объяснить и некоторую асимметрию их долготной локализации. Как известно, конвективное течение магнитосферной плазмы (с ночной стороны через утренний сектор на дневную сторону) сдвигает ближнюю часть плазменного слоя из симметричного полуночного положения в утренний сектор [112]. В результате резонатор для низкочастотных БМЗ-колебаний оказывается сдвинутым в этот же сектор в полном согласии с наблюдениями.

Далее мы исследуем структуру и спектры собственных мод каждого из указанных выше магнитосферных БМЗ-резонаторов.

**3.6.2. БМЗ-резонаторы в дневной магнитосфере.** Рассмотрим задачу о падении магнитозвуковой волны на магнитосферу из солнечного ветра ( $x^1 > x_{mp}^1$ , где  $x_{mp}^1$  — радиальная координата магнитопаузы) в модели с дипольноподобным магнитным полем. Напомним, что в нашей модели мы не учитываем движение плазмы солнечного ветра, что может несколько изменить полученный результат. Однако, поскольку области прозрачности рассматриваемых собственных мод локализованы вблизи экваториальной плоскости, где в дневном секторе магнитосферы имеется точка застоя солнечного ветра, можно надеяться, что эти изменения не будут слишком большими. Вне магнитосферы решение (3.5.9) можно представить в виде

$$\psi_{fn} = \bar{\psi}_{fn} H_n(x^1, x^3) \exp(im\phi - i\omega t),$$

где  $m$  — азимутальное волновое число,  $\phi$  — азимутальный угол,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{fn} = k_{1n}^{-1/2} \exp\left(-\int \tilde{k}_{1n} dx^1\right) \times \\ \times \left[ C_{in} \exp\left(-i \int k_{1n} dx^1\right) + C_{rn} \exp\left(i \int k_{1n} dx^1\right) \right], \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

где  $C_{in}$ ,  $C_{rn}$  — соответственно амплитуды падающей и отраженной волн. Как показано в разд. 3.5.1, внутри магнитосферы для каждой монохроматической БМЗ-волны имеется магнитная оболочка ( $x^1 = x_n^1$ ), которая разделяет области прозрачности ( $x^1 > x_n^1$ ) и непрозрачности ( $x^1 < x_n^1$ ) колебаний с фиксированными волновыми числами: продольным —  $n$  и азимутальным —  $m$ .

Представим решение в области непрозрачности в виде

$$\bar{\psi}_{fn} = \frac{C}{\sqrt{|k_{1n}|}} \exp\left(\int_{x_n^1}^{x^1} (|k_{1n}| - \tilde{k}_{1n}) dx^{1'}\right), \quad x^1 < x_n^1.$$

Используя для сшивки ВКБ-решений, полученных с разных сторон от точки поворота, метод Свана (см. [65]), обойдем точку поворота

$x^1 = x_n^1$  в плоскости комплексного  $x^1$  и получим в области прозрачности решение вида

$$\bar{\psi}_{Fn} = \frac{C}{\sqrt{|k_{1n}|}} \exp\left(\int_{x_n^1}^{x^1} \tilde{k}_{1n} dx^{1'}\right) \sin\left(\int_{x_n^1}^{x^1} k_{1n} dx^{1'} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x^1 > x_n^1. \quad (3.6.5)$$

Сшивая логарифмические производные решений (3.6.4) и (3.6.5) на магнитопаузе ( $x^1 = x_{mp}^1$ ), получим

$$k_{1n}^- \operatorname{ctg}\left(\int_{x_n^1}^{x_{mp}^1} k_{1n} dx^1 - \frac{\pi}{4}\right) = k_{1n}^+ \frac{C_{in} - C_{rn}}{C_{in} + C_{rn}}, \quad (3.6.6)$$

где  $k_{1n}^\pm \equiv k_{1n}(x_\pm^1)$  — значения поперечного волнового числа вблизи магнитопаузы, соответственно внутри и вне магнитосферы ( $x_\pm^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_{mp}^1 \pm \varepsilon)$ ). В данной задаче магнитопауза представляется в виде тангенциального разрыва, на котором происходит скачок альфвеновской скорости от ее значения в магнитосфере до величин, характерных для солнечного ветра.

Если определить коэффициент отражения как  $R_n = C_{rn}/C_{in}$ , то для него из (3.6.6) получим

$$R_n = - \frac{1 - i(k_{1n}^-/k_{1n}^+) \operatorname{ctg}\left(\int_{x_n^1}^{x_{mp}^1} k_{1n} dx^1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + i(k_{1n}^-/k_{1n}^+) \operatorname{ctg}\left(\int_{x_n^1}^{x_{mp}^1} k_{1n} dx^1 - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (3.6.7)$$

Если частота падающей волны совпадает с одной из собственных частот резонатора, то введенный таким образом коэффициент отражения обращается в бесконечность из-за равенства нулю знаменателя этого выражения. Это следует рассматривать как наличие решений (3.4.18), удовлетворяющих рассматриваемым граничным условиям (ограниченности амплитуды колебаний во всей области их существования) при отсутствии падающей на магнитосферу БМЗ-волны ( $C_{in} = 0, C_{rn} \neq 0$ ). Используя аналогию с квантовой механикой, можно сказать, что искомые решения описывают уровни энергии (в нашем случае — частоты колебаний) в «потенциальной яме», образованной неоднородностью в распределении альфвеновской скорости. Приравнивая к нулю

знаменатель (3.6.7), получим следующее условие квантования:

$$\int_{x_n^1}^{x_{mp}^1} k_{1n} dx^1 = \pi(j + \frac{1}{4}) - \frac{i}{2} \ln \frac{k_{1n}^+ + k_{1n}^-}{k_{1n}^+ - k_{1n}^-}, \quad (3.6.8)$$

определяющее поперечное волновое число в ВКБ-приближении, где  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку  $k_{1n} \equiv k_{1n}(\omega)$ , из (3.6.8) можно найти частоты собственных колебаний магнитосферного резонатора  $\omega_{mnj}$ , которые определяются тремя волновыми числами: азимутальным —  $m$ , продольным —  $n$  и поперечным —  $j$ . Основные гармоники именно этих собственных БМЗ-колебаний ( $n \sim m \sim j \sim 1$ ) следует считать «глобальными модами» рассматриваемой дипольноподобной модели магнитосферы.

Поскольку  $C_{rn} \neq 0$ , магнитосфера не является идеальным резонатором: часть энергии этих собственных колебаний утекает в солнечный ветер. Из вида уравнения (3.6.8) следует, что собственные частоты комплекснозначны:  $\omega_{mnj} = \text{Re}(\omega_{mnj}) + i\text{Im}(\omega_{mnj})$ , где  $\text{Re}(\omega_{mnj})$  — реальная часть частоты, а  $\text{Im}(\omega_{mnj})$  — декремент затухания, связанный с утечкой части энергии собственных мод колебаний в солнечный ветер. Если скачок параметров на магнитопаузе очень большой ( $k_{1n}^+ \gg k_{1n}^-$ ), то логарифм в (3.6.8) обращается в нуль и магнитосфера становится идеальным резонатором ( $\text{Im}(\omega_{mnj}) = 0$ ).

Решим численно уравнение (3.6.8) относительно собственных частот  $\omega_{mnj}$ , используя модель дневной магнитосферы, описанную в разд. 3.2.1. В табл. 3.1 приведены собственные частоты БМЗ-резонатора во внешней части дневной магнитосферы для первых трех значений волновых чисел:  $m, n, j = 0, 1, 2$ . Первое число в скобке показывает реальную часть частоты, а второе (отрицательное) — ее мнимую часть — декремент, связанный с утеканием части энергии собственной моды в солнечный ветер.

Отметим, что добротность рассмотренных колебаний достаточно высока ( $\text{Re}(\omega_{mnj}) \gg |\text{Im}(\omega_{mnj})|$ ). Однако частота наиболее низкочастотных собственных колебаний существенно выше частот сверхнизкочастотных колебаний с дискретным спектром, которые наблюдаются в магнитосфере ( $\omega \sim 10^{-3}$ , рад/с); (см. [71]). Таким образом, наблюдаемые колебания не могут являться собственными колебаниями БМЗ-резонатора во внешней части дневной магнитосферы, и для их объяснения следует искать другие механизмы.

В работах [193, 194] было показано, что в плазмосфере также существует область прозрачности для БМЗ-колебаний, ограниченная поперек магнитных оболочек с двух сторон областями непрозрачности. Это же видно из расчетов конфигурации областей прозрачности, представленных в разд. 3.5.1. Структура собственных мод этого резонатора для различных моделей распределения магнитосферной плазмы была изучена в работах [185, 189, 255]. В разд. 3.5.1 настоящей моно-

Таблица 3.1. Собственные частоты  $\text{Re}\omega_{mnj}$  (рад/с)  $\cdot 10^2$  и декременты затухания  $\text{Im}\omega_{mnj}$  (с $^{-1}$ )  $\cdot 10^2$  нескольких первых гармоник БМЗ-резонатора во внешней части дневной магнитосферы

$j = 0$			
$m \setminus n$	0	1	2
0	(4,6; -0,15)	(9,4; -0,15)	(13,8; -0,14)
1	(5,0; -0,16)	(9,7; -0,16)	(14,0; -0,15)
2	(5,7; -0,17)	(10,2; -0,17)	(14,4; -0,15)
$j = 1$			
$m \setminus n$	0	1	2
0	(9,1; -0,1)	(17,4; -0,14)	(23; -0,15)
1	(10,8; -0,15)	(17,6; -0,15)	(23,1; -0,15)
2	(11,8; -0,16)	(18; -0,16)	(23,4; -0,14)
$j = 2$			
$m \setminus n$	0	1	2
0	(13,3; -0,13)	(23,3; -0,14)	(30,2; -0,16)
1	(13,5; -0,15)	(24,0; -0,15)	(30,3; -0,16)
2	(14,1; -0,18)	(24,6; -0,16)	(30,7; -0,15)

графии исследована структура БМЗ-колебаний вдоль силовых линий магнитного поля в модели дипольноподобной магнитосферы. Исследуем теперь спектр собственных частот этого резонатора.

Обозначим через  $x_{n1}^1$  координату магнитной оболочки (точки поворота), разделяющей область прозрачности резонатора под плазмопаузой и внутреннюю (ближнюю к ионосфере) область непрозрачности, а через  $x_{n2}^1$  — координату оболочки, разделяющей область прозрачности (резонатор) и область непрозрачности во внешней магнитосфере. Решение внутри области прозрачности, удовлетворяющее граничному условию при  $x^1 < x_{n1}^1$ , дается формулой (3.6.5). Аналогичную формулу для решения, удовлетворяющего граничному условию при  $x^1 > x_{n2}^1$ , можно записать, добавив в фазу  $\pi/2$  и заменив в (3.6.5) нижний предел интегрирования на  $x^1$ , а верхний — на  $x_{n2}^1$ . Для собственной моды колебаний оба эти решения должны совпадать, что возможно только при выполнении условия квантования

$$\int_{x_{n1}^1}^{x_{n2}^1} k_{1n} dx^1 = \pi \left( j + \frac{1}{2} \right), \quad (3.6.9)$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Это уравнение определяет собственные частоты резонатора  $\omega_{mnj}$  в нулевом приближении, когда области непрозрачно-

сти, ограничивающие резонатор поперек магнитных оболочек, можно считать бесконечно протяженными.

Однако в условиях реальной магнитосферы это утверждение не вполне верно. Дело в том, что внешняя область непрозрачности, отделяющая резонатор от внешней магнитосферы, представляет собой потенциальный барьер конечной высоты и ширины. Это приводит к частичной утечке колебаний во внешнюю магнитосферу, т. е. собственные частоты такого резонатора также комплекснозначны. Мнимая часть частоты представляет собой декремент затухания колебаний, связанный с просачиванием части их энергии через потенциальный барьер. Величина этого декремента зависит от значений квантовых чисел  $m$ ,  $n$  и  $j$ , определяющих спектр собственных частот  $\omega_{mnj}$ . При больших значениях азимутального волнового числа  $m \gg 1$  этот декремент мал ( $|\text{Im}\omega_{mnj}| \ll \text{Re}\omega_{mnj}$ ). В этом случае потенциальная яма, в которой локализована собственная мода резонатора, глубокая и утечка энергии из нее мала. При  $m \sim 1$  величина декремента становится сравнимой с собственной частотой моды ( $|\text{Im}\omega_{mnj}| \sim \text{Re}\omega_{mnj}$ ), что означает уменьшение глубины потенциальной ямы и увеличение утечки энергии колебаний во внешнюю магнитосферу. Здесь мы ограничимся только исследованием спектра частот собственных колебаний такого резонатора, пренебрегая их затуханием, связанным с просачиванием через потенциальный барьер. Решим численно уравнение (3.6.9) относительно

Таблица 3.2. Собственные частоты  $\text{Re}\omega_{mnj}$ , рад/с, нескольких первых гармоник БМЗ-резонатора под плазмопаузой

$j = 0$				$j = 1$			
$m \setminus n$	0	1	2	$m \setminus n$	0	1	2
0	—	—	0,32	3	—	—	0,473
1	—	0,23	0,327	5	—	0,39	0,5
2	0,136	0,238	0,334	7	0,317	0,42	0,527

$j = 2$			
$m \setminus n$	0	1	2
9	—	—	0,662
11	—	0,586	0,694
13	0,523	0,623	0,728

но собственных частот резонатора. Спектр частот нескольких первых гармоник собственных колебаний представлен в табл. 3.2. Отметим, что не все ячейки этой таблицы заполнены. Это связано с тем, что при фиксированных значениях волновых чисел  $n$  и  $j$  потенциальная яма становится достаточно глубокой для существования в ней собственной



моды только начиная с некоторого значения  $m = \bar{m}_{nj}$ . Так, например, имеем  $\bar{m}_{00} = 2$ ,  $\bar{m}_{10} = 1$ ,  $\bar{m}_{20} = 0$ ... При  $m < \bar{m}_{nj}$  потенциальная яма слишком мелкая и собственная мода с данными  $n$  и  $j$  не может в ней поместиться.

Видно, что рассчитанные частоты собственных мод резонатора попадают в диапазон геомагнитных пульсаций Pc1-2. В ряде работ предполагается, что этот резонатор играет особую роль в генерации суббуриевых геомагнитных пульсаций Pi2 (см. [257–259]).

**3.6.3. БМЗ-резонатор в ближнем плазменном слое.** Рассмотрим теперь собственные колебания БМЗ-резонатора, локализованного в ближнем плазменном слое. Основные структурные элементы магнитосферы, необходимые для этого исследования, представлены на рис. 3.24: магнитопауза и плазменный слой, разделяющий геомагнитный хвост на две доли. В ближней к Земле части плазменный слой существенно расширяется и занимает большую часть магнитосферной полости. Это важная особенность с точки зрения проводимого далее теоретического исследования.

**Модель среды.** Важную роль в проводимом исследовании играет распределение скорости БМЗ-волн  $c_f = \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$ , где  $v_A$  — альфвеновская скорость,  $v_s$  — скорость звука в плазме. Наиболее интересно здесь соотношение между величинами  $v_A$  и  $v_s$ . О распределении альфвеновской скорости в магнитосфере известно достаточно хорошо (см. рис. 3.23). О распределении скорости звука известно значительно меньше. Поскольку  $v_s^2/v_A^2 \approx \beta$ , где  $\beta = 8\pi P_0/B_0^2$  — отношение газинокинетического давления плазмы к магнитному, можно рассмотреть распределение  $\beta$  в магнитосфере.

В большей части магнитосферы  $\beta \ll 1$ . В магнитосфере есть две области с достаточно высокой плотностью плазмы — плазмосфера и плазменный слой. В плазмосфере плазма холодная, а напряженность геомагнитного поля большая, так что здесь  $\beta \ll 1$ . В плазменном слое ситуация совершенно другая. Здесь плазма горячая, а напряженность магнитного поля значительно меньше, чем в плазмосфере, поэтому возможны большие значения  $\beta$ , включая  $\beta \gg 1$  [260]. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Для более ясного понимания ситуации следует выделить две существенно различные части плазменного слоя — ближнюю (NEPS) и дальнюю (distant plasma sheet — DPS). Обе части заполнены плазмой с практически одинаковой плотностью и температурой так, что  $P_{0,NEPS} \sim P_{0,DPS}$ . Плазма переносится системой магнитосферной конвекции из дальней части плазменного слоя в ближнюю, где она, на внутренней кромке плазменного слоя, частично высыпается в ионосферу, вызывая диффузные полярные сияния, авроральные дуги и другие процессы, связанные с геомагнитной активностью. Однако магнитное поле в этих двух частях плазменного слоя существенно различается.

Дальний плазменный слой можно рассматривать как почти плоский слой, в котором магнитное поле меняется от величины  $-B_{0T}$  в одной из долей геомагнитного хвоста до  $B_{0T}$  в другой доле. В центре плазменного слоя напряженность геомагнитного поля уменьшается почти до нуля. Условие равновесия дальнего плазменного слоя имеет вид  $P_{0,DPS} = B_{0T}^2/8\pi$ . Это означает, что давление плазмы в плазменном слое уравновешивается магнитным давлением в долях геомагнитного хвоста. При расчете  $\beta$  вблизи центра плазменного слоя следует иметь в виду, что здесь магнитное поле имеет сравнительно малую вертикальную компоненту  $B_{0n}$ . Наличие этой компоненты приводит к тому, что магнитные силовые линии в плазменном слое замкнуты, хотя и очень вытянуты в геомагнитный хвост. По порядку величины  $B_{0n} \lesssim 0,1B_{0T}$ . Таким образом, в центре дальнего плазменного слоя  $\beta_{DPS} = 8\pi P_{0,DPS}/B_{0n}^2$ , что полностью согласуется с данными [260].

В ближнем плазменном слое напряженность геомагнитного поля достаточно велика, по крайней мере  $B_{0,NEPS} \gtrsim B_{0T}$ . Принимая  $P_{0,NEPS} \sim P_{0,DPS}$ , имеем  $\beta_{NEPS} \lesssim 1$ . Величина  $\beta_{NEPS} \gg 1$  невозможна. Это означает, что в ближнем плазменном слое давление плазмы не уравновешено. Размеры этой части, как и всей магнитосферы, существенно зависят от уровня геомагнитной возмущенности. В спокойных условиях, когда индекс  $K_P = 1-2$ , внутренняя граница ближнего плазменного слоя расположена на удалении примерно  $10 R_E$ , а его внешняя граница на удалении  $20-30 R_E$  от Земли. В возмущенных условиях, при  $K_P \gtrsim 5$ , эти расстояния уменьшаются до  $5 R_E$  и  $10 R_E$  соответственно. Ультранизкочастотные колебания с дискретным спектром наблюдаются только в спокойных геомагнитных условиях при  $K_P < 3$ . Таким образом, мы примем типичное значение размеров ближнего плазменного слоя в этих условиях:  $\sim 15 R_E \approx 10^5$  км. Значение  $\beta_{NEPS} \lesssim 1$  означает, что здесь  $c_f \sim v_A$ . Таким образом, для качественного исследования и оценок по порядку величины мы можем принять здесь приближение «холодной» плазмы.

В плазменном слое плотность плазмы существенно выше, а альфвеновская скорость ниже, чем в долях геомагнитного хвоста. Таким образом, показанные на рис. 3.24 границы плазменного слоя следует понимать как границы, разделяющие области магнитосферы с большой и малой величиной альфвеновской скорости. Такая граница не достигает Земли, при приближении к которой растут как напряженность магнитного поля, так и скорость Альфвена.

**Система координат и основные уравнения.** Будем описывать пространственную структуру монохроматических БМЗ-волн в неоднородной плазме в приближении «холодной» плазмы уравнением

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{v_A^2}\Phi = 0, \quad (3.6.10)$$

где  $\Phi$  — любая из компонент поля колебаний. Это уравнение следует рассматривать как модельное. В различных системах криволинейных координат коэффициенты при производных будут различными. Однако когда характерные пространственные масштабы колебаний значительно меньше, чем масштабы изменения параметров среды (применимо ВКБ-приближение), уравнение (3.6.10) с хорошей точностью описывает БМЗ-колебания в любой ортогональной системе координат. На пределе применимости оно также описывает колебания и с длинами волн порядка масштабов неоднородности среды.

Решение (3.6.10) существенно упрощается, если в рассматриваемой задаче имеется симметрия в каком-либо направлении. Мы интересуемся колебаниями, локализованными в ближнем плазменном слое. Как видно из рис. 3.24, в этой части магнитосферы имеется некоторая аксиальная симметрия (относительно оси  $z$ ). В среднем и дальнем плазменном слое такая симметрия отсутствует. Но для рассматриваемой нами задачи дальний плазменный слой не играет особого значения и его присутствием можно вообще пренебречь. Как доли геомагнитного хвоста, так и дальний плазменный слой являются областями непрозрачности для рассматриваемых нами крупномасштабных БМЗ-волн.

Это позволяет использовать аксиально-симметричную модель магнитосферы для перехода от трехмерно-неоднородной задачи к двумерно-неоднородной, что значительно упрощает исследование. Поскольку магнитосферная полость похожа на параболоид, естественно выбрать для ее описания параболические координаты (см. [261]). Введем в качестве координат два набора взаимно ортогональных параболических поверхностей, которые обозначим как  $\xi$  и  $\eta$ , с фокусом в центре Земли. Эти поверхности получаются вращением образующей параболы вокруг оси  $z$ , проходящей через центры Земли и Солнца (рис. 3.25).

Безразмерные параболические координаты  $\xi$  и  $\eta$  связаны с обычными цилиндрическими координатами (имеющими общую ось  $z$ ) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\xi &= (\sqrt{\rho^2 + z^2} - z)/2\sigma, \\ \eta &= (\sqrt{\rho^2 + z^2} + z)/2\sigma,\end{aligned}$$

где  $\sigma$  — расстояние от фокуса до вершины параболоида  $\xi = 1$ , соответствующего магнитопаузе. Другими словами,  $\sigma$  — это расстояние от центра Земли до подсолнечной точки магнитопаузы. Поскольку мы предполагаем аксиальную симметрию задачи, будем искать решение в виде разложения по азимутальным гармоникам вида  $\Phi(\xi, \eta, \varphi) = \bar{\Phi}(\xi, \eta) \exp(im\varphi)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  — азимутальное волновое число. Уравнение (3.6.10), записанное в параболических координатах  $\xi$  и  $\eta$ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} + \left[ (\xi + \eta) \frac{\omega^2 \sigma^2}{v_A^2(\xi, \eta)} - \frac{m^2}{4} \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \right] \bar{\Phi} = 0. \quad (3.6.11)$$

Легко проверить, что если выбрать распределение альфвеновской скорости в виде

$$v_A^2(\xi, \eta) = \frac{v_{A0}^2}{\sigma} \frac{\xi + \eta}{a(\xi) + b(\eta)},$$

где  $v_{A0}$  — постоянная с размерностью скорости, а  $a(\xi)$  и  $b(\eta)$  — произвольные функции переменных  $\xi$  и  $\eta$ , то уравнение (3.6.11) становится уравнением с разделяющимися переменными.

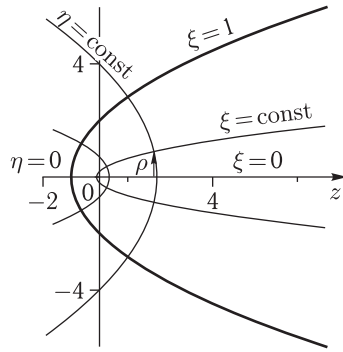


Рис. 3.25. Ортогональная система безразмерных параболических координат  $(\xi, \eta)$  в меридиональном сечении, включающем ось  $z$ . Фокус  $z = 0$  расположен в центре Земли. Поверхность  $\xi = 1$  совпадает с магнитопаузой. Полуоси  $z = (0, \infty)$  и  $z = (0, -\infty)$  соответствуют координатным поверхностям  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$  соответственно

Функции  $a(\xi)$  и  $b(\eta)$  можно выбрать так, чтобы смоделировать основные особенности распределения  $v_A$  в рассматриваемой области магнитосферы. Рассмотрим колебания, локализованные в магнитосфере, пренебрегая их малой утечкой в солнечный ветер через магнитопаузу. Таким образом, при выборе функций  $a(\xi)$  и  $b(\eta)$  мы не будем требовать корректного поведения  $v_A^2(\xi, \eta)$  в области солнечного ветра. Основные особенности распределения  $v_A$  в ближнем плазменном слое и в долях геомагнитного хвоста могут быть смоделированы следующими функциями:

$$a(\xi) = [\alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\xi]\xi, \quad (3.6.12)$$

$$b(\eta) = \begin{cases} [\alpha_0 + (\alpha_2 - \alpha_0)\eta]\eta, & \eta \leq \eta_1, \\ \beta_1[1 - (\eta - \eta_{\min})^2/\Delta_1^2], & \eta_1 < \eta < \eta_2, \\ \beta_2[1 + (\eta - \eta_{\max})^2/\Delta_2^2], & \eta \geq \eta_2, \end{cases} \quad (3.6.13)$$

где  $\eta_{\min}$  — координата, соответствующая локализации минимума альфвеновской скорости в ближнем плазменном слое. Параметры модели (3.6.13) выбраны так, что функция  $b(\eta)$  является непрерывной и гладкой. Точки  $\eta_1$  и  $\eta_2$  можно рассматривать как ближнюю и дальнюю (относительно Земли) границы ближнего плазменного слоя по координате  $\eta$ . Точки поворота рассматриваемых БМЗ-колебаний расположены между этими границами. Максимум альфвеновской скорости, находящийся в средней части геомагнитного хвоста, представляет собой потенциальный барьер, удерживающий низкочастотные колебания в ближнем плазменном слое. Для более высокочастотных колебаний этот максимум не является потенциальным барьером, препятствующим

их убеганию в геомагнитный хвост. Возможно, именно поэтому в магнитосфере не наблюдаются более высокочастотные БМЗ-колебания с дискретным спектром.

Таким образом, если искомую функцию представить в виде  $\bar{\Phi}(\xi, \eta) = \zeta(\xi)\mu(\eta)$ , то решение исходного дифференциального уравнения в частных производных можно свести к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\xi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \left[ \Omega^2 a(\xi) - \frac{m^2}{4\xi} + Q \right] \zeta = 0, \quad (3.6.14)$$

$$\eta \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} + \left[ \Omega^2 b(\eta) - \frac{m^2}{4\eta} - Q \right] \mu = 0. \quad (3.6.15)$$

Здесь  $Q$  — константа разделения, а  $\Omega = \omega\sigma/v_{A0}$  — безразмерная частота. Эти величины являются собственными значениями решаемой задачи.

Для численного расчета спектра собственных частот БМЗ-колебаний, локализованных в ближнем плазменном слое, зададим параметры, определяющие модель альфвеновской скорости (3.6.12), (3.6.13). Выберем следующие значения констант:  $v_{A0} = 750$  км/с,  $\sigma = 10R_E$  ( $R_E = 6370$  км — радиус Земли),  $\alpha_0 = 0,04$ ,  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\eta_{\min} = 1,5$ ,  $\eta_{\max} = 6$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 2,5$ ,  $\eta_1 = 0,6$ , а  $\eta_2$  определяется из условия равенства второго и третьего выражений в (3.6.13) в точке  $\eta = \eta_2$ . Соответствующее двумерное (в меридиональной плоскости) распределение альфвеновской скорости представлено на рис. 3.26. Эта модель достаточно хорошо описывает как распределение  $v_A$  в ближнем плазменном слое, так и ее максимум в средней части геомагнитного хвоста, а также качественно корректно — ее изменение в направлении к Земле.

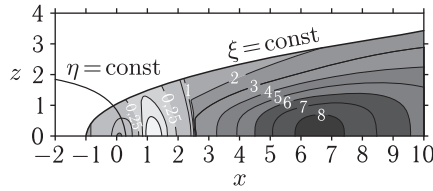


Рис. 3.26. Изолинии распределения альфвеновской скорости  $v_A$  (в  $10^3$  км/с) в меридиональной плоскости в параболической модели магнитосферы

Кроме того, для решения задачи на собственные значения необходимо сформулировать граничные условия для функций  $\zeta(\xi)$  и  $\mu(\eta)$ . Так как мы не принимаем во внимание малую утечку колебаний в солнечный ветер, граничное условие для  $\zeta(\xi)$  можно сформулировать на магнитопаузе при  $\xi = 1$ . Будем считать эту границу идеально отражающей, что дает первое граничное условие  $\zeta(1) = 0$ . Второе граничное условие поставим на оси симметрии  $\xi = 0$ . При  $\xi \rightarrow 0$  первым слагаемым в квадратных скобках в (3.6.14) можно пренебречь, а оставшееся уравнение

сводится к уравнению Бесселя, решение которого выражается через функции Бесселя:

$$\zeta(\xi) = CJ_{2m}(2\sqrt{Q\xi}) + DY_{2m}(2\sqrt{Q\xi}),$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные константы. Потребуем ограниченности решения во всей области его определения. Поскольку функция  $Y_\nu(x)$  сингулярна при  $x \rightarrow 0$ , положим  $D = 0$ . Таким образом, граничное условие для функции  $\mu(\eta)$  при  $\eta \rightarrow 0$ :

$$\mu(\eta) = CI_{2m}(2\sqrt{Q\eta}).$$

В ВКБ-приближении рассматриваемые колебания локализованы между двумя точками поворота:  $\bar{\eta}_1$  и  $\bar{\eta}_2$  ( $0 < \bar{\eta}_1 < \bar{\eta}_2 < \eta_2$ ). При  $\eta > \bar{\eta}_2$  функция  $\mu(\eta)$  экспоненциально убывает внутрь области непрозрачности. При дальнейшем перемещении вдоль геомагнитного хвоста альфвеновская скорость, пройдя через максимум, начнет убывать. Область непрозрачности вновь сменится областью прозрачности. Это также создает возможность для убегания колебаний через потенциальный барьер в солнечный ветер.

Однако этот барьер настолько широкий и высокий, что утечка колебаний через него мала (меньше, чем через магнитопаузу) и ей можно пренебречь. Таким образом, второе граничное условие в этом приближении можно сформулировать в виде непроницаемой стенки, расположенной глубоко в области непрозрачности. Если она расположена гораздо дальше характерного масштаба убывания функции  $\mu(\eta)$  внутрь области непрозрачности, искомое решение практически не зависит от места ее локализации. В проведенных расчетах мы полагаем ее в точке максимума в распределении альфвеновской скорости  $\mu(\eta_{\max}) = 0$ .

Этим граничным условиям удовлетворяют только такие решения (3.6.14), (3.6.15), которые соответствуют собственным значениям параметров  $\Omega = \Omega_{mnl}$  и  $Q = Q_{mnl}$ , где  $m, n, l = 0, 1, 2, \dots$  — волновые числа, определяющие число узлов собственных функций  $\Phi_{mnl}(\phi, \xi, \eta)$  по координатам  $\phi, \xi$  и  $\eta$  соответственно. Набор собственных значений  $\Omega_{mnl}$  определяет набор собственных частот БМЗ-резонатора  $f_{mnl} = \omega_{mnl}/2\pi$ . Эти частоты для первых трех гармоник по каждому из волновых чисел представлены в табл. 3.3.

Видно, что рассчитанные собственные частоты достаточно хорошо совпадают со спектром наблюдаемых в магнитосфере сверхнизкочастотных колебаний (0,8, 1,3, 1,9, 2,6, ... мГц). Имеется одна интересная особенность в рассчитанном спектре частот. Собственные частоты не распределены по спектру равномерно, а сгруппированы в определенные кластеры. Так, частоты  $f_{000} = 0,73$  мГц и  $f_{100} = 1,04$  мГц представляют кластеры, состоящие только из одной частоты. Наборы частот ( $f_{001} = 1,41$ ;  $f_{010} = 1,36$ ;  $f_{200} = 1,32$  мГц) и ( $f_{101} = 1,66$ ;  $f_{110} = 1,66$ ;  $f_{300} = 1,59$  мГц) представляют кластеры, состоящие из трех частот

Таблица 3.3. Собственные частоты нескольких первых гармоник БМЗ-резонатора в ближнем плазменном слое  $f_{mnl} = \omega_{mnl}/2\pi$  (мГц)

$m = 0$				$m = 1$			
$n \setminus l$	0	1	2	$n \setminus l$	0	1	2
0	0,73	1,41	2,13	0	1,04	1,66	2,42
1	1,36	1,96	2,65	1	1,66	2,24	2,91
2	1,97	2,55	3,2	2	2,29	2,84	3,47

$m = 2$			
$n \setminus l$	0	1	2
0	1,32	1,91	2,7
1	1,96	2,52	3,17
2	2,59	3,13	3,75

со средними значениями  $\bar{f} \approx 1,35$  мГц и  $\bar{f} \approx 1,6$  мГц соответственно. Другие гармоники колебаний со средними частотами  $\bar{f} \approx 1,95$  мГц,  $\bar{f} \approx 2,2$  мГц,  $\bar{f} \approx 2,6$  мГц,  $\bar{f} \approx 3,1$  мГц можно собрать в кластеры, состоящие из 5–7 гармоник (принимая во внимание гармоники с  $m, n, l > 2$ ). Поскольку мы пренебрегли поправками порядка  $v_s^2/v_A^2 \sim \beta$ , можно ожидать коррекции этих значений от нескольких до 10–20 %.

Отношение числа гармоник в каждом из кластеров можно, при прочих равных условиях, рассматривать как относительную вероятность наблюдения колебаний со средней частотой, соответствующей данному кластеру. Однако едва ли можно ожидать, что условия для возбуждения разных гармоник колебаний будут одинаковыми. Соответствующая частота должна присутствовать в спектре источника колебаний. В качестве такого источника можно рассматривать, например, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе. Как мы видели в разд. 2.16.2, частотный спектр резонатора попадает в диапазон БМЗ-колебаний, возбуждаемых этой неустойчивостью на границе геомагнитного хвоста (см. также [262, 263]). Также эти колебания могут возбуждаться в магнитосфере под действием импульсов давления солнечного ветра [264, 265].

К Земле рассматриваемые колебания передаются альфвеновскими волнами, возбуждаемыми в процессе альфвеновского резонанса [266, 267]. Характерные собственные частоты тороидальных альфвеновских колебаний на рассматриваемых магнитных оболочках ( $10 < L < 20$ ) как раз попадают в диапазон основных мод резонатора для БМЗ-волн [268]. Очевидно, что спектр рассчитанных частот рассматриваемого резонатора очень близок к спектру наблюдаемых «магических частот». Легко также объяснить локализацию колебаний, регистрируемых на Земле на широтах  $60^\circ$ – $80^\circ$ . Именно в эту область ионосферы

проецируется вдоль магнитных силовых линий резонатор в ближнем плазменном слое. Из-за магнитосферной конвекции он смещен в полуденно-утренний сектор магнитосферы.

В области локализации резонатора его боковые стенки расположены недалеко от плазмопаузы. В связи с этим резонатор нельзя считать идеальным. Он частично пронизан для колебаний, приходящих из солнечного ветра, и часть энергии его собственных колебаний также убегает в солнечный ветер. Однако добротность этого резонатора достаточно велика. Простые оценки показывают, что отношение декремента затухания собственных мод  $\bar{\gamma}$ , связанного с их утечкой в солнечный ветер через магнитопаузу, к частоте колебаний по порядку величины равно  $\bar{\gamma}/\omega \sim v_{Asw}/v_{Am}$ , где  $v_{Am} \sim (300-500)$  км/с,  $v_{Asw} \sim (50-100)$  км/с — характерные значения альфвеновской скорости в солнечном ветре и в магнитосфере вблизи магнитопаузы (см. [269]). Таким образом, имеем  $\bar{\gamma} \sim (0,1-0,3)\omega$ . Этого достаточно для того, чтобы постоянно действующий источник возбудил соответствующие колебания в резонаторе.

Относительно стабильности наблюдаемых частот можно сделать следующее резонное предположение. Поскольку рассматриваемые колебания, как правило, наблюдаются в достаточно спокойных условиях геомагнитной возмущенности ( $K_p < 3$ ), параметры ближней части плазменного слоя при этом всегда приблизительно одинаковы. Соответственно, резонатор для БМЗ-волн, который формируется в этих условиях, имеет практически одинаковые характеристики.

### 3.7. Монохроматические поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны с $m \gg 1$ в дипольноподобной магнитосфере

В предшествующих разделах данной главы мы исследовали МГД-колебания, крупномасштабные в азимутальном направлении ( $m \sim 1$ ). Теперь изучим пространственную структуру альфвеновских волн, мелкомасштабных как поперек магнитных оболочек, так и в азимутальном направлении ( $m \gg 1$ ). Проведем как полное аналитическое исследование этой структуры, так и численный расчет ее основных характеристик в дипольноподобной модели магнитосферы с «холодной» плазмой. Быстрые магнитозвуковые волны с  $m \gg 1$  не могут проникать извне глубоко внутрь магнитосферы, так как магнитосфера является областью непрозрачности для таких волн (см. разд. 3.5). В связи с этим, для генерации альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  требуется, чтобы их источник располагался на тех же магнитных оболочках, где они возбуждаются. Таким источником могут быть, например, сторонние токи в проводящем слое ионосферы. Они генерируются движением нейтралов в проводящем слое ионосферы, связанным с различными



процессами как естественного, так и искусственного происхождения (см. разд. 2.17).

Для описания структуры таких альфвеновских колебаний используем уравнение (3.2.3), в котором правую часть, описывающую поле БМЗ-волн, положим равной нулю:

$$\nabla_1 \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi + \nabla_2^2 \widehat{L}_P \varphi = 0. \quad (3.7.1)$$

Для операторов  $\widehat{L}_T$ ,  $\widehat{L}_P$  используем следующее представление:

$$\widehat{L}_T = \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (3.7.2)$$

$$\widehat{L}_P = \frac{\partial}{\partial l} p^{-1} \frac{\partial}{\partial l} + p^{-1} \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (3.7.3)$$

$p = \sqrt{g_2/g_1}$ , а производные берутся по физической длине магнитных силовых линий  $l$  ( $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ ).

**3.7.1. Формулировка задачи о структуре альфвеновских колебаний в ВКБ-приближении.** Поперечно мелкомасштабный характер рассматриваемых колебаний делает естественным использование ВКБ-приближения по координате  $x^1$ , направленной поперек магнитных оболочек (см. рис. 3.1). Выберем зависимость отдельной азимутальной гармоники от поперечных координат в виде

$$\varphi = \exp(iQ + ik_2 x^2),$$

где  $Q = Q(x^1, l)$  — большая квазиклассическая фаза,  $k_2 = m/\rho$  — азимутальное волновое число ( $\rho$  — радиус в цилиндрической системе координат, отсчитываемый от оси симметрии, см. рис. 3.11). Отметим, что при  $m \gg 1$  рассмотрение отдельных азимутальных гармоник с фиксированным  $m$  становится бессмысленным, поэтому здесь и далее будем использовать общее обозначение азимутальной координаты  $x^2$  и азимутального волнового числа  $k_2$ , изменение величины которого при  $m \rightarrow \infty$  можно рассматривать как непрерывное. Условие мелкомасштабности потенциала по координате  $x^1$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|$$

дает аналогичное неравенство для фазы  $Q$ :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial Q}{\partial x^1} \right| \gg \left| \frac{\partial Q}{\partial l} \right|,$$

то есть зависимость функции  $Q$  от координаты  $x^1$  значительно сильнее, чем от координаты  $l$ . Это означает, что можно выделить основной множитель, который зависит только от  $x^1$ . Другими словами, при разложении фазы в асимптотический ряд ВКБ-приближения,

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots,$$

член основного порядка  $Q_0$  можно рассматривать независимым от координаты  $l$ . Обозначим

$$\vartheta = Q_0; \quad \exp[i(Q_1 + Q_2 + \dots)] = H + h + \dots,$$

или, другими словами, представляем решение (3.7.1) в ВКБ-приближении как

$$\varphi = \exp(i\vartheta(x^1, \omega) + ik_2x^2)[H(x^1, l, \omega) + h(x^1, l, \omega) + \dots]. \quad (3.7.4)$$

Отметим также, что функция

$$\tilde{\vartheta}(x^1, x^2, \omega) = \vartheta(x^1, \omega) + k_2x^2$$

представляет собой полную квазиклассическую фазу по поперечным координатам. Квазиклассические ковариантные составляющие волнового вектора определяются соотношениями

$$k_1 = \partial\tilde{\vartheta}/\partial x^1, \quad k_2 = \partial\tilde{\vartheta}/\partial x^2.$$

Из последнего равенства следует

$$k_1 = k_1(x^1, \omega) = \partial\tilde{\vartheta}(x^1, \omega)/\partial x^1,$$

и, как и следовало ожидать, имеет место тождество  $k_2 = k_2$ . Несмотря на то, что  $k_1$  и  $k_2$  не зависят от  $l$ , квадрат волнового вектора

$$k_{\perp}^2 = \frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2}$$

от  $l$  зависит.

Подставляя выражение (3.7.4) в однородное уравнение (3.7.1), в основном порядке ВКБ-приближения получаем

$$\widehat{L}H = 0, \quad (3.7.5)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{L} &= \widehat{L}(x^1, l, \omega) = k_1^2 \widehat{L}_T + k_2^2 \widehat{L}_P = \frac{\partial}{\partial l} q \frac{\partial}{\partial l} + q \frac{\omega^2}{A^2}, \\ q &= \sqrt{g_{\perp}} k_{\perp}^2 = p k_1^2 + p^{-1} k_2^2, \quad g_{\perp} = g_1 g_2. \end{aligned}$$

Граничное условие для альфвеновских волн на ионосфере имеет вид (2.17.44). В основном порядке теории возмущений будем считать ионосферу идеально проводящей, т. е. полагаем

$$H|_{l_{\pm}} = 0, \quad (3.7.6)$$

где  $l_{\pm}$  — точки пересечения силовой линии с ионосферой в северном и южном полушариях соответственно. При данных  $x^1$  и  $\omega$  соотношения (3.7.5) и (3.7.6) можно рассматривать как задачу на собственные

значения для величины  $\kappa = k_1/k_2$ . Чтобы убедиться, что возможна такая трактовка данной задачи, представим эти соотношения как

$$(\kappa^2 \widehat{L}_T + \widehat{L}_P)H = 0, \quad H|_{l_{\pm}} = 0. \quad (3.7.7)$$

Пусть

$$\kappa = \kappa_N(x^1, \omega), \quad H = H_N(x^1, l, \omega) \quad (3.7.8)$$

являются решениями задачи на собственные значения. Здесь  $N = 1, 2, \dots$  — номер собственной гармоники, равный числу полувольт функции  $H_N$  на силовой линии. При заданной величине  $k_2$ , уравнения (3.7.5) и (3.7.6) можно рассматривать как задачу на собственные значения для величины  $k_1$ . Ясно, что

$$k_1 = k_{1N}(x^1, \omega) = k_2 \kappa_N(x^1, \omega). \quad (3.7.9)$$

Отсюда имеем

$$\vartheta = \vartheta_N(x^1, \omega) = \int k_{1N}(x^1, \omega) dx^1 = k_2 \int \kappa_N(x^1, \omega) dx^1. \quad (3.7.10)$$

Таким образом, решение задачи на собственные значения определяет основной порядок ВКБ-приближения по поперечной координате  $x^1$ .

В заключение этого раздела приведем формулы для компонент возмущенных электрического и магнитного полей в ВКБ-приближении. Подставляя (3.7.4) в выражения для компонент электромагнитного поля МГД-колебаний (Д.1), (Д.2) (Приложение Д), в основном порядке имеем

$$\begin{aligned} E_1 &= -ik_1 H e^{i\tilde{\vartheta}}, & E_2 &= -ik_2 H e^{i\tilde{\vartheta}}, & E_3 &= 0, \\ B_1 &= \frac{c}{\omega} \frac{k_2}{p} \frac{\partial H}{\partial l} e^{i\tilde{\vartheta}}, & B_2 &= -\frac{c}{\omega} k_1 p \frac{\partial H}{\partial l} e^{i\tilde{\vartheta}}, \\ B_3 &= -2i \frac{c}{\omega} \sqrt{g_3} \frac{k_1 k_2}{q} \frac{\partial \ln p}{\partial l} \frac{\partial H}{\partial l} e^{i\tilde{\vartheta}}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

**3.7.2. Качественное исследование задачи на собственные значения.** Задача (3.7.5), (3.7.6) определяет  $H_N$  как функцию от  $l$  с точностью до произвольного множителя. Чтобы определить этот множитель, рассмотрим нормированные решения этой задачи  $R_N(x^1, l, \omega)$ , определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \widehat{L}R_N &= 0, & R_N|_{l_{\pm}} &= 0, \\ \oint \frac{q_N}{v_A^2} R_N^2 dl &= 1. \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Здесь

$$q_N = p k_{1N}^2 + p^{-1} k_2^2 = k_2^2 (p \kappa_{1N}^2 + p^{-1}),$$

а криволинейный интеграл означает интегрирование вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами «туда и обратно».

Отношение  $\kappa(x^1, \omega) = k_1/k_2$  при заданном значении  $x^1$  определяет функциональную зависимость между частотой  $\omega$  и параметром  $\kappa = k_1/k_2$ . Введем обратную функцию

$$\omega = \omega(x^1, k_1/k_2). \quad (3.7.13)$$

Величину  $\omega_N$  можно рассматривать как решение задачи на собственные значения (3.7.5), (3.7.6) для параметра  $\omega$  при заданных значениях параметров  $k_1$  и  $k_2$ , а равенство (3.7.13) — как локальное дисперсионное уравнение. Собственными функциями при такой постановке задачи являются  $R_N[x^1, l, \omega_N(x^1, k_1/k_2)]$ .

Особую роль в последующем изложении имеют два предельных случая:  $\kappa = 0$  и  $\kappa = \infty$ , соответствующие полоидальным и тороидальным модам альфвеновских колебаний. Рассмотрим их более подробно. При  $\kappa = 0$  ( $k_1 = 0$ ) задача на собственные значения (3.7.5), (3.7.6) имеет вид

$$\widehat{L}_P(\omega)H = 0, \quad H|_{l_{\pm}} = 0.$$

Обозначим ее решения как

$$\omega = \Omega_{PN}(x^1), \quad H = P_N(x^1, l)$$

и назовем полоидальными собственными частотами и полоидальными собственными функциями соответственно. Последние будем считать нормированными условием

$$\oint \frac{1}{pv_A^2} P_N^2 dl = 1.$$

Легко видеть, что

$$\Omega_{PN}(x^1) = \omega_N(x^1, 0), \quad P_N(x^1, l) = k_2 R_N[x^1, l, \Omega_{PN}(x^1)].$$

При  $\kappa \rightarrow \infty$  ( $k_1 \rightarrow \infty$ ) из (3.7.5) и (3.7.6) имеем

$$\widehat{L}_T(\omega)H = 0, \quad H|_{l_{\pm}} = 0.$$

Решения этой задачи — тороидальные собственные частоты и собственные функции, которые обозначим как

$$\omega = \Omega_{TN}(x^1), \quad H = T_N(x^1, l).$$

Будем предполагать выполнение условия нормировки собственных функций

$$\oint \frac{p}{A^2} T_N^2 dl = 1,$$

в результате чего получаем

$$\Omega_{TN}(x^1) = \omega_N(x^1, \infty), \quad T_N(x^1, l) = k_1 R_N[x^1, l, \Omega_{TN}(x^1)].$$

Последнее равенство следует понимать так: при  $k_1 \rightarrow \infty$  функция  $R_N = T_N/k_1$  стремится к нулю.

Для развиваемой здесь теории ключевое значение имеет различие между полоидальной и тороидальной собственными частотами. Их разность  $\Delta\Omega_N = \Omega_{TN} - \Omega_{PN}$  называется поляризационным расщеплением спектра [272]. Для него может быть получено полезное аналитическое выражение. Исходим из тождеств

$$\frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial T_N}{\partial l} + p \frac{\Omega_{TN}^2}{A^2} T_N = 0, \quad \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \frac{\partial P_N}{\partial l} + \frac{1}{p} \frac{\Omega_{PN}^2}{A^2} P_N = 0.$$

Умножим первое из них слева на  $P_N/p$ , а второе на  $pT_N$ , вычтем одно из другого и проинтегрируем вдоль силовой линии. После преобразования в результате интегрирования по частям, получим равенство

$$\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2 = \oint \frac{\partial^2 \ln p}{\partial l^2} P_N T_N dl / \oint \frac{1}{v_A^2} P_N T_N dl. \quad (3.7.14)$$

Отсюда следует, что поляризационное расщепление спектра обусловлено кривизной силовых линий геомагнитного поля. Действительно, в магнитном поле с прямыми силовыми линиями  $p = \sqrt{g_2/g_1}$  не зависит от  $l$  и, таким образом, правая часть (3.7.14) равна нулю. В следующем разделе будет показано, что разность  $\Delta\Omega_N$  мала по сравнению с самими частотами.

Для моды с заданной частотой  $\omega$  особое значение имеют поверхности, определяемые (при заданном  $N$ ) уравнениями

$$\Omega_{TN}(x^1) = \omega, \quad \Omega_{PN}(x^1) = \omega. \quad (3.7.15)$$

Назовем их полоидальными и тороидальными резонансными поверхностями, координаты которых  $x_{PN}^1$  и  $x_{TN}^1$  определяются решениями уравнений (3.7.15) относительно  $x^1$ . Расстояние между ними можно характеризовать разностью  $\Delta_N = x_{TN}^1 - x_{PN}^1$ . Если  $\Delta_N > 0$ , то при монотонно убывающих функциях  $\Omega_{PN}$  и  $\Omega_{TN}$  полоидальная поверхность находится левее тороидальной поверхности,  $x_{TN}^1 > x_{PN}^1$ . Принимая во внимание, что  $\Delta\Omega_N \ll \Omega_{TN}, \Omega_{PN}$ , легко получить явное выражение для величины  $\Delta_N$ . Разложим функции  $\Omega_{TN}, \Omega_{PN}$  вблизи резонансных поверхностей как

$$\Omega_{TN} = \omega \left( 1 - \frac{x^1 - x_{TN}^1}{2a_N} \right), \quad \Omega_{PN} = \omega \left( 1 - \frac{x^1 - x_{PN}^1}{2a_N} \right). \quad (3.7.16)$$

Здесь  $a_N = (\nabla_1 \ln \Omega_{(T,P)N})^{-1}$  — характерный масштаб изменения функций  $\Omega_{TN}(x^1), \Omega_{PN}(x^1)$  вблизи резонансных поверхностей, который при  $\Delta\Omega_N \ll \Omega_{TN}, \Omega_{PN}$  можно считать одинаковым для обеих функций. Это неравенство предполагает, что диапазоны применимости разложений (3.7.16) перекрываются. Вычитая одно из другого, получаем

$$\Delta_N = 2\alpha_N a_N, \quad (3.7.17)$$

где обозначено  $\alpha_N = \Delta\Omega_N/\omega$  и предполагается, что  $\alpha_N \ll 1$ . Из определения резонансных поверхностей следует, что на полоидальной поверхности функция  $k_{1N}(x^1, \omega)$  стремится к нулю, а на тороидальной

поверхности — к бесконечности. Исследуем ее поведение в окрестностях этих поверхностей. Для этой цели используем теорию возмущений. Вблизи полоидальной поверхности при  $|x^1 - x_{PN}^1| \ll \Delta_N$  величины  $\omega^2 - \Omega_{PN}^2$  и  $k_{1N}^2$  можно считать малыми. Пусть также  $H = P_N + h_N$ , где  $h_N$  — малая поправка. Линеаризуя задачу (3.7.5), (3.7.6) по малым параметрам, имеем

$$\begin{aligned} k_2^2 \widehat{L}_P(\Omega_{PN}) h_N + k_{1N}^2 \widehat{L}_T(\Omega_{PN}) P_N + k_2^2 \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2}{\rho v_A^2} P_N &= 0, \\ h_N|_{l_\pm} &= 0. \end{aligned}$$

Умножим это уравнение слева на  $P_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. Принимая во внимание эрмитовость (вместе с граничным условием) оператора  $\widehat{L}_P$ , получаем

$$\begin{aligned} k_{1N}^2 &= k_2^2 \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2}{w_{PN}}, \\ w_{PN} &= - \oint P_N \widehat{L}_T(\Omega_{PN}) P_N dl = \oint \frac{\partial^2 p}{\partial l^2} P_N^2 dl. \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

Аналогичным образом, вблизи тороидальной поверхности при  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll \Delta_N$  имеем

$$\begin{aligned} k_{1N}^2 &= k_2^2 \frac{w_{TN}}{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}, \\ w_{TN} &= - \oint T_N \widehat{L}_P(\Omega_{TN}) T_N dl = - \oint \frac{\partial^2 p^{-1}}{\partial l^2} T_N^2 dl. \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Аналитические оценки и результаты численных расчетов, проведенные в следующем разделе, показывают, что константы  $w_{PN}$  и  $w_{TN}$  положительны.

Если применимы разложения (3.7.16), то из (3.7.18) и (3.7.19) имеем, соответственно

$$k_{1N}^2 = k_2^2 \frac{\omega^2}{w_{PN}} \frac{x^1 - x_{PN}^1}{a_N}, \quad k_{1N}^2 = -k_2^2 \frac{w_{TN}}{\omega^2} \frac{a_N}{x^1 - x_{TN}^1}. \quad (3.7.20)$$

Отсюда очевидно, что полоидальная резонансная поверхность является по координате  $x^1$  обычной точкой поворота, где  $k_1^2$  стремится к нулю, а тороидальная резонансная поверхность является сингулярной точкой поворота, где  $k_1^2$  имеет полюс. Вблизи полоидальной поверхности область прозрачности расположена при  $x^1 > x_{PN}^1$ , а вблизи тороидальной поверхности она находится при  $x^1 < x_{TN}^1$ , т.е. область прозрачности расположена в диапазоне  $x_{PN}^1 < x^1 < x_{TN}^1$ .

Области непрозрачности, где значения  $k_1^2$  отрицательны, расположены вне этого диапазона. Асимптотические значения  $k_{1N}^2$  в этих

областях могут быть определены аналитически. Имеем

$$k_{1N}^2 \rightarrow \begin{cases} -k_2^2/p_{\min}^2, & x^1 - x_{TN}^1 \gg \Delta_N, \\ -k_2^2/p_{\max}^2, & x_{PN}^1 - x^1 \gg \Delta_N, \end{cases} \quad (3.7.21)$$

где  $p_{\min}^2$  и  $p_{\max}^2$  — минимальное и максимальное значения функции  $p^2 = p^2(l)$  на силовой линии. В простых моделях геомагнитного поля (например, в дипольном поле) значения  $p_{\min}^2$  и  $p_{\max}^2$  достигаются соответственно на экваторе и на ионосфере. Полное распределение  $k_1^2(x^1)$  представлено на рис. 3.27.

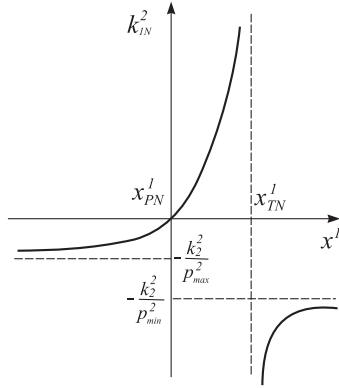


Рис. 3.27. Распределение квадрата ВКБ-компоненты волнового вектора  $k_{1N}^2$  альфвеновских волн с  $m \gg 1$  по поперечной координате  $x^1$

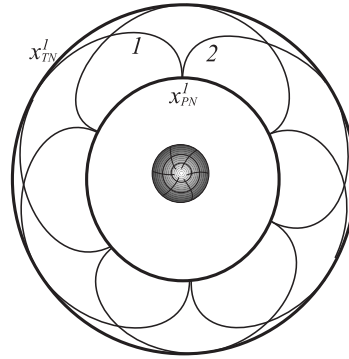


Рис. 3.28. Линии постоянной фазы  $\vartheta(x^1, x^3) = \text{const}$  (характеристики) в поперечном сечении аксиально-симметричной магнитосферы. Кривые 1 соответствуют значениям  $k_2 > 0$ , а кривые 2 —  $k_2 < 0$ . Окружности — поперечные сечения резонансных поверхностей: внутренняя — полюсальная ( $x^1 = x_{PN}^1$ ), внешняя — тороидальная ( $x^1 = x_{TN}^1$ )

В заключение этого раздела рассмотрим вопрос о поперечной групповой скорости исследуемых колебаний. Определим ее контравариантные компоненты обычным образом:  $v_N^i = \partial\omega/\partial k_i$ . Имеем

$$v_N^1 = \frac{\partial\omega_N(x^1, k_1/k_2)}{\partial k_1} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial\omega_N}{\partial \kappa} = \frac{1}{k_2} \left( \frac{\partial\kappa_N}{\partial\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial k_{1N}}{\partial\omega} \right)^{-1}. \quad (3.7.22)$$

Чтобы получить выражение для  $\partial k_{1N}/\partial\omega$ , продифференцируем уравнение (3.7.12) по  $\omega$ . Учитывая, что

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \omega} = 2k_{1N} \frac{\partial k_{1N}}{\partial \omega} \widehat{L}_T(\omega) + 2\omega \frac{q_N}{v_A^2},$$

получим уравнение

$$\widehat{L} \frac{\partial R_N}{\partial \omega} + 2k_{1N} \frac{\partial k_{1N}}{\partial \omega} \widehat{L}_T(\omega) R_N + 2\omega \frac{q_N}{v_A^2} R_N = 0.$$

Умножим это уравнение слева на  $R_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. Ввиду эрмитовости оператора  $\widehat{L}$  и условия нормировки (3.7.12), получаем

$$\begin{aligned} v_N^1 &= \left( \frac{\partial k_{1N}}{\partial \omega} \right)^{-1} = -\frac{k_{1N}}{\omega} \oint R_N \widehat{L}_T(\omega) R_N dl = \\ &= \frac{k_{1N}}{\omega} \oint p \left[ \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} R_N^2 \right] dl. \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

Аналогично получаем равенство

$$v_N^2 = -\frac{k_2}{\omega} \oint R_N \widehat{L}_P(\omega) R_N dl = \frac{k_2}{\omega} \oint \frac{1}{p} \left[ \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} R_N^2 \right] dl. \quad (3.7.24)$$

Используя соотношение

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} R_N^2 = -\frac{R_N}{q_N} \frac{\partial}{\partial l} q_N \frac{\partial R_N}{\partial l},$$

приведем выражения для групповых скоростей к виду

$$v_N^i = \frac{\tilde{k}^i k_1 k_2}{\omega} \oint \left( \frac{p'/p}{q_N} \right)' R_N^2 dl. \quad (3.7.25)$$

Здесь обозначено  $\tilde{k}^1 = k_2$ ,  $\tilde{k}^2 = -k_1$ .

В окрестностях резонансных поверхностей эти формулы упрощаются. Вблизи полоидальной поверхности

$$v_N^1 = \frac{k_{1N} w_{PN}}{k_2^2 \omega}, \quad v_N^2 = -\frac{k_{1N}^2 w_{PN}}{k_2^3 \omega}, \quad (3.7.26)$$

а вблизи тороидальной —

$$v_N^1 = \frac{k_2^2 w_{TN}}{k_{1N}^3 \omega}, \quad v_N^2 = \frac{k_2 w_{TN}}{k_{1N}^2 \omega}. \quad (3.7.27)$$

Из этих соотношений и из (3.7.20) очевидно, что групповая скорость стремится к нулю на полоидальной поверхности по закону

$$v_N^1 \sim (x^1 - x_{PN}^1)^{1/2}, \quad v_N^2 \sim x^1 - x_{PN}^1, \quad (3.7.28)$$

а на тороидальной поверхности — по закону

$$v_N^1 \sim (x_{TN}^1 - x^1)^{3/2}, \quad v_N^2 \sim x_{TN}^1 - x^1. \quad (3.7.29)$$

Из (3.7.25) следует

$$k_{1N} v_N^1 + k_2 v_N^2 = 0, \quad (3.7.30)$$

т. е. поперечная групповая скорость  $v_N^i$  перпендикулярна градиенту фазы  $k_i = \nabla_i \vartheta$  и направлена по характеристике — линии постоянной фазы (см. рис. 3.28). Используя понятие групповой скорости, можно



ввести новую переменную  $\tau$  — время распространения волны вдоль характеристики. Положим:

$$d\tau = \frac{dx^1}{v_N^1} = \frac{dx^2}{v_N^2}, \quad (3.7.31)$$

где подразумевается, что дифференциалы координат  $dx^1$  и  $dx^2$  взяты вдоль характеристики, т.е. связаны отношением  $k_{1N}dx^1 + k_{2N}dx^2 = 0$ . Примем, что время распространения волны  $\tau$  отсчитывается от момента ее генерации на полоидальной резонансной поверхности. Тогда

$$\tau = \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{dx^{1'}}{v_N^1}. \quad (3.7.32)$$

Используя соотношения (3.7.28) и (3.7.29) легко убедиться, что интеграл (3.7.32) сходится на нижнем пределе и расходится при  $x^1 \rightarrow x_{TN}^1$ . Это означает, что время, необходимое волне, чтобы приблизиться к тороидальной поверхности, бесконечно.

Из определения (3.7.31) следует, что

$$v_N^1 = \frac{dx^1}{d\tau}, \quad v_N^2 = \frac{dx^2}{d\tau},$$

где дифференциалы от координат также предполагаются взятыми вдоль характеристики. Введем полную производную функции от координат  $x^1, x^2$  соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = v_N^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v_N^2 \frac{\partial}{\partial x^2}. \quad (3.7.33)$$

Соотношение (3.7.30) тогда может быть представлено как

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \tau} = 0,$$

т.е. фаза волны постоянна вдоль характеристики.

**3.7.3. Структура альфвеновских волн с  $m \gg 1$  вдоль силовых линий магнитного поля.** Решение продольного уравнения (3.7.12) для любых реалистических моделей геомагнитного поля и плазмы, несомненно — численная задача. Однако для гармоник с большими номерами  $N$  может быть использован аналитический метод ВКБ по продольной координате  $l$ . Рассмотрим оба метода решения и сравним их результаты. Начнем с метода ВКБ.

Предположим, что  $R_N(l) = \exp[iS(l)]$ , где  $S(l)$  — большая квазиклассическая фаза по продольной координате. Уравнение (3.7.12) в ВКБ-приближении дает уравнение для фазы

$$-S'^2 + iS'' + i(\ln q)'S' + \omega^2/v_A^2 = 0.$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по  $l$ . Как будет показано ниже, чтобы получить результат с требуемой точностью, в асимптотическом разложении фазы  $S$  необходимо сохранить три первых слагаемых

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots$$

В основном (нулевом) порядке имеем

$$-S_0'^2 + \omega^2/v_A^2 = 0; \quad S_0(l) = \pm\omega \int \frac{dl}{v_A(l)}.$$

В следующем (первом) порядке

$$-2S_0'S_1' + iS_0'' + i(\ln q)'S_0' = 0,$$

откуда получаем

$$S_1 = -i \ln C + \frac{i}{2} \ln \frac{q}{v_A}, \quad e^{iS_1} = C \left( \frac{v_A}{q} \right)^{1/2},$$

где  $C$  — произвольная константа. Во втором порядке

$$-2S_0'S_2' - S_1'^2 + iS_1'' + i(\ln q)'S_1' = 0.$$

Несложные преобразования дают

$$S_2 = \pm \frac{1}{8\omega} \int v_A [(\ln v_A)'^2 - (\ln q)'^2 + 2(\ln v_A)'' - 2(\ln q)''] dl'.$$

Обозначим  $\bar{S} = S_0 + S_2$ . Тогда общее решение (3.7.12) можно записать как

$$R_N = \left( \frac{v_A}{q} \right)^{1/2} (c_+ e^{i\bar{S}} + c_- e^{-i\bar{S}}) = \left( \frac{v_A}{q} \right)^{1/2} (c_1 \sin \bar{S} + c_2 \cos \bar{S}).$$

Из граничного условия (3.7.12) следует  $c_2 = 0$ , откуда имеем условие квантования:

$$\omega \oint \frac{dl}{v_A} + \frac{1}{8\omega} \oint v_A [(\ln v_A)'^2 - (\ln q)'^2 + 2(\ln v_A)'' - 2(\ln q)''] dl = 2\pi N.$$

Предполагая величину  $N$  большой и решая это уравнение методом итераций, получаем

$$\omega = \omega_N \equiv \frac{2\pi N}{t_A} - \frac{1}{16\pi N} \oint v_A [(\ln v_A)'^2 - (\ln q)'^2 + 2(\ln v_A)'' - 2(\ln q)''] dl, \quad (3.7.34)$$

где

$$t_A = t_A(x^1) = \oint \frac{dl}{v_A(x^1, l)} \quad (3.7.35)$$

— время пробега с локальной альфвеновской скоростью вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами «туда и обратно». Так как

$$(\ln q)' = \frac{p^2 \kappa - 1}{p^2 \kappa + 1} (\ln p)', \quad (3.7.36)$$

равенство (3.7.34) определяет  $\omega = \omega_N$  как функцию параметра  $\kappa$ . Его можно также трактовать как уравнение, определяющее функцию  $\kappa = \kappa_N(\omega)$ . Из уравнения (3.7.34) очевидно, что дисперсия моды проявляется только во втором порядке ВКБ-приближения. Что касается рассматриваемых собственных мод, для них достаточно ограничиться этими двумя порядками. Используя условие нормировки (3.7.12), определим постоянную  $C$  и получим

$$R_N = \left( \frac{2v_A}{qt_A} \right) \sin \left( \frac{2\pi N}{t_A} \int_{l_-}^l \frac{dl'}{v_A} \right). \quad (3.7.37)$$

Из равенств (3.7.34) и (3.7.36) соотношения

$$\Omega_{PN} \equiv \frac{2\pi N}{t_A} + \frac{1}{16\pi N} \oint v_A [(\ln p)'^2 - (\ln v_A)'^2 - 2(\ln p)'' - 2(\ln v_A)'''] dl, \quad (3.7.38)$$

$$\Omega_{TN} \equiv \frac{2\pi N}{t_A} + \frac{1}{16\pi N} \oint v_A [(\ln p)'^2 - (\ln v_A)'^2 + 2(\ln p)'' - 2(\ln v_A)'''] dl \quad (3.7.39)$$

следуют как частные случаи, а из (3.7.37) имеем

$$P_N = \left( \frac{2pv_A}{t_A} \right)^{1/2} \sin \left( \frac{2\pi N}{t_A} \int_l^l \frac{dl'}{v_A} \right), \quad (3.7.40)$$

$$T_N = \left( \frac{2v_A}{pt_A} \right)^{1/2} \sin \left( \frac{2\pi N}{t_A} \int_l^l \frac{dl'}{v_A} \right).$$

Для поляризационного расщепления спектра из (3.7.38), (3.7.39) получаем

$$\Delta\Omega_N = \frac{1}{4\pi N} \oint v_A (\ln p)'' dl. \quad (3.7.41)$$

Эта же формула получается из (3.7.14) при подстановке (3.7.40). Аналогичным образом из (3.7.18) и (3.7.19) получаем

$$w_{PN} = \frac{1}{t_A} \oint v_A p p'' dl, \quad w_{TN} = \frac{1}{t_A} \oint v_A \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} \right)'' dl. \quad (3.7.42)$$

Заметим, что выражения (3.7.18), (3.7.19) для  $k_{1N}^2$  можно получить из уравнения (3.7.34), раскладывая его в первом случае по малым параметрам  $\omega - \Omega_{PN}$  и  $\kappa^2$ , а во втором случае — по параметрам  $\omega - \Omega_{TN}$  и  $\kappa^{-2}$ . При этом константы  $w_{(P,T)N}$  получаются сразу в виде (3.7.42).

Наконец, запишем в рассматриваемом приближении выражение для групповой скорости:

$$v_N^i = \frac{\tilde{k}^i k_1 k_2}{2\pi N} \oint \left( \frac{p'/p}{q_N} \right)' \frac{v_A}{q_N} dl. \quad (3.7.43)$$

Теперь рассмотрим численное решение полученных выше уравнений. Ограничимся относительно простой моделью магнитосферы. Геомагнитное поле будем считать дипольным. Для параметра  $p = \sqrt{g_2/g_1}$  в этом случае имеем

$$p = a(1 + 3 \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (3.7.44)$$

где  $a$  — экваториальный радиус силовой линии,  $\theta$  — широта, отсчитываемая от экватора (см. рис. 3.1). Элемент длины вдоль силовой линии дается выражением

$$dl = a \cos \theta (1 + 3 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

Точки пересечения силовой линии с ионосферами сопряженных полушарий имеют широты  $\theta_+ = \theta^*$  и  $\theta_- = -\theta^*$ , где

$$\theta^* = \arccos \sqrt{r_i/a},$$

$r_i$  — радиус верхней границы ионосферы (отсчитываемой от центра Земли). В разд. 2.17 дано объяснение, почему для рассматриваемых основных гармоник стоячих альфвеновских волн эта граница должна быть выбрана на высоте 1000–2000 км от поверхности Земли, там, где заканчивается быстрый рост альфвеновской скорости с высотой. Используя в меридиональной плоскости в качестве координат переменные  $a$  и  $\theta$ , модуль геомагнитного поля может быть представлен как

$$B(a, \theta) = B_0(a_0/a)^3 v(\theta); \quad v(\theta) = (1 + 3 \sin^2 \theta)^{1/2} / \cos^6 \theta.$$

Здесь  $B_0$  — величина геомагнитного поля в экваториальной плоскости на некоторой магнитной оболочке  $a = a_0$ . Для описания альфвеновской скорости в меридиональной плоскости используем следующую модельную функцию:

$$v_A(a, \theta) = v_{A0}(a_0/a)^\mu [v(\theta)]^\nu. \quad (3.7.45)$$

Выбирая соответствующие значения констант  $v_{A0}$ ,  $\mu$  и  $\nu$ , можно использовать это выражение, чтобы моделировать широкий класс распределений альфвеновской скорости в магнитосфере. Использование модели (3.7.45) ограничено областями магнитосферы с монотонным изменением  $v_A$  поперек магнитных оболочек. В частности, она не учитывает наличие плазмплаузы. Проведем численные расчеты для следующих значений констант  $a_0 = 4R_E = 2,5 \cdot 10^4$  км,  $r_i = 7,9 \cdot 10^3$  км,  $v_{A0} = 10^3$  км/с,  $\mu = 3/2$ , и  $\nu = 1/4$ . Результаты численных расчетов представлены на рис. 3.29–3.32.

На рис. 3.29 представлена продольная структура первых трех гармоник полоидальных и тороидальных стоячих альфвеновских волн

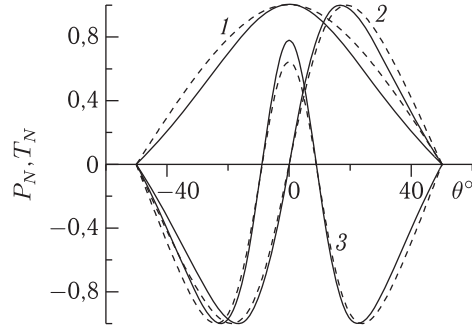


Рис. 3.29. Структура первых трех гармоник ( $N = 1, 2, 3$ ) стоячих тороидальных (сплошные линии) и полоидальных (штриховые линии) альфвеновских волн вдоль силовых линий на магнитной оболочке  $L = 6,6$

единичной амплитуды на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . В качестве продольной координаты на этом рисунке использована магнитная широта  $\theta$ , отсчитываемая от экваториальной плоскости. Видно, что различие в продольной структуре рассматриваемых колебаний минимально.

На рис. 3.30 представлено распределение собственных частот  $\Omega_{(P,T)N}$  первых двух гармоник стоячих полоидальных и тороидальных альфвеновских волн на различных магнитных оболочках (здесь  $L = a/R_E$  — параметр Макилвейна). Обращает на себя внимание то, что поляризационное расщепление спектра достаточно велико только для основной гармоники (отношение  $\Delta\Omega_1/\Omega_{T1} = (\Omega_{T1} - \Omega_{P1})/\Omega_{T1} \approx 0,2$  на магнитной оболочке  $L = 2$ ). Для более высоких гармоник оно пренебрежимо мало ( $\Delta\Omega_2/\Omega_{T2} \approx 0,02$ ;  $\Delta\Omega_3/\Omega_{T3} \approx 0,005 \dots$ ). Из формулы ВКБ-приближения (3.7.41), можно было бы ожидать уменьшения величины расщепления только в несколько раз.

Однако ВКБ-приближение, строго говоря, неприменимо для основных гармоник, но обычно дает также правильный (по порядку вели-

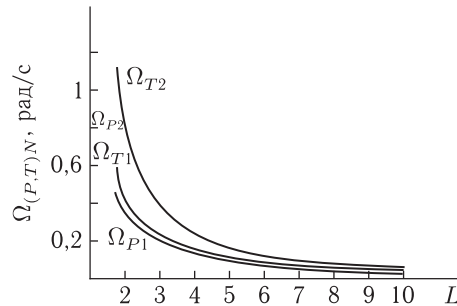


Рис. 3.30. Зависимость полоидальной  $\Omega_{PN}$  и тороидальной  $\Omega_{TN}$  собственных частот ( $N = 1, 2$ ) от параметра магнитной оболочки  $L = a/R_E$  (параметр Макилвейна)

чины) результат и для них. Таким образом, приходим к важному заключению. Достаточно большая величина разности  $\Delta\Omega_N$ , необходимая для успешного применения рассматриваемой теории, всегда достигается для основной гармоники ( $N = 1$ ), но может не достигаться для гармоник с  $N > 2$ . Отметим, что это — особенность альфвеновских колебаний именно в «холодной» плазме. В моделях магнитосферы с «теплой» и движущейся плазмой [271, 272], а также при наличии шира магнитного поля [273] поляризационное расщепление спектра становится значительным для всех основных гармоник ( $N \sim 1$ ) стоячих альфвеновских волн. Это достигается значительным изменением собственной частоты полоидальных альфвеновских колебаний на полоидальной резонансной оболочке, которая существенно смещается относительно тороидальной оболочки. Частота тороидальных колебаний и местоположение тороидальной резонансной оболочки остаются при этом практически неизменными.

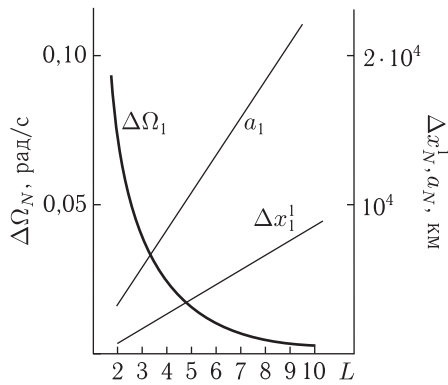


Рис. 3.31. Зависимость поляризационного расщепления спектра  $\Delta\Omega_1$ , экваториального расщепления резонансных оболочек  $\Delta x_1^1$  и характерного масштаба поперечной неоднородности альфвеновской скорости  $a_1$  основной гармоники альфвеновских колебаний ( $N = 1$ ) от параметра магнитной оболочки  $L = a/R_E$

Определим величину  $a_N$  как

$$\frac{1}{2a_N} = \frac{d \ln \sqrt{\Omega_{PN}\Omega_{TN}}}{dx^1} = \frac{1}{2} \left( \frac{d \ln \Omega_{PN}}{dx^1} + \frac{d \ln \Omega_{TN}}{dx^1} \right). \quad (3.7.46)$$

По порядку величины  $a_N \sim a$ . Она слабо зависит от номера  $N$ . Напротив, величина  $\Delta_N = 2\alpha_N a_N$  зависит от  $N$  сильно. Характерные экваториальные зависимости этих параметров для основной гармоники  $N = 1$ , а также величины поляризационного расщепления спектра  $\Delta\Omega_1$  от параметра магнитной оболочки представлены на рис. 3.31. Ширина области прозрачности  $\Delta_1$  для основной моды,  $N = 1$ , достаточно велика (в магнитосфере от  $10^3$  до  $10^4$  км). В проекции на ионосферу вдоль магнитных силовых линий это дает несколько сотен километров. Величины  $\Delta_N$  при  $N > 1$  оказываются меньше ста километров.

Анализируя определения (3.7.18) и (3.7.19) для величин  $w_{PN}$  и  $w_{TN}$ , можно получить следующие оценки:

$$w_{PN} \sim \alpha_N v_{A0}^2, \quad w_{TN} \sim \alpha_N v_{A0}^2 / a^4, \quad (3.7.47)$$

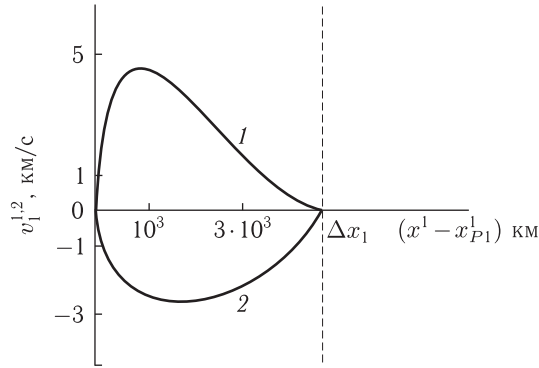


Рис. 3.32. Зависимость компонент групповой скорости основной гармоники стоячих альфвеновских волн  $v_1^1$  и  $v_1^2$  от радиальной координаты в экваториальной плоскости ( $x^1 \equiv a_1$ ), тороидальная резонансная поверхность которых  $x_{T1}^1$  расположена на магнитной оболочке  $L = 6,6$

где  $v_{A0}$  — характерная величина альфвеновской скорости в магнитосфере на рассматриваемой магнитной оболочке. Аналогичная оценка характерных экваториальных значений физических компонент групповой скорости

$$\hat{v}_N^1 \sim \hat{v}_N^2 \sim \alpha_N v_{A0} / m \quad (3.7.48)$$

следует из (3.7.23), (3.7.24), что достаточно хорошо согласуется с графиками, приведенными на рис. 3.32.

### 3.7.4. Диссипация стоячих альфвеновских волн в ионосфере.

Чтобы учесть диссипацию энергии альфвеновских волн в ионосфере, необходимо сохранить первое слагаемое в правой части граничного условия (2.17.44). Тогда вместо задачи (3.7.5), (3.7.6) приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\hat{L}(x^1, k_1, k_2, \omega)H = 0, \quad H|_{l_{\pm}} = \mp i(v_{p\pm}/\omega)(\partial H/\partial l)|_{l_{\pm}}. \quad (3.7.49)$$

Ее решения будут отличаться от прежних собственных значений  $k_{1N}$  некоторыми поправками  $\delta k_{1N}$ :

$$k_1 = k_{1N} + \delta k_{1N}.$$

Известно, что величина  $\delta k_{1N}$  связана с локальным декрементом затухания моды  $\gamma_N = \gamma_N(x^1, \omega)$  следующим соотношением:

$$\delta k_{1N} = i\gamma_N / v_N^1. \quad (3.7.50)$$

Действительно, в этом случае поправка к квазиклассической фазе может быть записана в виде

$$\delta\tilde{\vartheta} = \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \delta k_{1N} dx^{1'} \equiv i\Gamma(x^1), \quad (3.7.51)$$

где введено обозначение

$$\Gamma(x^1) = \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} = \int_0^\tau \gamma_N d\tau'. \quad (3.7.52)$$

В последнем равенстве использовано определение (3.7.31). Таким образом, в соответствии с (3.7.4) имеем множитель

$$\exp(i\delta\tilde{\vartheta}) = \exp(-\Gamma),$$

который описывает затухание волны при ее распространении вдоль характеристики. Обратим внимание, что если к этому вопросу подойти строго формально, то равенство (3.7.50) следует рассматривать как определение декремента  $\gamma_N$ .

Чтобы фактически определить поправку  $\delta k_{1N}$ , используем теорию возмущений. Пусть  $H = f_N(R_N + h_N)$ , где  $f_N$  — константа, не зависящая от  $l$ . Линеаризуем задачу (3.7.49) по малым параметрам  $\delta k_{1N}$  и  $h_N$ :

$$\begin{aligned} \widehat{L}(x^1, k_1, k_2, \omega)h_N + \delta k_{1N} \frac{\partial \widehat{L}(x^1, k_1, k_2, \omega)}{\partial k_1} R_N &= 0, \\ h_N|_{l_\pm} &= \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \left. \frac{\partial R_N}{\partial l} \right|_{l_\pm}. \end{aligned} \quad (3.7.53)$$

Умножим первое из этих соотношений на  $R_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. В результате получим

$$\delta k_{1N} = - \oint R_N \widehat{L} h_N dl / \oint R_N \frac{\partial \widehat{L}}{\partial k_1} R_N dl. \quad (3.7.54)$$

Так как  $\partial \widehat{L} / \partial k_1 = 2k_1 \widehat{L}_T$ , то в соответствии с (3.7.23)

$$\oint R_N \frac{\partial \widehat{L}}{\partial k_1} R_N dl = 2k_1 \oint R_N \widehat{L} R_N dl = -2\omega v_N^1.$$

Сравнивая (3.7.50) с (3.7.54), получаем равенство

$$\oint R_N \widehat{L} h_N dl = 2i\omega \gamma_N. \quad (3.7.55)$$



Преобразуя левую часть интегрированием по частям и используя граничное условие, получаем следующее выражение для декремента:

$$\gamma_N = \frac{1}{\omega^2} \left[ q_N^+ v_{p+} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_+^2 + q_N v_{p-} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_-^2 \right]. \quad (3.7.56)$$

Здесь обозначено  $q_N^\pm = q_N(l_\pm) = p_\pm k_{1N}^2 + p_\pm^{-1} k_2^2$ , где  $p_\pm = p(l_\pm)$ . Вместе с равенством (3.7.50) это выражение определяет поправку  $\delta k_{1N}$ . Отметим также, что локальный декремент  $\gamma_N$  можно рассматривать как поправку к собственной частоте (3.7.13), связанную с затуханием на ионосфере:  $\omega = \omega_N - i\gamma_N$ . В этом случае декремент следует рассматривать как функцию переменных  $x^1$  и  $\kappa$ :  $\gamma_N = \gamma_N[x^1, \omega_N(x^1, \kappa)]$ . Вблизи полоидальной поверхности из (3.7.56) имеем

$$\gamma_N \equiv \gamma_{PN}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{v_{p+}}{p_+} \left( \frac{\partial P_N}{\partial l} \right)_+^2 + \frac{v_{p-}}{p_-} \left( \frac{\partial P_N}{\partial l} \right)_-^2 \right], \quad (3.7.57)$$

а вблизи тороидальной поверхности —

$$\gamma_N \equiv \gamma_{TN}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \left[ p_+ v_{p+} \left( \frac{\partial T_N}{\partial l} \right)_+^2 + p_- v_{p-} \left( \frac{\partial T_N}{\partial l} \right)_-^2 \right]. \quad (3.7.58)$$

Для больших номеров  $N$ , когда применимы формулы продольного ВКБ приближения, подставляя (3.7.37) в (3.7.56), получаем

$$\gamma_N = \frac{2}{t_A} \left[ \frac{v_{p+}}{v_{A+}} + \frac{v_{p-}}{v_{A-}} \right], \quad (3.7.59)$$

где  $v_{A\pm} = v_A(l_\pm)$  — величина альфвеновской скорости на границе с ионосферой. В этом приближении  $\gamma_N$  фактически не зависит от  $N$ . Выражение (3.7.59) может использоваться для оценки  $\gamma_N$ . Типичные значения:  $v_{A\pm} = (3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4)$  км/с,  $v_{p\pm} \sim 10^2$  км/с для дневной ионосферы и  $v_{p\pm} \sim 10^3$  км/с для ночной ионосферы.

Тогда  $v_{p\pm}/v_{A\pm} \sim 0,03-0,003$  для дневной ионосферы и  $v_{p\pm}/v_{A\pm} \sim 0,3-0,03$  для ночной ионосферы. Малость параметров  $v_{p\pm}/v_{A\pm}$  обеспечивает слабость затухания моды, т.е. малость декремента  $\gamma_N$  по сравнению с разностью соседних собственных частот (скажем,  $\omega_N$  и  $\omega_{N+1}$ ), которые по порядку величины равны  $a/t_A$ . Выражение (3.7.59) хорошо описывает пространственное распределение декремента затухания геомагнитных пульсаций, наблюдаемых в средних широтах [274].

**3.7.5. Распределение амплитуды альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  поперек магнитных оболочек.** В основном порядке ВКБ-приближения по координате  $x^1$  уравнения (3.7.5) и (3.7.6) определяют функцию  $H = H_N$  с точностью до произвольного множителя, который может зависеть от  $x^1$  и  $\omega$ . Другими словами, решение в этом порядке может быть представлено как

$$H_N(x^1, l, \omega) = f_N(x^1, \omega) R_N(x^1, l, \omega). \quad (3.7.60)$$

Функцию  $f_N$  следует рассматривать как амплитуду стоячей волны на данной магнитной оболочке. Уравнение, определяющее  $f_N$ , является условием разрешимости для поправки следующего порядка ВКБ-приближения по координате  $x^1$ . Положим

$$H = H_N + \tilde{h}_N = f_N(R_N + h_N). \quad (3.7.61)$$

Здесь поправка следующего порядка  $\tilde{h}_N$  представлена в виде  $f_N h_N$ , что не уменьшает общности. Предположим, что функция  $h_N$  включает в себя не только поправки, связанные со следующим порядком ВКБ-приближения, но также и с затуханием на ионосфере. Это означает, что функция  $h_N$  удовлетворяет граничному условию (3.7.53).

Подставляя (3.7.61) в однородное уравнение (3.7.1), в следующем за главным порядком ВКБ-приближения имеем

$$-f_N \widehat{L} h_N + i[\nabla_1(k_1 f_N \widehat{L}_T R_N) + k_1 \widehat{L}_T \nabla_1(f_N R_N)] = 0.$$

Умножим это уравнение слева на  $f_N R_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. Принимая во внимание эрмитовость оператора  $\widehat{L}_T$  по отношению к функциям, которые обращаются в нуль при  $l = l_{\pm}$ , получаем соотношение

$$\nabla_1 k_1 f_N^2 \oint R_N \widehat{L}_T R_N dl + i f_N^2 \oint R_N \widehat{L}_T h_N dl = 0.$$

Наконец, используя равенства (3.7.23), (3.7.24) и (3.7.55), получаем

$$\nabla_1 v_N^1 f_N^2 = -2\gamma_N f_N^2. \quad (3.7.62)$$

Полученные соотношения имеют простой физический смысл. Обозначим плотность энергии альфвеновских колебаний как  $w$ . Она состоит из энергии возмущенного магнитного поля и кинетической энергии плазменных частиц:

$$w = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho_0 v_E^2}{2},$$

где  $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]/B_0^2$  — скорость электрического дрейфа плазмы в поле волны. Подставляя сюда соотношения (3.7.11) и (3.7.60), получаем

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{B_1 B_1^*}{g_1} + \frac{B_2 B_2^*}{g_2} \right) + \frac{\rho_0 c^2}{2B_0^2} \left( \frac{E_1 E_1^*}{g_1} + \frac{E_2 E_2^*}{g_2} \right) = \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega^2} \frac{f_N^2}{\sqrt{g_{\perp}}} \left[ q_N \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + q_N \frac{\omega^2}{v_A^2} R_N^2 \right]. \end{aligned}$$

Теперь вычислим величину энергии колебаний  $\bar{w}$ , содержащихся в тонкой силовой трубке единичного размера по координатам  $x^1$  и  $x^2$  (т.е.  $dx^1 = 1$  и  $dx^2 = 1$ ). Поперечное сечение такой трубки  $\sigma = \sqrt{g_1 g_2} = \sqrt{g_{\perp}}$ . Имеем

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \oint w \sigma dl = \frac{c^2}{16\pi} f_N^2 \oint \left[ \frac{q_N}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + \frac{q_N}{v_A^2} R_N^2 \right] dl = \frac{c^2}{8\pi} f_N^2.$$

С другой стороны, интегрируя поперечные контравариантные компоненты вектора Пойнтинга

$$S^1 = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{g}} E_2^* B_3, \quad S^2 = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{g}} E_1^* B_3$$

по объему той же самой силовой трубки, найдем контравариантные компоненты вектора поперечного потока энергии трубки:

$$\bar{S}^i = \frac{1}{2} \oint S^i \sigma dl = \frac{c^2}{8\pi} v_N^i f_N^2 = v_N^i \bar{w}. \quad (3.7.63)$$

Здесь использованы соотношения (3.7.11), (3.7.60), (3.7.23) и (3.7.24). Из полученных формул очевидно, что равенство (3.7.62) является уравнением баланса энергии колебаний силовой трубки:

$$\nabla_i \bar{S}^i = -2\gamma_N \bar{w}.$$

Здесь, конечно, учтено, что из-за аксиальной симметрии  $\nabla_2 \bar{S}^2 = 0$ . Решение уравнения (3.7.62) имеет вид

$$f_N = C v_N^{-1/2} \exp(-\Gamma), \quad (3.7.64)$$

где  $C$  — константа, независимая от  $x^1$ . Следует отметить, что экспоненциальная часть этого выражения была по существу определена в предшествующем разделе (формула (3.7.51)). Комбинируя выражения (3.7.4), (3.7.10), (3.7.60) и (3.7.64), получаем решение в двух основных порядках ВКБ-приближения:

$$\varphi(x^1, l, \omega) = \frac{C}{\sqrt{v_N^1}} \exp \left( i \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N} dx^{1'} - \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} \right) R_N(x^1, l, \omega). \quad (3.7.65)$$

Из соотношений (3.7.28) очевидно, что интеграл в экспоненте формулы (3.7.64) сходится на нижнем пределе. Следовательно, амплитуда  $f_N$  из-за наличия предэкспоненты имеет особенность  $f_N \sim (x^1 - x_{PN}^1)^{-1/4}$  на полоидальной поверхности. При удалении от тороидальной поверхности  $f_N$  уменьшается как из-за увеличения групповой скорости  $v_N^1$ , так и вследствие затухания на ионосфере. На тороидальной поверхности предэкспонента в (3.7.64) обращается в бесконечность по закону  $(x_{TN}^1 - x^1)^{-3/4}$ . Однако, так как интеграл в экспоненте также стремится к бесконечности (из-за бесконечного времени приближения волны к тороидальной поверхности), полная амплитуда  $f_N$  стремится к нулю.

Поведение амплитуды будет отличаться в присутствии неустойчивости рассматриваемых здесь альфвеновских волн. Если действие механизма неустойчивости сильнее, чем затухание на ионосфере, то волна будет скорее раскачиваться, а не затухать. Такая ситуация может быть описана феноменологически, если величину  $\gamma_N$  считать отрицательной. Тогда экспоненциальный множитель в (3.7.65) увеличивается

от полоидальной поверхности к тороидальной, и на последней обращается в бесконечность [278]. Неустойчивость рассматриваемых колебаний может быть связана, например, с присутствием в плазме группы высокоэнергичных заряженных частиц (см. [276–280]). Подробный обзор других видов неустойчивостей рассматриваемых волн можно найти в книге [25].

В заключение этого раздела обсудим вопрос об условии применимости ВКБ-приближения по координате  $x^1$ . Начальная форма этого условия, как известно,

$$\left| \frac{d}{dx^1} \frac{1}{k_1} \right| \ll 1. \quad (3.7.66)$$

Для анализа этого неравенства используем модельное выражение

$$\widehat{k}_1^2 = (\widehat{k}_2^0)^2 \frac{x^1 - x_{PN}^1}{x_{TN}^1 - x^1}. \quad (3.7.67)$$

Здесь  $\widehat{k}_{1,2}^0 = k_{1,2}/\sqrt{g_{1,2}(0)}$  являются физическими компонентами волнового вектора в экваториальной плоскости  $l = 0$ . Кроме того, что выражение (3.7.67) дает правильное качественное поведения функции  $\widehat{k}_1^2(x^1)$ , оно правильно и по порядку величины. Из выражения (3.7.67) следует, что неравенство (3.7.66) может удовлетворяться, только если

$$\widehat{k}_1 \widehat{\Delta}_N \gg 1, \quad (3.7.68)$$

где  $\widehat{\Delta}_N = \sqrt{g_1}(x_{TN}^1 - x_{PN}^1)$  — характерное физическое расстояние между резонансными поверхностями (скажем, в экваториальной плоскости). Так как между резонансными поверхностями  $\widehat{k}_1 \sim \widehat{k}_2$ , условие (3.7.68) подразумевает, что между этими поверхностями помещается много поперечных длин волн. Так как по порядку величины  $\widehat{k}_2^0 = m/a$ , неравенство (3.7.68) может быть переписано в виде  $m \gg a/\widehat{\Delta}_N \sim 1/\alpha_N$ . Для основной гармоники ( $N = 1$ ) это приводит к условию, которое фактически не отличается от первоначально принятого нами  $m \gg 1$ . Однако, уже для следующей гармоники ( $N = 2$ ) условие для азимутального волнового числа становится более строгим:  $m \gg 10-10^2$ . Подчеркнем, что это относится только к модели среды с «холодной» плазмой. В «теплой» и движущейся плазме, а также в магнитном поле с широм условие  $m \gg 1$  достаточно для применимости данной теории ко всем основным гармоникам стоячих альфвеновских волн.

Даже если неравенство (3.7.68) выполнено, условие (3.7.66) нарушается вблизи резонансных поверхностей. Предполагая, что (3.7.68) выполняется, легко видеть, что ВКБ-приближение применимо, если

$$|x^1 - x_{PN}^1| \gg \lambda_{PN}, \quad |x^1 - x_{TN}^1| \gg \lambda_{TN}, \quad (3.7.69)$$

где

$$\lambda_{PN} \sim \widehat{\Delta}_N / (\widehat{k}_2 \widehat{\Delta}_N)^{2/3}, \quad \lambda_{TN} \sim \widehat{\Delta}_N / (\widehat{k}_2 \widehat{\Delta}_N)^2. \quad (3.7.70)$$

Следует подчеркнуть, что  $\lambda_{PN}, \lambda_{TN} \ll \hat{\Delta}_N$ . Таким образом, в окрестностях резонансных поверхностей, где  $|x^1 - x_{PN}^1| \lesssim \lambda_{PN}$  и  $|x^1 - x_{TN}^1| \lesssim \lambda_{TN}$  формулы поперечного ВКБ-приближения неприменимы. В частности, оказывается ошибочным заключение, что амплитуда  $f_N$  на резонансных поверхностях становится бесконечной (или стремится к нулю). Чтобы исследовать решения в окрестностях этих поверхностей, необходимо отказаться от ВКБ-приближения и возвратиться вновь к уравнению (3.7.1).

**3.7.6. Решение вблизи полоидальной резонансной поверхности.** Для возмущений, которые зависят от координаты  $x^2$  как  $e^{ik_2 x^2}$ , однородное уравнение (3.7.1) принимает вид

$$[\nabla_1 \hat{L}_T(\omega) \nabla_1 - k_2^2 \hat{L}_P(\omega)] \varphi = 0. \quad (3.7.71)$$

Найдем его решение вблизи полоидальной поверхности, используя теорию возмущений, основанную на том, что искомое решение близко к полоидальной моде. Это предполагает

$$|\nabla_1 / \sqrt{g_1}| \ll k_2 / \sqrt{g_2}, \quad (3.7.72)$$

т.е. первое слагаемое в (3.7.71) мало. В основном порядке теории возмущений, опуская это слагаемое и используя также приближение нулевого порядка для граничного условия, имеем

$$\hat{L}_P(\omega) \varphi = 0, \quad \varphi|_{l_{\pm}} = 0.$$

Решение этой задачи на собственные значения известно:

$$\varphi = u_N P_N, \quad \omega^2 = \Omega_{PN}^2, \quad (3.7.73)$$

где  $u_N$  — множитель, не зависящий от  $l$ . Сравнивая (3.7.73) с (3.7.4) и (3.7.60), можно видеть, что в области, где применимо ВКБ-приближение по поперечной координате,

$$u_N = (1/k_2) f_N \exp(i\vartheta). \quad (3.7.74)$$

В основном порядке теории возмущений, представленной здесь, множитель  $u_N$  не определен, потому что решение (3.7.73) вырождено. Уравнение для  $u_N$ , как обычно в таком случае, представляет собой условие разрешимости для поправки следующего приближения.

Положим

$$\varphi = u_N(x^1, \omega) P_N(x^1, l) + h_N$$

и линеаризуем (3.7.71), считая первый член этого уравнения, а также функцию  $h_N$  и разность  $\omega^2 - \Omega_{PN}^2$  малыми величинами. Умножая полученное равенство на  $P_N$  и интегрируя вдоль силовой линии, получаем

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 u_N \oint P_N \hat{L}_T(\Omega_{PN}) P_N dl - k_2^2 (\omega^2 - \Omega_{PN}^2) U_N - \\ - k_2^2 \oint P_N \hat{L}_P(\Omega_{PN}) h_N dl = 0. \end{aligned} \quad (3.7.75)$$

Для вычисления последнего слагаемого в этих соотношениях, линеаризуем граничное условие (2.17.44):

$$h_N|_{l_{\pm}} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \frac{\partial P_N}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{\pm}}{V_{p\pm}}. \quad (3.7.76)$$

Здесь, наконец, учтено слагаемое со сторонними токами в ионосфере. Как будет показано ниже, его действительно следует принимать во внимание только в непосредственной близости к полоидальной поверхности. Интегрируя по частям и используя (3.7.57), получаем

$$\oint P_N \widehat{L}_P(\Omega_{PN}) h_N dl = 2i\gamma_N u_N + I_{\parallel},$$

где обозначено

$$I_{\parallel} = 2 \left[ - \left( \frac{\partial P_N}{\partial l} \right)_{l_+} \frac{J_{\parallel}^+}{p_+ V_{p+}} + \left( \frac{\partial P_N}{\partial l} \right)_{l_-} \frac{J_{\parallel}^-}{p_- V_{p-}} \right]. \quad (3.7.77)$$

Принимая во внимание также равенство (3.7.18), получаем из (3.7.75) окончательное уравнение для функции  $u_N$ :

$$w_{PN} \nabla_{\parallel}^2 u_N + k_2^2 [(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{PN}^2] u_N = k_2^2 I_{\parallel}. \quad (3.7.78)$$

Следует подчеркнуть, что это неоднородное уравнение, поэтому оно определяет решение вместе амплитудой.

Коэффициенты уравнения (3.7.78) являются функциями координаты  $x^1$ . Наиболее сильная зависимость от  $x^1$  заключена в квадратные скобки перед  $u_N$ . На полоидальной поверхности выражение в этих скобках стремится к нулю. Другие величины,  $w_{PN}$ ,  $I_{\parallel}$  и  $\gamma_N$ , можно, как правило, считать постоянными в интересующей нас области. Если полоидальная поверхность лежит не слишком близко к экстремуму функции  $\Omega_{PN}(x^1)$ , вблизи этой поверхности применимо разложение (3.7.16). Тогда

$$(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{PN}^2 = \omega^2 \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{a_N} + 2i \frac{\gamma_N}{\omega} \right).$$

Введем безразмерную переменную

$$\xi_{PN} = \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}},$$

определяя константу  $\lambda_{PN}$  соотношением

$$\lambda_{PN} = \left( \frac{w_{PN} a_N}{k_2^2 \omega^2} \right)^{1/3}. \quad (3.7.79)$$

Уравнение (3.7.78) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2 u_N}{d\xi_{PN}^2} + (\xi_{PN} + i\varepsilon_{PN}) u_N = \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \frac{I_{\parallel}}{\omega^2}, \quad (3.7.80)$$

где обозначено

$$\varepsilon_{PN} = 2 \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \frac{\gamma_N}{\omega}.$$

Легко видеть, что величина  $\lambda_{PN}$  имеет ту же размерность, что и координата  $x^1$ , и является характерным масштабом решения по этой координате (при  $\varepsilon_{PN} \lesssim 1$ ). Параметр  $\varepsilon_{PN}$  характеризует роль затухания на ионосфере. При  $\varepsilon_{PN} \ll 1$  эта роль незначительна, а при  $\varepsilon_{PN} \gg 1$ , напротив, это затухание определяет вид решения, а первое слагаемое в (3.7.78) в этом случае можно опустить. Для модели магнитосферы, описанной в разд. 3.7.3, имея в виду соотношение (3.7.47), можно сделать оценку

$$\lambda_{PN} \sim \alpha_N^{1/3} a/m^{2/3}, \quad (3.7.81)$$

что полностью согласуется с определением (3.7.70). Из этой оценки следует, что условие полоидальности моды (3.7.72) эквивалентно неравенству  $\widehat{k}_2 \widehat{\lambda}_{PN} \gg 1$ , которое удовлетворяется при  $m \gg 1/\alpha_N$ . Будем предполагать последнее неравенство выполненным.

Для полного определения решения уравнения (3.7.80) необходимо поставить граничные условия по координате  $x^1$ . В области непрозрачности,  $\xi \rightarrow -\infty$ , естественным представляется условие ограниченности решения. В области прозрачности,  $\xi \rightarrow \infty$ , потребуем, чтобы решение имело вид бегущей волны, которая уносит энергию от полоидальной поверхности. Эти условия основаны на замечательном свойстве решения вблизи тороидальной поверхности. В следующем разделе будет показано, что волна, падающая на тороидальную поверхность, полностью на ней поглощается. Это означает, что нет волны, отраженной от тороидальной поверхности и бегущей к полоидальной поверхности.

Искомое решение уравнения (3.7.80) может быть записано через стандартную функцию  $G(z)$ , которая удовлетворяет неоднородному уравнению Эйри (2.7.20) и упомянутым выше граничным условиям. Эта функция имеет интегральное представление (2.7.21) и асимптотики (2.7.22). Важные свойства функции  $G(z)$  становятся очевидными при сравнении ее в асимптотической области  $z \rightarrow \infty$  с решением однородного уравнения Эйри

$$\overline{G}'' + z\overline{G} = 0.$$

Используя при  $z \gg 1$  ВКБ-приближение для последнего уравнения, получаем общее решение:

$$\overline{G}(z) = \frac{A}{z^{1/4}} \exp\left(i\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + \frac{B}{z^{1/4}} \exp\left(-i\frac{2}{3}z^{3/2}\right).$$

При сравнении с (2.7.22) можно видеть, что функция  $G(z)$  в асимптотической области совпадает с одним из решений однородного уравнения. Другими словами, наличие правой части в уравнении (2.7.20) существенно только при  $z \sim 1$ , а в области  $z \gg 1$  правую часть можно опустить, потому что она не влияет на вид решения. При этом, конечно, следует иметь в виду, что амплитуда и фаза решения

в асимптотической области определяются правой частью в области  $z \sim 1$ . Исследование с помощью функции Грина показывает, что такое свойство функции  $G(z)$  связано с уменьшением характерного пространственного масштаба решения при перемещении в область  $z \gg 1$ . Уменьшение масштаба решения является основной причиной пренебрежения неоднородным членом уравнения. Применяя свойства функции  $G(z)$  к решению уравнения (3.7.80), данному ниже, выясняем, что неоднородный член в граничном условии (3.7.76) следует принимать во внимание только в области  $|x^1 - x_{PN}^1| \sim \lambda_{PN}$ . Это означает пренебрежение им при использовании ВКБ-приближения по координате  $x^1$ .

Используя функцию  $G(z)$ , решение уравнения (3.7.80) можно представить как

$$u_N = \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \frac{I_{\parallel}}{\omega^2} G(\xi_{PN} + i\varepsilon_{PN}) = \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \frac{I_{\parallel}}{\omega^2} G\left(\frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN}\right). \quad (3.7.82)$$

В соответствии с (3.7.73), для потенциала возмущенного электрического поля имеем

$$\varphi_N = \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \frac{I_{\parallel}}{\omega^2} G\left(\frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN}\right) P_N(x^1, l). \quad (3.7.83)$$

Напомним, что эти формулы применимы только вблизи полоидальной поверхности при  $|x^1 - x_{PN}^1| \ll \Delta_N$ .

**3.7.7. Решение вблизи тороидальной резонансной поверхности.** Как и в предшествующем разделе, будем искать решение, используя теорию возмущений, предполагая, что оно близко к тороидальной моде. Это значит, что выполняется неравенство

$$|\nabla_1/\sqrt{g_1}| \gg k_2/\sqrt{g_2}, \quad (3.7.84)$$

противоположное (3.7.72), и второе слагаемое в квадратных скобках уравнения (3.7.71) следует считать малым. В главном порядке теории возмущений имеем

$$\varphi = V_N T_N, \quad \omega^2 = \Omega_{TN}^2, \quad (3.7.85)$$

где  $V_N$  — множитель, не зависящий от  $l$ . В области, где применимо ВКБ-приближение по координате  $x^1$ , имеем

$$V_N = (1/k_1) f_N \exp(i\vartheta). \quad (3.7.86)$$

В следующем порядке предположим, что

$$\varphi = V_N(x^1, \omega) T_N(x^1, l) + h_N.$$

Линеаризация граничного условия дает

$$h_N|_{l_{\pm}} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \frac{\partial T_N}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} V_N. \quad (3.7.87)$$

Здесь термин со сторонними токами опущен ввиду чрезвычайно малого масштаба решения (см. ниже). Линеаризуем уравнение (3.7.71), умно-



жим полученное соотношение на  $T_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. В результате получим

$$\oint T_N \widehat{L}_T(\Omega_{TN}) \nabla_1^2 h_N dl + \nabla_1(\omega^2 - \Omega_{TN}^2) \nabla_1 V_N - k_2^2 V_N \oint T_N \widehat{L}_P(\Omega_{TN}) T_N dl = 0.$$

Интегрируя по частям, используя соотношения (3.7.87) и формулу (3.7.58), имеем

$$\oint T_N \widehat{L}_T(\Omega_{TN}) \nabla_1^2 h_N dl = 2i\gamma_N \nabla_1^2 V_N.$$

Принимая во внимание определение (3.7.19), получаем искомое уравнение для  $V_N$ :

$$\nabla_1[(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{TN}^2] \nabla_1 V_N - k_2^2 \omega_{TN} V_N = 0. \quad (3.7.88)$$

Найдем решение этого уравнения в случае, когда для функции  $\Omega_{TN}(x^1)$  применимо разложение (3.7.16). Введем безразмерную переменную

$$\xi_{TN} = \frac{x^1 - x_{TN}^1}{\lambda_{TN}},$$

определяя константу  $\lambda_{TN}$  соотношением

$$\lambda_{TN} = \frac{\omega^2}{k_2^2 \omega_{TN} a_N}. \quad (3.7.89)$$

Уравнение (3.7.88) можно тогда записать в виде

$$\frac{d}{d\xi_{TN}} (\xi_{TN} + i\varepsilon_{TN}) \frac{d}{d\xi_{TN}} V_N - V_N = 0, \quad (3.7.90)$$

где

$$\varepsilon_{TN} = 2 \frac{a_N}{\lambda_{TN}} \frac{\gamma_N}{\omega}. \quad (3.7.91)$$

Как и в предшествующем разделе, величина  $\lambda_{TN}$  представляет собой характерный масштаб решения в окрестности тороидальной поверхности, а параметр  $\varepsilon_{TN}$  характеризует роль диссипации в ионосфере в этой окрестности. Для модели магнитосферы, используемой здесь, имея в виду оценку (3.7.47), получим по порядку величины

$$\lambda_{TN} \sim a/(\alpha_N m^2). \quad (3.7.92)$$

Это соотношение также совпадает с определением (3.7.70). Условие тороидальности (3.7.84) при использовании (3.7.92) вновь приводит к неравенству  $m \gg 1/\alpha_N$ .

Введем функцию  $g(z)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$(zg')' - g = 0$$

и ограничена при  $z \rightarrow \infty$ . Эта функция выражается через модифицированную функцию Ханкеля нулевого порядка:

$$g(z) = K_0(2z^{1/2}). \quad (3.7.93)$$

Она при  $z \gg 1$  имеет следующее асимптотическое представление:

$$g(z) \approx (\sqrt{\pi}/2)z^{-1/4} \exp(-2z^{1/2}), \quad (3.7.94)$$

которое при малых  $z$  дает

$$g(z) \approx -(1/2) \ln z. \quad (3.7.95)$$

Точка  $z = 0$  является сингулярной точкой поворота. Поведение функции  $g(z)$  при отрицательных  $z$  определяется обходом сингулярной точки. В нашем случае этот путь из-за наличия затухания определяется в соответствии с правилом  $z = \eta + i\varepsilon_{TN}$ . Это приводит к следующему асимптотическому представлению при  $z \rightarrow -\infty$ :

$$g(z) \approx (\sqrt{\pi}/2)(-z)^{-1/4} \exp[-2i(-z)^{1/2} - i\pi/4]. \quad (3.7.96)$$

Решение уравнения (3.7.90) имеет вид

$$V_N = Dg(\xi_{TN} + i\varepsilon_{TN}) = Dg\left(\frac{x^1 - x_{TN}^1}{\lambda_{TN}} + i\varepsilon_{TN}\right), \quad (3.7.97)$$

где  $D$  — произвольная постоянная. В соответствии с (3.7.85), отсюда имеем

$$\varphi_N = Dg\left(\frac{x^1 - x_{TN}^1}{\lambda_{TN}} + i\varepsilon_{TN}\right) T_N(x^1, l). \quad (3.7.98)$$

Это решение в области прозрачности представляет собой волну, прибегающую к тороидальной поверхности и поглощаемую в ее окрестности на масштабе  $|x^1 - x_{TN}^1| \sim \lambda_{TN}$ . Отраженная волна полностью отсутствует. В области непрозрачности решение экспоненциально падает при удалении от тороидальной поверхности. Следует подчеркнуть, что формулы (3.7.97) и (3.7.98) применимы при  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll \Delta_N$ .

**3.7.8. Глобальная структура альфвеновской волны с  $m \gg 1$  (сшивка решений в различных областях).** Чтобы получить полное описание пространственной структуры моды, необходимо сшить решения, полученные в различных областях по  $x^1$ . Для этого удобно использовать безразмерную функцию  $r_N(x^1, l)$ , определяемую равенством

$$r_N = (q_N t_A / v_A)^{1/2} R_N.$$

Она удовлетворяет соотношению

$$\langle r_N^2 \rangle = 1,$$

где обозначено

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t_A} \oint F(l) \frac{dl}{v_A} \quad (3.7.99)$$

— среднее вдоль силовой линии значение для произвольной функции  $F = F(l)$ . Вблизи полоидальной и тороидальной поверхностей имеем соответственно

$$r_N = (t_A/pv_A)^{1/2} P_N, \quad r_N = (t_{Ap}/v_A)^{1/2} T_N.$$

Для больших  $N$ , когда применимо ВКБ-приближение по продольной координате  $l$ ,

$$r_N = \sqrt{2} \sin \left( \frac{2\pi N}{t_A} \int_{l_-}^l \frac{dl'}{v_A} \right).$$

Используя это определение, решение (3.7.83) для возмущенного потенциала вблизи полоидальной поверхности можно представить как

$$\varphi_N = \tilde{\varphi} \left( \frac{pv_A}{p_0 v_{A0}} \right)^{1/2} G \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN} \right) r_N(x^1, l), \quad (3.7.100)$$

где

$$\tilde{\varphi} = \left( \frac{p_0 v_{A0}}{t_A} \right)^{1/2} \frac{a_N I_{\parallel}}{\lambda_{PN} \omega^2},$$

— характерное значение возмущенного потенциала. Здесь индекс «нуль» обозначает экваториальные значения соответствующих параметров. Диапазоны применимости решения (3.7.100) и ВКБ-приближения по поперечной координате перекрываются. В области перекрытия  $\lambda_{PN} \ll x^1 - x_{PN}^1 \ll \Delta_N$ , в соответствии с (2.7.22), из (3.7.100) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_N = & -\sqrt{\pi} \tilde{\varphi} \left( \frac{pv_A}{p_0 v_{A0}} \right)^{1/2} \left( \frac{\lambda_{PN}}{x^1 - x_{PN}^1} \right)^{1/4} \times \\ & \times \exp \left[ \frac{2}{3} i \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} \right)^{3/2} - \varepsilon_{PN} \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} \right)^{1/2} + i \frac{\pi}{4} \right] r_N. \end{aligned} \quad (3.7.101)$$

С другой стороны, из (3.7.20) и (3.7.26), имея ввиду (3.7.79), получаем

$$k_{1N} = \frac{(x^1 - x_{PN}^1)^{1/2}}{\lambda_{PN}^{3/2}}, \quad v_N^1 = v_{PN}^1 \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} \right)^{1/2},$$

где обозначено  $v_{PN}^1 = \omega \lambda_{PN}^2 / a_N$  — характерное значение поперечной групповой скорости в окрестности полоидальной поверхности. Отсюда

$$\begin{aligned} \vartheta = & \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N} dx^{1'} = \frac{2}{3} \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} \right)^{3/2}, \\ \Gamma = & \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} = \varepsilon_{PN} \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Сравнивая (3.7.65) с (3.7.101) в области перекрытия, можно видеть, что функционально они полностью совпадают и по координате  $x^1$ , и по координате  $l$ . Это дает возможность определить постоянную  $C$ . Подставляя эти выражения в общую формулу (3.7.65), получаем решение в области применимости ВКБ-приближения, шитое с решением в окрестности полой поверхности:

$$\varphi_N = -\sqrt{\pi} \tilde{\varphi} \left( \frac{v_{PN}^1}{v_N^1} \frac{p^{-1} k_2^2}{p k_{1N}^2 + p^{-1} k_2^2} \frac{p v_A}{p_0 v_{A0}} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left( i \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N} dx^{1'} - \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} + i \frac{\pi}{4} \right) r_N. \quad (3.7.102)$$

Аналогичным образом шиваем решение (3.7.102) с решением в окрестности тороидальной поверхности. В области их совместной применимости  $\lambda_{TN} \ll x_{TN}^1 - x^1 \ll \Delta_N$  из (3.7.20) и (3.7.27), ввиду определения (3.7.89), имеем

$$k_{1N} = \frac{1}{\lambda_{TN}^{1/2} (x_{TN}^1 - x^1)^{1/2}}, \quad v_N^1 = v_{TN}^1 \left( \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\lambda_{TN}} \right)^{3/2},$$

где  $v_{TN}^1 = \omega \lambda_{TN}^2 / a_N$  — характерное значение  $v_N^1$  в окрестности тороидальной поверхности. Обозначим

$$\bar{\vartheta} = \int_{x_{PN}^1}^{x_{TN}^1} k_{1N} dx^1 \quad (3.7.103)$$

— полный набег квазиклассической фазы между резонансными поверхностями. Следует подчеркнуть, что интеграл (3.7.103) сходится на верхнем пределе. По порядку величины  $\bar{\vartheta} \sim \hat{k}_2 \Delta_N \sim m \alpha_N \gg 1$ . Из этого определения при  $0 \leq x_{TN}^1 - x^1 \ll \Delta_N$  имеем

$$\vartheta(x^1) = \bar{\vartheta} - \int_{x^1}^{x_{TN}^1} k_{1N} dx^{1'} = \bar{\vartheta} - 2 \left( \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\lambda_{TN}} \right)^{1/2}.$$

К сожалению, таким же образом невозможно вычислить значение  $\Gamma(x^1)$ , потому что соответствующий интеграл расходится при  $x^1 \rightarrow x_{TN}^1$ . Введем вспомогательную координату  $\bar{x}^1$ , расположенную в тех же самых пределах:  $0 < x_{TN}^1 - \bar{x}^1 \ll \Delta_N$ . Тогда можно записать

$$\Gamma(x^1) = \int_{x_{PN}^1}^{\bar{x}^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} + \int_{\bar{x}^1}^{x^1} \frac{\gamma_N}{v_N^1} dx^{1'} = \\ = \Gamma(\bar{x}^1) - \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - \bar{x}^1} \right)^{1/2} + \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2}.$$

Легко убедиться, что величина

$$\bar{\Gamma} = \Gamma(\bar{x}^1) - \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - \bar{x}^1} \right)^{1/2} \quad (3.7.104)$$

фактически не зависит от координаты  $\bar{x}^1$ , если последняя находится в вышеупомянутых пределах. Таким образом, вблизи тороидальной поверхности имеем

$$\Gamma(x^1) = \bar{\Gamma} + \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2}.$$

Полученные соотношения позволяют представить формулу ВКБ-приближения (3.7.102) вблизи тороидальной поверхности в виде

$$\begin{aligned} \varphi_N = & -\sqrt{\pi} \hat{k}_2^0 \hat{\lambda}_{PN}^0 \tilde{\varphi} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2} \left( \frac{p_0 v_A}{p v_{A0}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \exp \left[ i \left( \bar{\nu} + \frac{\pi}{4} \right) - \bar{\Gamma} - 2i \left( \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\lambda_{TN}} \right)^{1/2} - \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2} \right] r_N. \end{aligned} \quad (3.7.105)$$

Используя асимптотическое представление (3.7.94), можно убедиться, что решение (3.7.98) при  $x_{TN}^1 - x^1 \gg \lambda_{TN}$  функционально совпадает с решением (3.7.105). Сравнивая их, можно определить константу  $D$ . После этого (3.7.98) принимает вид

$$\varphi_N = -2i \hat{k}_2^0 \hat{\lambda}_{PN}^0 e^{i\bar{\nu} - \bar{\Gamma}} \tilde{\varphi} \left( \frac{p_0 v_A}{p v_{A0}} \right)^{1/2} g \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{\lambda_{TN}} + i\varepsilon_{TN} \right) r_N. \quad (3.7.106)$$

Формулы (3.7.100), (3.7.102) и (3.7.106) в совокупности описывают возмущенный потенциал моды во всем диапазоне ее существования, кроме интервалов, находящихся глубоко в областях непрозрачности, т. е. при  $x^1 - x_{TN}^1 \gg \lambda_{TN}$  и  $x_{PN}^1 - x^1 \gg \lambda_{PN}$ . Решение в них дается ВКБ-приближением (асимптотические значения  $k_{1N}$  определены соотношениями (3.7.21)). Мы не выписываем соответствующие формулы, поскольку амплитуда моды в этих областях пренебрежимо мала, т. е. колебание в них фактически отсутствует.

Полная структура монохроматической стоячей альфвеновской волны с  $m \gg 1$  качественно представлена на рис. 3.33. Монохроматический источник (сторонние токи в ионосфере) возбуждает полоидальную стоячую альфвеновскую волну (с доминирующими компонентами электромагнитного поля  $E_2$  и  $B_1$ ) на полоидальной резонансной магнитной оболочке  $x^1 = x_{PN}^1$ . Волна убегает поперек магнитных оболочек к тороидальной резонансной поверхности  $x^1 = x_{TN}^1$ , где полностью поглощается из-за диссипации ее энергии в проводящем слое ионосферы. Волна остается стоячей вдоль силовых линий магнитного поля в процессе распространения поперек магнитных оболочек, однако ее поляризация

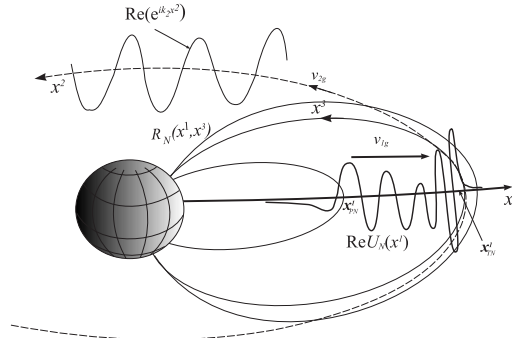


Рис. 3.33. Схематическое представление структуры стоячей альфвеновской волны с  $m \gg 1$  в дипольноподобной магнитосфере. Функция  $R_N(x^1, x^3)$  описывает структуру волны вдоль силовых линий магнитного поля, а  $U_N(x^1)$  — их структуру поперек магнитных оболочек

постепенно меняется и при приближении к тороидальной поверхности становится тороидальной (с доминирующими компонентами  $E_1$  и  $B_2$ ).

### 3.8. Электромагнитные колебания, индуцируемые на поверхности Земли магнитосферными стоячими альфвеновскими волнами с $m \gg 1$

Если характерные поперечные масштабы рассматриваемых альфвеновских колебаний много больше толщины атмосферы, то при проникновении колебаний из магнитосферы на Землю сохраняется их пространственная структура [145, 165]. При этом происходит поворот эллипса поляризации, связанный с возбуждением в ионосфере холловских токов, генерирующих БМЗ-волну, поле которой и проникает на Землю (см. разд. 2.17). Если характерная поперечная длина волны меньше толщины атмосферы, то при проникновении на Землю структура колебаний «расплывается» до масштаба, сравнимого с толщиной атмосферы.

Посмотрим теперь, как проникает из магнитосферы на Землю поле поперечно-мелкомасштабной альфвеновской волны с  $m \gg 1$ . Условие (2.17.46), которое заведомо выполняется для рассматриваемых волн, позволяет пренебречь прямым влиянием сторонних токов в ионосфере на электромагнитные колебания на поверхности Земли. Это объясняется тем, что альфвеновские волны «привязаны» к определенной резонансной магнитной оболочке. Токи в ионосфере раскачивают на ней альфвеновские волны, которые индуцируют на поверхности Земли электромагнитные колебания с амплитудой, значительно большей амплитуды тех колебаний, которые связаны непосредственно с токами. В результате для электромагнитных колебаний, индуцируемых на поверхности Земли ( $z = 0$ ), оказывается возможным использовать

асимптотические выражения (2.17.47), связывающие их с полем альфвеновских колебаний на верхней границе ионосферы ( $z = z_a$ ).

Для описания структуры поля альфвеновских колебаний на верхней границе ионосферы используем компоненты магнитного поля в системе координат  $(n, y, l)$  (см. рис. 2.42), в которой связь компонент  $B_n = B_1/\sqrt{g_1}$  и  $B_l = B_3/\sqrt{g_3}$  с компонентами  $B_x$  и  $B_z$  дается соотношениями (2.17.12). Используя для компонент магнитного поля альфвеновских колебаний уравнения (Д.2) (Приложение Д) и выражения для потенциала  $\varphi$  в различных областях между резонансными поверхностями (3.7.100), (3.7.102), (3.7.106), запишем выражения для компонент магнитного поля колебаний на верхней границе ионосферы  $z = z_a$  (или  $l = l_*$ ) в виде:

при  $|x - x_{PN}| \ll \Delta x_N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{nN}(x, k_y, l_*, \omega) &= B_A G(\xi_{PN}(x, \omega)), \\ \tilde{B}_{yN}(x, k_y, l_*, \omega) &= i \frac{B_A}{k_y \lambda_{PN} \cos \chi} G'(\xi_{PN}(x, \omega)); \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

при  $x - x_{PN} \gg \lambda_{PN}$  и  $x_{TN} - x \gg \lambda_{TN}$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{nN}(x, k_y, l_*, \omega) &= -\sqrt{\pi} B_A \left( \frac{v_{PN}^x k_y^2 \cos^2 \chi}{v_N^x k_{xN}^2 + k_y^2 \cos^2 \chi} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp(i\vartheta_N(x) - \Gamma_N(x) + i\pi/4), \quad (3.8.2) \\ \tilde{B}_{yN}(x, k_y, l_*, \omega) &= -\frac{k_{xN}}{k_y \cos \chi} \tilde{B}_{nN}(x, k_y, l_*, \omega); \end{aligned}$$

при  $|x - x_{TN}| \ll \Delta x_N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{nN}(x, k_y, l_*, \omega) &= -2ik_y \lambda_{PN} \cos \chi B_A g(\xi_{TN}(x, \omega)) \times \\ &\quad \times \exp(i\bar{\vartheta}_N - \bar{\Gamma}_N), \quad (3.8.3) \\ \tilde{B}_{yN}(x, k_y, l_*, \omega) &= 2 \frac{\lambda_{PN}}{\lambda_{TN}} B_A g'(\xi_{TN}(x, \omega)) \exp(i\bar{\vartheta}_N - \bar{\Gamma}_N), \end{aligned}$$

где  $B_A = (k_y c / \omega) (p v_A / p_0 v_{A0})^{1/2} \tilde{\varphi}$  — характерная амплитуда магнитного поля альфвеновских колебаний на верхней границе ионосферы,  $k_y = k_2 / \sqrt{g_2}$ . Отметим, что в этих выражениях тильда сверху обозначает отдельную фурье-гармонику в разложении колебаний не только по частотам  $\omega$ , но и по азимутальным волновым числам  $k_y$ . Аргументы функций в (3.8.1) и (3.8.3) имеют вид

$$\xi_{PN}(x, \omega) = \frac{x - x_{PN}(\omega)}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN}, \quad \xi_{TN}(x, \omega) = \frac{x - x_{TN}(\omega)}{\lambda_{TN}} + i\varepsilon_{TN},$$

где  $\varepsilon_{(P,T)N} = \gamma_{(P,T)N} a_N / \Omega_{(P,T)N} \lambda_{(P,T)N}$ , а  $\gamma_{(P,T)N}$  — значения декремента затухания волн на ионосфере вблизи соответствующих резонансных поверхностей (считаем, что декремент колебаний мал:  $\gamma_{(P,T)N} \ll \Omega_{(P,T)N}$ ). В выражениях (3.8.1)–(3.8.3)  $\lambda_{PN}$  и  $\lambda_{TN}$  — характерная длина альфвеновской волны поперек магнитных оболочек

в окрестностях соответственно полоидальной и тороидальной резонансных поверхностей. Функции  $G(z)$  и  $G'(z)$ ,  $g(z)$  и  $g'(z)$  описывают структуру поля волны по координате  $x$  вблизи этих оболочек и имеют следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} G(z) &= - \int_0^{\infty} \exp(isz - is^3/3) ds, & G'(z) &= \frac{\partial G}{\partial z}, \\ g(z) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} s^{-1} \exp(isz - i/s) ds, & g'(z) &= \frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Выражения (3.8.2) описывают поле волны в области между резонансными поверхностями, где применимо ВКБ-приближение по координате  $x$ . В этих формулах  $k_{x,N}(x, \omega)$  — составляющая горизонтального волнового вектора по координате  $x$  в ВКБ-приближении. Точно определить функцию  $k_{x,N}(x, \omega)$  достаточно сложно (см. разд. 3.7.2), однако ее поведение хорошо моделируется следующим выражением:

$$k_{x,N}(x, \omega) = k_y \left( \frac{x - x_{PN}(\omega)}{x_{TN}(\omega) - x} \right)^{1/2}. \quad (3.8.5)$$

Функция  $v_N^x(x, \omega)$  представляет собой составляющую групповой скорости колебаний по координате  $x$  и определяется как

$$v_N^x(x, \omega) = \frac{\partial k_{x,N}(x, \omega)}{\partial \omega},$$

а  $v_{PN}^x$  — характерное значение  $v_N^x(x, \omega)$  вблизи полоидальной резонансной поверхности, где можно записать

$$v_N^x(x, \omega) \approx v_{PN}^x \sqrt{\frac{x - x_{PN}(\omega)}{\lambda_{PN}}}.$$

Функция

$$\vartheta_N(x) = \int_{x_{PN}}^x k_{x,N}(x', \omega) dx'$$

описывает набег фазы, а

$$\Gamma_N(x) = \int_{x_{PN}}^x \frac{\gamma_N(x', \omega)}{v_N^x(x', \omega)} dx'$$

— интегральный декремент, приобретаемые волной при перемещении поперек магнитных оболочек от полоидальной резонансной поверхности в точку  $x$  внутри интервала  $(x_{PN}, x_{TN})$ . Соответственно,  $\bar{\vartheta} = \vartheta(x_{TN})$  является полным набегом фазы на интервале  $\Delta x_N$ , а  $\bar{\Gamma} = \Gamma(\tilde{x})$  — интегральным декрементом при перемещении волны



от  $x = x_{PN}$  до произвольной точки  $x = \tilde{x}$ , расположенной вблизи тороидальной поверхности:  $|\tilde{x} - x_{TN}| \ll \Delta x_N$ .

Для нахождения структуры поля колебаний на Земле проведем фурье-преобразование выражений (3.8.1)–(3.8.3) по волновым числам  $k_x$ . Затем, используя формулы связи (2.17.47), сделаем обратное Фурье-преобразование поля колебаний на поверхности Земли. С помощью интегральных представлений (3.8.4) находим Фурье-трансформанты функций  $g$  и  $G$  в виде

$$\begin{aligned} \bar{G}(l_*) &= -i2\pi\lambda_{PN}\theta(k_x) \times \\ &\quad \times \exp\left(-i\frac{(k_x\lambda_{PN})^3}{3} - ik_x x_{PN} - \varepsilon_{PN}k_x\lambda_{PN}\right), \\ \bar{G}'(l_*) &= -ik_x\lambda_{PN}\bar{G}(l_*), \\ \bar{g}(l_*) &= \pi k_x^{-1}\theta(k_x) \exp\left(-\frac{i}{k_x\lambda_{TN}} - ik_x x_{TN} - \varepsilon_{TN}k_x\lambda_{TN}\right), \\ \bar{g}'(l_*) &= ik_x\lambda_{TN}\bar{g}(l_*). \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Чтобы провести аналогичное разложение функций (3.8.2), воспользуемся тем, что в показателе их экспоненты имеется большая квазиклассическая фаза  $|\vartheta(x)| \gg 1$ . Это дает возможность при вычислении интегралов вида

$$\bar{B} = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp\left(i\vartheta(x) - ik_x x + i\frac{\pi}{4}\right) dx,$$

где  $A(x)$  — медленно меняющаяся предэкспонента, использовать метод стационарной фазы. Приравняв нулю первую производную от показателя экспоненты, получаем уравнение, определяющее точку перевала  $\bar{x}$ :

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = k_{xN}(\bar{x}, \omega) = k_x. \quad (3.8.7)$$

Вторая производная от фазы в точке перевала имеет вид

$$\left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\frac{\partial k_{xN}(x, \omega)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = -\frac{\omega}{2a_N} \frac{1}{v_N^x(\bar{x}, \omega)}.$$

В этом равенстве использовано то, что рассматриваемая волна локализована в интервале  $\Delta x_N \ll a_N$ . Зависимость  $k_{xN}(x, \omega)$  может быть записана в общем виде как

$$k_{xN}(x, \omega) \equiv k_{xN}(x - x_{PN}(\omega)).$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial k_{xN}}{\partial \omega} = -\frac{\partial x_{PN}}{\partial \omega} \frac{\partial k_{xN}}{\partial x}.$$

Из-за локализации волны в узком интервале магнитных оболочек для  $x_{PN}(\omega)$  можно использовать линейное приближение

$$x_{PN}(\omega) \approx x - 2 \frac{\omega - \Omega_{PN}(x)}{\omega} a_N,$$

что и дает полученный результат. Используя стандартные формулы метода стационарной фазы (см. [281]), получаем

$$\begin{aligned} \bar{B}_{nN}(l_*) &= -2i\pi B_A \theta(k_x) \frac{k_y \lambda_{PN} \cos \chi}{\sqrt{k_{xN}^2 + k_y^2 \cos^2 \chi}} \times \\ &\quad \times \exp(i\vartheta(x, \omega) - ik_x x - \Gamma(x, \omega)), \quad (3.8.8) \\ \bar{B}_{yN}(l_*) &= -\frac{k_x}{k_y \cos \chi} \bar{B}_{nN}(l_*). \end{aligned}$$

При обратном фурье-преобразовании на поверхности Земли функции  $\bar{G}$  и  $\bar{g}$  вновь сворачиваются в  $G$  и  $g$  (так же как и  $\bar{G}'$  и  $\bar{g}'$  в  $G'$  и  $g'$ ) и в результате получаем:

при  $|x - x_{PN}| \ll \Delta x_N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xN}(0) &= i \frac{B_A}{k_y \lambda_{PN} \Sigma_P} \int_0^\infty \left[ \sigma_H(z) - i \frac{k_y}{|k_y|} \sigma_P(z) \sin \chi \right] \times \\ &\quad \times G'(\tilde{\xi}_{PN}(x_z, \omega)) e^{-k_y z} dz, \quad (3.8.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{yN}(0) &= -\frac{B_A}{\Sigma_P} \int_0^\infty \left[ \sigma_H(z) - i \frac{k_y}{|k_y|} \sigma_P(z) \sin \chi \right] \times \\ &\quad \times G(\tilde{\xi}_{PN}(x_z, \omega)) e^{-k_y z} dz, \end{aligned}$$

при  $|x - x_{TN}| \ll \Delta x_N$

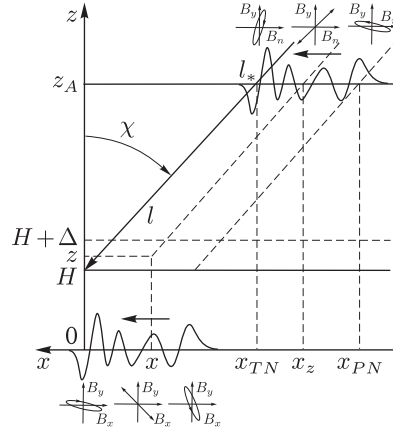
$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xN}(0) &= 2 \frac{\lambda_{PN}}{\lambda_{TN}} \frac{B_A \cos \chi}{\Sigma_P} \exp(i\bar{\vartheta}_N - \bar{\Gamma}_N) \times \int_0^\infty \sigma_H(z) g'(\tilde{\xi}_{TN}(x_z, \omega)) dz, \\ \tilde{B}_{yN}(0) &= 2ik_y \lambda_{PN} \frac{B_A \cos \chi}{\Sigma_P} \exp(i\bar{\vartheta}_N - \bar{\Gamma}_N) \times \int_0^\infty \sigma_H(z) g(\tilde{\xi}_{TN}(x_z, \omega)) dz. \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Здесь  $\sigma_H$  и  $\sigma_P$  — холловская и педерсеновская проводимости плазмы,  $\Sigma_P$  — интегральная педерсеновская проводимость,  $x_z = x + (z - z_a) \operatorname{tg} \chi$  — координата  $x$ , спроецированная вдоль силовой линии с высоты  $z$  на верхнюю границу ионосферы (см. рис. 3.34). Аргументы функций  $g(z)$  и  $G(z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{PN}(x_z, \omega) &= \frac{x_z - x_{PN}}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN}, \\ \tilde{\xi}_{TN}(x_z, \omega) &= \frac{x_z - x_{TN}}{\lambda_{TN}} + i \left( \varepsilon_{TN} + \frac{z}{\lambda_{TN}} \right). \end{aligned}$$

При получении выражений (3.8.9) использовано то, что основной вклад в интеграл Фурье от функций  $G$  и  $G'$  дают гармоники с  $k_x \ll k_y$  и в (2.17.47) можно положить  $k_t \approx k_y$ . Аналогично, при вычислении (3.8.10) использовано то, что в интеграл Фурье от функций  $g$  и  $g'$  основной вклад дают гармоники с  $k_x \gg k_y$  и в (2.17.47) можно считать  $k_t \approx k_x$ .

Рис. 3.34. Схема проникновения поля поперечно-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн с  $m \gg 1$  из магнитосферы ( $z \geq z_A$ ) на поверхность Земли ( $z = 0$ ). Показаны годографы колебаний в плоскости  $(B_x, B_y)$  в различных точках внутри области прозрачности ( $x_{PN}, x_{TN}$ ) на верхней границе ионосферы и на Земле



При проведении обратного преобразования Фурье функций (3.8.8) на поверхности Земли, воспользуемся вновь наличием в показателе экспоненты большой квазиклассической фазы  $|\vartheta(\bar{x}(k_x), \omega)| \gg 1$ . Для вычисления интегралов вида

$$\tilde{B} = \int_0^{\infty} \tilde{A}(k_x) \exp(i\vartheta(\bar{x}(k_x)) - ik_x(x_z - \bar{x}(k_x)) - k_t z) dk_x$$

используем метод стационарной фазы. Здесь  $k_t = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ , а точка перевала  $\bar{x}(k_x)$  определяется уравнением (3.8.7). Приравняв нулю первую производную от показателя экспоненты, получаем уравнение

$$x_z - \bar{x}(\bar{k}_x) + i \frac{\bar{k}_x}{k_t} z = 0,$$

определяющее точку перевала  $\bar{k}_x$  (согласно (3.8.7),  $\bar{k}_x = k_{xN}(\bar{x}(\bar{k}_x), \omega)$ ). Это уравнение можно рассматривать как уравнение определяющее  $\bar{x} = \bar{x}(\bar{k}_x)$  и переписать его в виде

$$x_z - \bar{x} + i \frac{k_{xN}(\bar{x}, \omega)}{\bar{k}_t} z = 0,$$

где  $\bar{k}_t = (k_{xN}^2(\bar{x}, \omega) + k_y^2)^{1/2}$ . Вторая производная от показателя экспоненты в точке перевала равна

$$\frac{2a_N}{\omega} \bar{v}_N^x \equiv \frac{2a_N}{\omega} v_N^x(\bar{x}, \omega) + i \frac{k_y^2}{\bar{k}_t^3} z.$$

Используя стандартные формулы метода стационарной фазы (см. [281]), на поверхности Земли при  $x_z - x_{PN} \gg \lambda_{PN}$  и  $x_{TN} - x_z \gg \lambda_{TN}$  получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{nN}(0) &= \pi \frac{B_A}{\Sigma_P} \int_0^\infty \left[ \sigma_H(z) - i \frac{k_y}{k_t} \sigma_P(z) \sin \chi \right] \times \\ &\quad \times \left( \frac{v_{PN}^x}{|\bar{v}_N^x|} \frac{\bar{k}_{xN}^2 \cos^2 \chi}{\bar{k}_{xN}^2 + k_y^2 \cos^2 \chi} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left( i\vartheta(\bar{x}) - \Gamma(\bar{x}) - \frac{k_y^2 z}{k_t} + i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arg \bar{v}_N^x}{2} \right) \right) dz, \\ \tilde{B}_y(0) &= \sqrt{\pi} \frac{B_A}{\Sigma_P} \int_0^\infty \left[ \sigma_H(z) - i \frac{k_y}{k_t} \sigma_P(z) \sin \chi \right] \times \\ &\quad \times \left( \frac{v_{PN}^x}{|\bar{v}_N^x|} \frac{\bar{k}_y^2 \cos^2 \chi}{\bar{k}_{xN}^2 + k_y^2 \cos^2 \chi} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left( i\vartheta(\bar{x}) - \Gamma(\bar{x}) - \frac{k_y^2 z}{k_t} + i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arg \bar{v}_N^x}{2} \right) \right) dz. \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

Формулы (3.8.9)–(3.8.11) полностью решают задачу о проникновении поля монохроматических поперечно-мелкомасштабных альфвеновских колебаний из магнитосферы на поверхность Земли. Наиболее просто эти формулы записываются, если функции  $\sigma_{P,H}(z)$  локализованы (скажем, на высоте  $H$ ) на масштабе, много меньшем характерного вертикального масштаба волны в ионосфере. В этом случае ионосферу с математической точки зрения можно считать тонким слоем, что позволяет вынести из-под интегралов все функции (за исключением  $\sigma_{P,H}(z)$ ) в точке  $z = H$ . В результате получаем:

при  $|x_H - x_{PN}| \ll \Delta x_N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xN}(0) &= i \frac{\bar{B}}{k_y \lambda_{PN}} G'(\tilde{\xi}_{PN}) \exp(-k_y H), \\ \tilde{B}_{yN}(0) &= -\bar{B} G(\tilde{\xi}_{PN}) \exp(-k_y H); \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

при  $x_H - x_{PN} \gg \lambda_{PN}$  и  $x_{TN} - x_H \gg \lambda_{TN}$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xN}(0) &= \sqrt{\pi} \bar{B} \left( \frac{v_{PN}^x}{|\bar{v}_N^x|} \frac{\bar{k}_{xN}^2 \cos^2 \chi}{\bar{k}_{xN}^2 + k_y^2 \cos^2 \chi} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left[ i\vartheta(\bar{x}) - \Gamma(\bar{x}) - \frac{k_y^2 H}{k_t} + i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arg \bar{v}_N^x}{2} \right) \right], \\ \tilde{B}_{yN}(0) &= \frac{k_y}{\bar{k}_{xN}} \tilde{B}_{xN}(0); \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

при  $|x_H - x_{TN}| \ll \Delta x_N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xN}(0) &= 2 \frac{\lambda_{PN}}{\lambda_{TN}} \bar{B} g'(\tilde{\xi}_{TN}) \exp(i\bar{\nu}_N - \bar{\Gamma}_N), \\ \tilde{B}_{yN}(0) &= 2ik_y \lambda_{PN} \cos \chi \bar{B} g(\tilde{\xi}_{TN}) \exp(i\bar{\nu}_N - \bar{\Gamma}_N). \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{B_A}{\Sigma_P} \left( \Sigma_H - i \frac{k_y}{|k_y|} \Sigma_P \sin \chi \right), \\ x_H &= x + (H - z_A) \operatorname{tg} \chi, \quad \bar{x} = x_H + i \frac{\bar{k}_{xn} H}{\bar{k}_t}, \\ \tilde{x}_{PN} &= \frac{\bar{x} - x_{PN}}{\lambda_{PN}} + i \varepsilon_{PN}, \quad \tilde{\xi}_{TN} = \frac{\bar{x} - x_{TN}}{\lambda_{TN}} + i \varepsilon_{TN}, \\ \bar{v}_N^x &= v_N^x(\bar{x}, \omega) + i \frac{\omega k_y^2 H}{2\bar{k}_t^3 a_{N}}. \end{aligned}$$

Качественно схема проникновения электромагнитного поля альфвеновских колебаний представлена на рис. 3.35. Из верхней ионосферы поле альфвеновской волны проникает в нижнюю ионосферу, где индуцирует токи, порождающие магнитозвуковую волну. Поле магнитозвуковых колебаний переизлучается в атмосферу и достигает поверхности Земли.

На рис. 3.34 представлена схема проникновения на Землю альфвеновских колебаний, у которых длина волны поперек магнитных оболочек больше толщины нейтральной атмосферы ( $\lambda_{(P,T)N} > H$ ). В этом случае при проникновении на Землю структура колебаний по координате  $x$  сохраняется такой же, как и на верхней границе ионосферы (при  $z = z_A$ ). Амплитуда колебаний при этом, конечно, уменьшается как  $\exp(-k_t H)$ . На рис. 3.35 представлена схема проникновения волны, у которой  $\lambda_{TN} < H$ . Видно, что при проникновении на Землю структура колебаний вблизи проекции тороидальной резонансной оболочки «расплывается» и характерная длина волны колебаний по координате  $x$  достигает значения  $\sqrt{\lambda_{TN} H}$ .

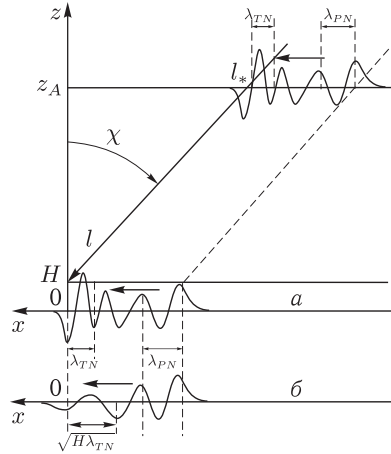


Рис. 3.35. Проникновение поля поперечно-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн с  $m \gg 1$  из магнитосферы на Землю:  $a$  — в случае  $\lambda_{(P,T)N} > H$ ,  $b$  — в случае  $\lambda_{(P,T)N} \lesssim H$

### 3.9. Линейная трансформация стоячих альфвеновских волн с $m \gg 1$ вблизи тороидальной резонансной поверхности

В разд. 3.7 рассмотрена структура монохроматической стоячей альфвеновской волны с  $m \gg 1$ , которая генерируется на полоидальной резонансной поверхности и бежит поперек магнитных оболочек к тороидальной резонансной поверхности, где полностью поглощается. В качестве источника такой волны рассмотрены ионосферные сторонние токи, а механизма ее диссипации — затухание в проводящем слое ионосферы. Если бы не было никаких механизмов диссипации, то поле альфвеновских колебаний в приближении идеальной МГД имело бы сингулярность на тороидальной резонансной поверхности. Однако, как было показано в разд. 3.1, если затухание альфвеновских колебаний мало, то структура волнового поля вблизи тороидальной резонансной поверхности определяется не диссипацией, а генерацией здесь кинетических альфвеновских волн. Эти волны убегают от тороидальной резонансной поверхности поперек магнитных оболочек и уносят энергию от резонансной магнитной оболочки.

Альфвеновские волны, рассмотренные в разд. 3.7, также распространяются поперек магнитных оболочек. Их поперечная дисперсия обусловлена кривизной магнитных силовых линий, а длина волны поперек магнитных оболочек (по координате  $x^1$ ) много больше, чем у кинетических альфвеновских волн [282]. Поэтому далее в этом разделе мы будем называть их крупномасштабными альфвеновскими волнами, в отличие от мелкомасштабных кинетических альфвеновских волн. При слабой диссипации вблизи тороидальной резонансной поверхности такие волны могут трансформироваться в кинетические альфвеновские волны.

Рассмотрим механизм линейной трансформации крупномасштабных альфвеновских волн (дисперсия которых определяется кривизной силовых линий магнитного поля) в кинетические альфвеновские волны. Для этого используем уравнение (3.2.5), в котором пренебрежем правой частью, описывающей поле БМЗ-волны с  $m \gg 1$ , которое во внутренней магнитосфере пренебрежимо мало:

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \Lambda^2 \sqrt{g} \Delta_{\perp}^2 \varphi + \nabla_1 \sqrt{g_3} \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 \sqrt{g_3} \widehat{L}_P \varphi = 0. \quad (3.9.1)$$

В качестве граничного условия на ионосфере используем

$$\varphi|_{l_{\pm}} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{l_{\pm}}, \quad (3.9.2)$$

в котором учтено затухание колебаний, связанное с конечной проводимостью ионосферы, но пренебрежено наличием сторонних токов

(см. (2.17.44)). Как и в предыдущих разделах, будем искать решение (3.9.1) методом разных масштабов, представляя его в виде

$$\varphi = V_N(x^1, \omega)T_N(x^1, l) + h_N,$$

где функция  $V_N(x^1, \omega)$  описывает мелкомасштабную структуру альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек,  $T_N(x^1, l)$  — их структуру вдоль силовых линий магнитного поля в главном порядке, а  $h_N(x^1, l, \omega)$  — представляет собой малую поправку в более высоких порядках теории возмущений. Функции  $T_N(x^1, l)$  являются собственными функциями задачи нулевого порядка

$$\widehat{L}_T(\Omega_{TN})T_N(x^1, l) = 0, \quad T_N(x^1, l_{\pm}) = 0,$$

описывающей структуру стоячих альфвеновских волн на тороидальной резонансной оболочке. Функции  $\Omega_{TN}(x^1)$  являются собственными значениями этой задачи и представляют собой частоты гармоник тороидальных стоячих альфвеновских волн на рассматриваемой магнитной оболочке ( $N = 1, 2, 3, \dots$  — продольное волновое число).

Умножая (3.9.1) слева на  $T_N$  и интегрируя вдоль силовой линии, получаем в первом порядке теории возмущений уравнение для функции  $V_N(x^1)$ :

$$\omega^2 \sigma_N(x^1) \frac{\partial^4 V_N}{\partial x^{14}} + \nabla_1 [(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{TN}^2] \nabla_1 V_N - k_2^2 w_{TN} V_N = 0, \quad (3.9.3)$$

где параметр  $\sigma_N$ , описывающий поперечную дисперсию мелкомасштабных кинетических альфвеновских волн, определяется выражением (3.1.20), параметр  $w_{TN}$ , описывающий дисперсию крупномасштабной альфвеновской волны — (3.7.19), а декремент затухания альфвеновских волн на ионосфере  $\gamma_N$  — (3.7.58). Напомним (см. гл. 1 и разд. 3.1), что параметр  $\sigma_N$  положителен во внешней магнитосфере с «теплой» плазмой ( $\sigma_N > 0$ ), отрицателен внутри плазмосферы, заполненной «холодной» плазмой, ( $\sigma_N < 0$ ) и является комплексным в переходной области плазмопаузы (с  $\text{Im}\sigma_N < 0$ ).

Если применимо ВКБ-приближение, то решение (3.9.3) можно представить в виде

$$V_N \sim \exp\left(i \int k_1 dx^1\right),$$

а для квазиклассического волнового вектора (пренебрегая затуханием колебаний на ионосфере) получаем уравнение

$$\omega^2 \sigma_N k_1^4 - (\omega^2 - \Omega_{TN}^2) k_1^2 - k_2^2 w_{TN} = 0. \quad (3.9.4)$$

Это уравнение можно также рассматривать как соотношение, определяющее локальную частоту колебаний  $\omega$  по их волновому вектору  $k_1$ .

Решая это уравнение относительно  $\omega$ , с учетом условия  $|k_1^2 \sigma_N| \ll 1$ , получим локальное дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \Omega_{TN}^2 + k_1^2 \sigma_N \Omega_{TN}^2 - \frac{k_2^2 w_{TN}}{k_1^2}. \quad (3.9.5)$$

Последнее слагаемое в правой части представляет собой дисперсионную поправку, связанную с крупномасштабной альфвеновской волной. Для крупномасштабных альфвеновских волн, у которых

$$k_1^2 \ll \frac{k_2 w_{TN}^{1/2}}{\sigma_N^{1/2} \omega}, \quad (3.9.6)$$

можно положить

$$\omega^2 \approx \Omega_{TN}^2 - \frac{k_2^2 w_{TN}}{k_1^2}. \quad (3.9.7)$$

Это уравнение можно рассматривать как дисперсионное уравнение для крупномасштабных альфвеновских волн, поперечная дисперсия которых определяется кривизной силовых линий магнитного поля. Следует отметить, что в (3.9.6) нельзя рассматривать предельный случай  $k_1^2 \rightarrow 0$ , при котором приближение ВКБ становится неприменимым. Для мелкомасштабных альфвеновских волн выполняется обратный предельный случай

$$k_1^2 \gg \frac{k_2 w_{TN}^{1/2}}{\sigma_N^{1/2} \omega}.$$

В этом случае

$$\omega^2 \approx \Omega_{TN}^2 (1 + k_1^2 \sigma_N) \quad (3.9.8)$$

— дисперсионное уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению для кинетических альфвеновских волн в однородной плазме (1.0.22). Из (3.9.8) можно определить составляющую групповой скорости мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн по координате  $x^1$ :

$$v_{gN}^1 = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} = \Omega_{TN} k_1 \sigma_N. \quad (3.9.9)$$

Отметим, что в «теплой» плазме ( $\sigma_N > 0$ ) знаки групповой (3.9.9) и фазовой скорости  $\omega/k_1$  совпадают, а в «холодной» плазме ( $\sigma_N < 0$ ) они противоположны.

Вернемся к уравнению (3.9.4). Его решение относительно  $k_1^2$  имеет вид

$$k_1^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \Omega_{TN}^2)^2 + 4k_2^2 \sigma_N \omega^2 w_{TN}}}{2\omega^2 \sigma_N}. \quad (3.9.10)$$

Это уравнение определяет функцию  $k_1^2(x^1)$  по заданной зависимости  $\Omega_{TN}^2(x^1)$ . Ограничимся случаем, когда вблизи тороидальной резо-



нансной поверхности ( $x^1 = x_{TN}^1$ ) можно использовать линейное разложение

$$\Omega_{TN}^2 = \omega^2 \left( 1 - \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N} \right), \quad (3.9.11)$$

где  $a_N$  — характерный масштаб неоднородности функции  $\Omega_{TN}^2(x^1)$  и предполагается  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll a_N$ . Подставляя (3.9.11) в (3.9.10), получаем

$$k_1^2 = \frac{1}{2\sigma_N} \left[ \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N} \pm \sqrt{\left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N} \right)^2 + 4k_2^2 \sigma_N \frac{w_{TN}}{\omega^2}} \right]. \quad (3.9.12)$$

Эта зависимость представлена на рис. 3.36. Вдали от резонансной поверхности, при  $|x^1 - x_{TN}^1| \gg \gg k_2(\sigma_N w_{TN})^{1/2} a_N$ , два корня в (3.9.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} k_1^2 &= -\frac{k_2^2 w_{TN}}{\omega^2} \frac{a_N}{x^1 - x_{TN}^1}, \\ k_1^2 &= \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N \sigma_N}. \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

Первый из них описывает крупномасштабную альфвеновскую волну, дисперсия которой определяется уравнением (3.9.7). Область прозрачности для нее расположена при  $x^1 < x_{TN}^1$ . Второй корень представляет мелкомасштабную (кинетическую) альфвеновскую волну с законом дисперсии (3.9.8). Для нее область прозрачности расположена при  $x^1 < x_{TN}^1$ , если  $\sigma_N < 0$ , и при  $x^1 > x_{TN}^1$ , если  $\sigma_N > 0$ .

Вблизи тороидальной резонансной поверхности происходит трансформация альфвеновских волн одного типа в волны другого типа. Исследуем качественно этот процесс. Вернемся к уравнению (3.9.3). Подставляя в него выражение (3.9.11), получаем

$$\sigma_N(x^1) \frac{\partial^4 V_N}{\partial x^{14}} + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{a_N} + 2i \frac{\gamma_N}{\omega} \right) \frac{\partial V_N}{\partial x^1} - \frac{k_2^2 w_{TN}}{\omega^2} V_N = 0. \quad (3.9.14)$$

Введем безразмерную координату  $\eta = (x^1 - x_{TN}^1)/\lambda_{TN}$ , где  $\lambda_{TN}$  — характерная длина крупномасштабной альфвеновской волны по координате  $x^1$  вблизи тороидальной резонансной поверхности (3.7.89). Тогда,

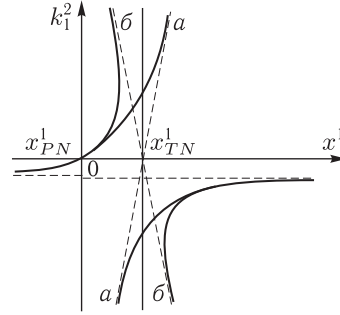


Рис. 3.36. Распределение квадрата квазиклассического волнового вектора  $k_1^2$  по координате  $x^1$ . Наклонные штриховые линии показывают асимптотики  $k_1^2 = (x^1 - x_{TN}^1)/\sigma_N a_N$ . Случай (а) соответствует  $\sigma_N > 0$ , а случай (б) —  $\sigma_N < 0$

переходя в (3.9.14) к комплексной переменной  $z = \eta + i\varepsilon_{TN}$ , где величина  $\varepsilon_{TN}$  определяется как (3.7.91), получим следующее уравнение:

$$\alpha^2 V_N^{IV} + zV_N'' + V_N' - V_N = 0, \quad (3.9.15)$$

где  $\alpha = \sigma_N a_N / \lambda_{TN}^3$ , а верхний индекс  $IV$  и штрихи обозначают производные по  $z$ . Безразмерный параметр  $\alpha^2$  мал:  $|\alpha^2| \ll 1$ . Учитывая, что он комплексный, положим  $\alpha^2 = |\alpha^2|e^{-i\zeta}$ , где  $0 \leq \zeta \leq \pi$ .

Решение уравнения (3.9.15) можно получить, используя метод преобразования Лапласа (см. [283]). Полный набор линейно независимых решений определяется интегралами по траекториям  $C_k$

$$F_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_k} \frac{dt}{t} \exp\left(\frac{\alpha^2}{3}t^3 + \frac{1}{t} + zt\right). \quad (3.9.16)$$

Каждая из траекторий интегрирования  $C_k$  в плоскости комплексной переменной  $t$  определяется требованием, чтобы функция

$$Z(t) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{\alpha^2}{3}t^3 + \frac{1}{t}\right)$$

имела на концах траектории равные значения (или возвращалась к первоначальному значению на замкнутой траектории). Легко проверить, что  $|Z(t)| \rightarrow 0$  при  $|t| \rightarrow \infty$  в секторах

$$\frac{2\pi n + \zeta}{3} + \frac{\pi}{6} < \arg t < \frac{2\pi n + \zeta}{3} + \frac{\pi}{2},$$

где  $n$  — произвольное целое число. Эти сектора показаны на рис. 3.37 белым цветом. Кроме того,  $|Z(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , если  $\operatorname{Re} t < 0$  (скажем, вдоль отрицательной полуоси реальной  $t$ ). Отсюда следует, что решениями (3.9.15) являются интегралы (3.9.16) по одному из контуров  $C_1, C_2, \dots, C_7$ , показанных на рис. 3.37. Поскольку имеется только

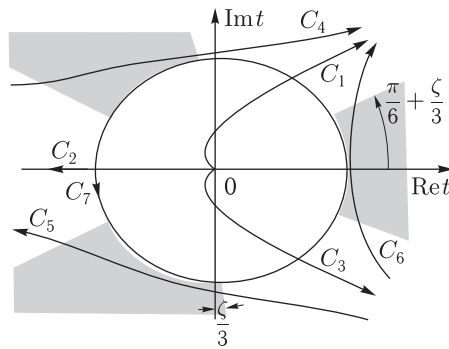


Рис. 3.37. Возможные контуры интегрирования в интегралах (3.9.15). Сектора с экспоненциально растущими асимптотиками показаны серым цветом

четыре линейно независимых решения, между указанными выше решениями  $F_k$  имеются три следующих, связывающих их соотношения:

$$F_4 = F_2 - F_1, \quad F_5 = F_3 - F_2, \quad F_6 = F_1 - F_3 + F_7.$$

Общим решением (3.9.15) является суперпозиция любых четырех линейно независимых функций  $F_k$ .

Конкретный вид этой суперпозиции зависит от выбранных граничных условий при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Для интересующего нас решения их можно сформулировать следующим образом. Во-первых, это должно быть решение, ограниченное по амплитуде. Это означает, что в областях непрозрачности должны отсутствовать растущие асимптотики, как для крупномасштабной, так и для мелкомасштабной альфвеновской волны. Во-вторых, в области прозрачности, вдали от области трансформации мелкомасштабная волна должна быть волной, уносящей энергию (т.е. ее групповая скорость должна быть направлена от тороидальной резонансной поверхности). С физической точки зрения это означает, что кинетическая альфвеновская волна генерируется в результате линейной трансформации крупномасштабной альфвеновской волны. С другой стороны, отсутствуют кинетические альфвеновские волны, приносящие энергию из бесконечности, т.е. волны, сгенерированные другими источниками. Эти требования определяют искомое решение с точностью до произвольного множителя, который задается амплитудой падающей крупномасштабной альфвеновской волны.

Можно проверить, что сформулированным выше условиям удовлетворяет решение  $F_1(z)$ . Рассмотрим асимптотическое представление функции  $F_1(z)$ . Используя стандартные методы расчета, основанные на использовании метода стационарной фазы (см. [281]), получим следующий результат,

$$F_1(z) = (-z)^{-1/4} \exp \left[ -2i(-z)^{1/2} - i\frac{\pi}{4} \right] + \left( -\frac{z}{\mu} \right)^{-3/4} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{2}{3} \left( \cos \frac{\zeta}{2} + i \sin \frac{\zeta}{2} \right) \left( -\frac{z}{\mu} \right)^{3/2} + i\frac{\pi}{2} - i\frac{\zeta}{4} \right], \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.9.17)$$

$$F_1(z) = z^{-1/4} \exp \left( -2z^{1/2} \right) + \left( \frac{z}{\mu} \right)^{-3/4} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{2}{3} \left( \sin \frac{\zeta}{2} - i \cos \frac{\zeta}{2} \right) \left( \frac{z}{\mu} \right)^{3/2} - i\frac{\pi}{4} + i\frac{\zeta}{4} \right], \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.9.18)$$

где обозначено  $\mu = |\alpha|^{2/3}$ . Отсюда видно, что крупномасштабная альфвеновская волна имеет по переменной  $z$  характерный масштаб, равный единице, а мелкомасштабная волна — масштаб, равный  $\mu$ . По переменной  $x^1$  это соответствует масштабам  $\lambda_{TN}$  и  $\mu\lambda_{TN} = |\sigma_N a_N|^{1/3}$ . Конечно, это выполняется только при достаточно малом затухании

альфвеновских волн. Для крупномасштабной моды это означает  $\varepsilon_{TN} \ll \ll 1$ , а для мелкомасштабной

$$\delta_N \equiv \frac{\varepsilon_{TN}}{\mu} \cong 2 \frac{a_N}{\mu \lambda_{TN}} \frac{\gamma_N}{\omega} \ll 1. \quad (3.9.19)$$

Если выполняются обратные неравенства  $\varepsilon_{TN} \gg 1$  и  $\delta_N \gg 1$ , то выражения (3.9.17) и (3.9.18) неприменимы, а характерные масштабы колебаний определяются затуханием мод (см. ниже).

Из (3.9.17), (3.9.18) следует, что при  $z < 0$  крупномасштабная мода в области трансформации представляет собой волну, бегущую к тороидальной резонансной поверхности, а отраженная волна отсутствует. Таким образом, полностью воспроизводится результат, полученный в разд. 3.7, с той только разницей, что крупномасштабная альфвеновская волна не поглощается вблизи тороидальной резонансной поверхности, а полностью трансформируется в кинетическую альфвеновскую волну. Рассмотрим случай  $\sigma_N > 0$  ( $\zeta = 0$ ) и будем считать диссипацию альфвеновских колебаний в ионосфере слабой. В результате, оставляя только основные слагаемые и переходя от безразмерной переменной  $z$  к координате  $x^1$  из (3.9.17), (3.9.18), получим на асимптотиках

$$F_1(x^1) = \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{-1/4} \times \exp \left[ -2i \left( \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\lambda_{TN}} \right)^{1/2} - \varepsilon_{TN} \left( \frac{\lambda_{TN}}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2} - i \frac{\pi}{4} \right], \quad (3.9.20)$$

$x_{TN}^1 - x^1 \gg \lambda_{TN},$

$$F_1(z) = \left( \frac{\mu \lambda_{TN}}{x^1 - x_{TN}^1} \right)^{-1/4} \times \exp \left[ -\frac{2}{3} i \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{\mu \lambda_{TN}} \right)^{3/2} - \delta_N \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{\mu \lambda_{TN}} \right)^{1/2} - i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.9.21)$$

$x^1 - x_{TN}^1 \gg \mu \lambda_{TN}.$

Типичный масштаб затухания мелкомасштабной волны  $\mu \lambda_{TN} / \delta_N^2 \sim \sim (\sigma_N / a_N) (\omega / \gamma)^2$  значительно больше длины волны  $\mu \lambda_{TN}$ , но много меньше (при типичных для магнитосферы значениях параметров) расстояния между тороидальной и полоидальной резонансными поверхностями. Таким образом, после линейной трансформации в мелкомасштабную моду альфвеновская волна поглощается в узкой окрестности тороидальной резонансной оболочки. Если параметр  $\sigma_N$  существенно комплексный (т.е. аргумент  $\zeta$  далек как от  $\zeta = 0$ , так и от  $\zeta = \pi$ ), то масштаб затухания мелкомасштабной моды совпадает с длиной волны  $\mu \lambda_{TN}$ .

Аналогичные расчеты можно сделать и для случая  $\sigma_N < 0$ . В этом случае области прозрачности для крупномасштабной и мелкомасштабной моды совпадают, а их фазовые скорости имеют одинаковое направ-

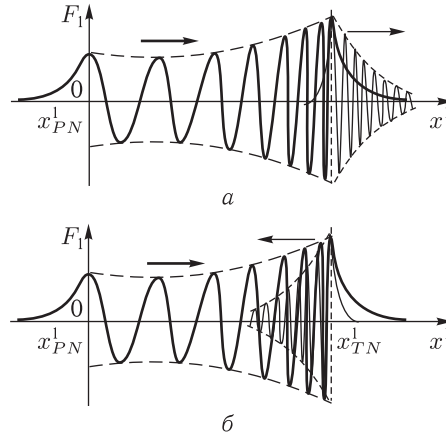


Рис. 3.38. Пространственная структура альфвеновских волн с  $m \gg 1$  поперек магнитных оболочек. Толстая линия — «крупномасштабная» альфвеновская волна, тонкая линия — кинетическая альфвеновская волна. *a* — случай  $\sigma_N > 0$ , *b* — случай  $\sigma_N < 0$

ление — к тороидальной резонансной поверхности. Однако групповая скорость мелкомасштабной моды имеет противоположное направление — она уносит энергию от тороидальной поверхности. Качественно структура альфвеновских колебаний в этих двух случаях представлена на рис. 3.38.

### 3.10. Магнитосферный резонатор для стоячих альфвеновских волн с $m \gg 1$

В разд. 3.7, 3.9 мы рассмотрели структуру стоячих альфвеновских волн с  $m \gg 1$  в областях магнитосферы с монотонным распределением альфвеновской скорости в направлении поперек магнитных оболочек. Точнее сказать, мы рассмотрели области с монотонным распределением функций  $\Omega_{PN}(x^1)$ ,  $\Omega_{TN}(x^1)$ , описывающих частоты стоячих полоидальных и тороидальных альфвеновских волн на различных магнитных оболочках. Однако вблизи экстремумов этих функций ситуация совсем другая.

На рис. 3.39 схематически представлено распределение функций  $\Omega_{PN}(x^1)$ ,  $\Omega_{TN}(x^1)$  в дневной части магнитосферы Земли. Горизонтальные штриховые линии на этом рисунке соответствуют частоте альфвеновских колебаний. Точки пересечения этих линий с графиками функций  $\Omega_{PN}(x^1)$ ,  $\Omega_{TN}(x^1)$  определяют точки поворота для альфвеновских волн по координате  $x^1$  — соответственно обычную  $x^1_{PN}$  (полоидальную) и сингулярную  $x^1_{TN}$  (тороидальную). Область прозрачности альфвеновских колебаний определяется неравенствами  $\Omega_{PN}(x^1) < \omega < \Omega_{TN}(x^1)$ . Проанализируем качественно, что представляют собой эти колебания.

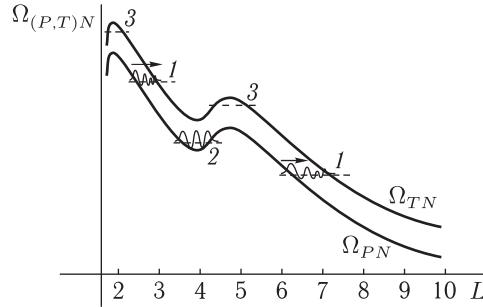


Рис. 3.39. Схематические графики функций  $\Omega_{(P,T)N}(x^1)$  в дневной части магнитосферы Земли. В качестве координаты  $x^1$  использован параметр Макилвейна  $L = a/R_E$ . 1 — область прозрачности расположена между полоидальной и тороидальной резонансными поверхностями; 2 — альфвеновский резонатор; 3 — наличие двух тороидальных точек поворота делает невозможным существование альфвеновских колебаний

Наиболее типичный случай — это когда область прозрачности ограничена с одной стороны обычной точкой поворота  $x_{PN}^1$ , а с другой — сингулярной точкой поворота  $x_{TN}^1$ . Если  $\Omega_{PN}(x^1)$ ,  $\Omega_{TN}(x^1)$  убывают с увеличением радиуса магнитной оболочки, как это имеет место в большей части магнитосферы, то  $x_{TN}^1 > x_{PN}^1$ . Именно этот случай (1 на рис. 3.39) рассмотрен в разд. 3.7, 3.9.

Однако имеется другая возможность. Случай 2 на рис. 3.39 соответствует решению МГД-уравнений, описывающих альфвеновские колебания, ограниченные с двух сторон обычными точками поворота. В этом случае отсутствует сингулярная точка поворота, где происходит полное поглощение энергии альфвеновских волн. В такой области возможно существование собственных колебаний, т.е. колебаний без внешнего источника. Частоты таких колебаний определяются соответствующими условиями квантования. Если применимо приближение ВКБ, то это хорошо известное условие квантования Бора-Зоммерферльда

$$\oint k_{1N}(x^1, \omega) dx^1 = 2\pi(n + \frac{1}{2}), \quad (3.10.1)$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$  — поперечное волновое число. Область существования таких колебаний, ограниченная по продольной координате точками пересечения силовой линии с ионосферой, можно назвать альфвеновским резонатором. Условие квантования определяет спектр частот такого резонатора  $\omega_{Nn}$ , который зависит от двух волновых чисел: продольного  $N$  и поперечного  $n$ .

Получим теперь точные формулы, описывающие собственные колебания альфвеновского резонатора. Вблизи минимума функции  $\Omega_{PN}(x^1)$

используем следующее разложение:

$$\Omega_{PN} = \bar{\Omega}_{PN} \left( 1 + \frac{(x^1 - \bar{x}_{PN}^1)^2}{2a_{PN}^2} \right), \quad (3.10.2)$$

где  $\bar{\Omega}_{PN}$  — значение функции  $\Omega_{PN}(x^1)$  в точке минимума  $x^1 = \bar{x}_{PN}$ , а  $a_{PN} = (\nabla_1^2 \Omega_{PN} / \bar{\Omega}_{PN})_{x^1 = \bar{x}_{PN}}^{-2}$  — характерный масштаб ее изменения здесь. Рассмотрим колебания, частоты которых удовлетворяют условию  $\omega - \bar{\Omega}_{PN} \ll \Delta\Omega_N$ . Такие колебания близки к полоидальной моде во всей области их локализации, и для описания их пространственной структуры поперек магнитных оболочек можно использовать уравнение (3.7.78).

Введем безразмерную переменную

$$\eta = (x^1 - \bar{x}_{PN}^1) / \bar{\lambda}_{PN},$$

где  $\bar{\lambda}_{PN} = (w_{PN} a_{PN} / k_2^2 \omega^2)^{1/4}$  — характерный масштаб рассматриваемых колебаний по координате  $x^1$ . По порядку величины  $\bar{\lambda}_{PN} \sim \sim \alpha_N^{1/2} a / m^{1/2}$ . В области минимума на внутренней кромке плазмопаузы для альфвеновских колебаний с  $N = 1$  и азимутальными волновыми числами  $m = 20 - 50$  получаем оценку  $\bar{\lambda}_{PN} \sim 500 - 1000$  км. Используя эту переменную, можно представить уравнение для поперечной структуры рассматриваемых колебаний вблизи локального минимума в распределении  $\Omega_{PN}(x^1)$  в следующем виде:

$$\frac{d^2 u_N}{d\eta^2} + (\sigma - \eta^2) u_N = \frac{a_{PN}^2}{\bar{\lambda}_{PN}^2} \frac{I_{\parallel}}{\omega^2}, \quad (3.10.3)$$

где обозначено

$$\sigma = \frac{a_{PN}^2}{\bar{\lambda}_{PN}^2} \frac{(\omega + i\gamma_N)^2 - \bar{\Omega}_{PN}^2}{\omega^2}.$$

Если сторонние токи в ионосфере отсутствуют, то правая часть в (3.10.3) обращается в нуль и при требовании ограниченности решения на асимптотиках  $\eta \rightarrow \pm\infty$  мы получаем хорошо известную задачу на собственные значения для квантового осциллятора (см. разд. 2.8). Ее решения

$$u_n = C_n y_n(\eta), \quad \sigma = \sigma_n = 2n + 1, \quad (3.10.4)$$

где

$$y_n(\eta) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} e^{-\eta^2/2} H_n(\eta),$$

$H_n(\eta)$  — полиномы Эрмита. Функции  $y_n(\eta)$  ортонормированы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_n(\eta) y_{n'}(\eta) d\eta = \delta_{nn'}.$$

Решение (3.10.4) определяет собственные функции и собственные частоты альфвеновского резонатора:

$$\varphi = C_n y_n \left( \frac{x^1 - \bar{x}_{PN}^1}{\bar{\lambda}_{PN}} \right) P_N(x^1, l), \quad \omega = \omega_{Nn} - i\gamma_N, \quad (3.10.5)$$

$$\omega_{Nn} = \bar{\Omega}_{PN} \left[ 1 + \frac{\bar{\lambda}_{PN}^2}{a_{PN}^2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Отметим, что собственные частоты в (3.10.5) можно получить прямо из условия квантования (3.10.1) даже для малых  $n \sim 1$  — факт, хорошо известный для квантового осциллятора.

Теперь можно легко получить решение неоднородного уравнения (3.10.3) с помощью функции Грина его левой части

$$G(\eta, \eta', \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(\eta) y_n(\eta')}{\sigma - \sigma_n},$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} + (\sigma - \eta^2) G = \delta(\eta - \eta'). \quad (3.10.6)$$

Имеем

$$\varphi = u_N P_N = P_N(x^1, l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\omega + i\gamma_N)^2 - \omega_{Nn}^2} y_n \left( \frac{x^1 - \bar{x}_{PN}^1}{\bar{\lambda}_{PN}} \right), \quad (3.10.7)$$

где

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(\eta) I_{\parallel}(\bar{x}_{PN}^1 + \bar{\lambda}_{PN} \eta) d\eta.$$

Это решение представляет собой суперпозицию собственных мод, возбуждаемых монохроматическим источником с частотой  $\omega$  (например, сторонними токами в ионосфере), в области альфвеновского резонатора. Если частота  $\omega$  близка к одной из собственных частот резонатора  $\omega_{Nn}$ , так что разность  $\omega - \omega_{Nn}$  много меньше расщепления собственных частот  $(\bar{\lambda}_{PN}^2/a_{PN}^2)\bar{\Omega}_{PN}$ , и декремент затухания  $\gamma_N$  достаточно мал, то одно слагаемое, соответствующее резонансной частоте, будет доминирующим в сумме (3.10.7).

Что касается случая 3 на рис. 3.39, то простые рассуждения показывают, что решение, соответствующее заданным граничным условиям, не существует. В самом деле, область прозрачности колебаний в этом случае ограничена двумя сингулярными точками поворота. Как мы видели в разделе 3.7, в этом случае решение, ограниченное в области непрозрачности, в области прозрачности представляет собой волну, бегущую к сингулярной точке поворота. Однако не существует волны, бегущей одновременно к двум противоположным точкам поворота.



### 3.11. Альфвеновские волны с $m \gg 1$ , генерируемые в магнитосфере стохастическими источниками

В предшествующих разделах была исследована структура поля отдельной гармоники поперечно-мелкомасштабных альфвеновских колебаний, генерируемых в дипольноподобной магнитосфере монохроматическим источником. В качестве источника рассмотрены сторонние токи в ионосфере. Рассмотрим теперь генерацию альфвеновских волн с  $m \gg 1$  широкополосными источниками.

Широкополосные колебания можно условно разделить на два больших класса. Один из них — это стохастические колебания, возбуждаемые шумовыми источниками, т.е. источниками, амплитуда которых — случайная функция времени. Сторонние токи в ионосфере, предложенные как возможный источник стоячих альфвеновских волн с  $m \gg 1$ , также, скорее всего, имеют шумовую природу. Стохастические колебания характеризуются своими корреляционными свойствами (см. [284]). Простейшим примером являются колебания типа «белый шум», в которых полностью отсутствует корреляция на разных частотах. По-видимому, большинство геомагнитных пульсаций можно отнести к классу стохастических колебаний. Другой класс колебаний — нестационарные колебания, возбуждаемые широкополосными коррелированными источниками. Рассмотрим сначала колебания, генерируемые в магнитосфере стохастическими источниками.

**3.11.1. Выражения для физических компонент магнитного поля альфвеновских колебаний.** Магнитное поле является наиболее часто регистрируемым в наблюдениях параметром МГД-колебаний. Исследуем поведение альфвеновских колебаний, рассматривая физические компоненты их магнитного поля  $\hat{B}_i(x^1, l, \omega) = \tilde{B}_i(x^1, l, \omega)/\sqrt{g_i}$ , где тильда сверху обозначает отдельную гармонику колебаний с заданной частотой  $\omega$ , а индексы  $i = 1, 2, 3$  соответствуют компонентам в системе криволинейных координат  $(x^1, x^2, x^3)$  (см. рис. 3.1). Для того чтобы получить выражения для этих компонент, представим фурье-гармонику скалярного потенциала поля колебаний в виде произведения трех функций:

$$\varphi(x^1, l, \omega) = \tilde{\varphi}_N(x^1, \omega) \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \tilde{Z}_N(x^1, l, \omega). \quad (3.11.1)$$

Здесь, в отличие от обозначений, использованных в предшествующих разделах, в явном виде выделена амплитуда колебаний  $\tilde{\varphi}_N(x^1, \omega)$ , которая определяется источником (сторонними токами в ионосфере) и сравнительно слабо зависит от  $x^1$ . Функция  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  описывает мелкомасштабную структуру волны поперек магнитных оболочек.

Функция  $\tilde{Z}_N(x^1, l, \omega)$  описывает продольную структуру стоячей альфвеновской волны. Она является решением той же продольной

задачи на собственные значения (3.7.12), что и использованные ранее функции  $R_N(x^1, l, \omega)$  и  $r_N(x^1, l, \omega)$ , но отличается от них нормировкой:

$$\left\langle \frac{q_N}{v_A} \tilde{Z}_N^2 \right\rangle = \frac{q_N^{(0)}}{v_{A0}},$$

где угловые скобки обозначают среднее вдоль силовой линии значение стоящей в них величины (3.7.99). Здесь  $q_N = pk_{1N}^2 + p^{-1}k_2^2$ , а индексом ноль обозначены экваториальные значения соответствующих величин (при  $l = 0$ ). Если полоидальную и тороидальную продольные собственные функции нормировать как

$$\left\langle \frac{1}{pv_A} P_N^2 \right\rangle = \frac{1}{p_0 v_{A0}}, \quad \left\langle \frac{p}{v_A} T_N^2 \right\rangle = \frac{p_0}{v_{A0}},$$

то их связь с  $\tilde{Z}_N(x^1, l, \omega)$  определяется следующими соотношениями:

$$P_N(x^1, l) = \tilde{Z}_N(x^1, l, \Omega_{PN}(x^1)), \quad T_N(x^1, l) = \tilde{Z}_N(x^1, l, \Omega_{TN}(x^1)).$$

При этом для функции  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$ , описывающей структуру колебаний поперек магнитных оболочек, получаем следующие выражения:

1) вблизи полоидальной резонансной поверхности при  $|x^1 - x_{PN}^1| \ll \ll \Delta x_N^1$  ( $|\omega - \Omega_{PN}| \ll \Delta \Omega_N$ )

$$\tilde{Q}_N(x^1, \omega) = G \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\lambda_{PN}} + i\varepsilon_{PN} \right) = G \left( \frac{\omega - \Omega_{PN}}{\omega_{PN}} + i\varepsilon_{PN} \right), \quad (3.11.2)$$

где  $\omega_{PN} = \Omega_{PN} \lambda_{PN} / 2a_N$ ;

2) в области  $x_{PN}^1 < x^1 < x_{TN}^1$  (при  $x^1 - x_{PN}^1 \gg \lambda_{PN}, (\gamma_N/\omega)a_N$  и  $x_{TN}^1 - x^1 \gg \lambda_{TN}, (\gamma_N/\omega)a_N$ ), где (и если) применимо приближение ВКБ по координате  $x^1$ ,

$$\tilde{Q}_N(x^1, \omega) = \left( \frac{v_{PN}^1}{v_N^1} \frac{p_0^{-1} k_2^2}{p_0 k_{1N}^2 + p_0^{-1} k_2^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left[ i\vartheta_N(x^1, \omega) - \Gamma_N(x^1, \omega) + i\frac{\pi}{4} \right], \quad (3.11.3)$$

3) вблизи тороидальной резонансной поверхности при  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll \ll \Delta x_N^1$  ( $|\omega - \Omega_{TN}| \ll \Delta \Omega_N$ )

$$\tilde{Q}_N(x^1, \omega) = \\ = \frac{k_2 \lambda_{PN}}{p_0} \exp \left[ i\bar{\vartheta}_N(\omega) - \bar{\Gamma}_N(\omega) + i\frac{\pi}{2} \right] g \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1}{\lambda_{TN}} + i\varepsilon_{TN} \right) = \\ = \frac{k_2 \lambda_{TN}}{p_0} \exp \left[ i\bar{\vartheta}_N(\omega) - \bar{\Gamma}_N(\omega) + i\frac{\pi}{2} \right] g \left( \frac{\omega - \Omega_{TN}}{\omega_{TN}} + i\varepsilon_{TN} \right), \quad (3.11.4)$$

где  $\omega_{TN} = \Omega_{TN}\lambda_{TN}/2a_N$ . Здесь функция  $G(z)$ , описывающая структуру колебаний вблизи полоидальной поверхности, имеет следующее интегральное представление:

$$G(z) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(isz - i\frac{s^3}{3}\right) ds, \quad (3.11.5)$$

а ее асимптотики (с точностью до постоянного множителя порядка единицы) определяются выражениями (2.7.22). Функция  $g(z)$ , описывающая структуру колебаний вблизи тороидальной поверхности, выражается через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка (3.7.93) и имеет интегральное представление

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(isz + \frac{i}{s}\right) \frac{ds}{s}. \quad (3.11.6)$$

Ее асимптотики определяются выражениями (3.7.94), (3.7.96). Характерная длина волны по координате  $x^1$  вблизи полоидальной ( $\lambda_{PN}$ ) и тороидальной ( $\lambda_{TN}$ ) резонансных поверхностей определяется как (3.7.79) и (3.7.89) соответственно. Групповая скорость стоячих альфвеновских волн  $v_N^1$  (по координате  $x^1$ ) определяется как (3.7.23), а ее характерное значение вблизи полоидальной резонансной поверхности  $v_{PN}^1 = \lambda_{PN}^2 \Omega_{PN}/a_N$ . Интегральная фаза колебаний  $\vartheta_N$  определяется выражением (3.7.10), а интегральный декремент  $\Gamma_N$  — (3.7.52). Полный набег фазы колебаний между резонансными поверхностями  $\bar{\vartheta}_N$  определяется как (3.7.103), а их полный декремент  $\bar{\Gamma}_N$  — как (3.7.104).

Теперь, используя для компонент магнитного поля колебаний выражения (Д.2) (Приложение Д), для физических компонент поля колебаний стоячих альфвеновских волн запишем

$$\widehat{B}_i(x^1, l, \omega) = \widetilde{B}_N(x^1, \omega) \widetilde{Q}_N^{(i)}(x^1, \omega) \widetilde{Y}_N^{(i)}(x^1, l, \omega). \quad (3.11.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widetilde{B}_N(x^1, \omega) = \frac{ck_2}{v_{A0} \sqrt{g_2^{(0)}}} \widetilde{\varphi}_N(x^1, \omega) \quad (3.11.8)$$

— характерная амплитуда магнитного поля колебаний,

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_N^{(1)} &= \sqrt{\frac{g_2^{(0)}}{g_2}} \widetilde{Y}_N, & \widetilde{Y}_N^{(2)} &= \sqrt{\frac{g_1^{(0)}}{g_1}} \widetilde{Y}_N, \\ \widetilde{Y}_N^{(3)} &= \sqrt{\frac{g_2^{(0)}}{k_2}} \frac{\partial \ln p}{\partial l} \frac{q_N^{(0)}}{q_N} \widetilde{Y}_N \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

— функции, описывающие структуру его компонент вдоль силовых линий фонового магнитного поля, где

$$\tilde{Y}_N(x^1, l, \omega) = \frac{v_{A0}}{\omega} \frac{\partial \tilde{Z}_N(x^1, l, \omega)}{\partial l}. \quad (3.11.10)$$

При  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$  обозначим соответствующие функции как

$$Y_{PN}^{(1)} = \sqrt{\frac{g_2^{(0)}}{g_2}} Y_{PN}, \quad Y_{PN}^{(2)} = \sqrt{\frac{g_1^{(0)}}{g_1}} Y_{PN}, \quad Y_{PN}^{(3)} = \frac{\sqrt{g_2^{(0)}}}{k_2} \frac{\partial \ln p}{\partial l} \frac{p}{p_0} Y_{PN},$$

$$Y_{PN}(x^1, l) = \tilde{Z}_N(x^1, l, \Omega_{PN}(x^1)) = \frac{v_{A0}}{\omega} \frac{\partial P_N(x^1, l)}{\partial l}.$$

Аналогично, при  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$

$$Y_{TN}^{(1)} = \sqrt{\frac{g_2^{(0)}}{g_2}} Y_{TN}, \quad Y_{TN}^{(2)} = \sqrt{\frac{g_1^{(0)}}{g_1}} Y_{TN}, \quad Y_{TN}^{(3)} = \frac{\sqrt{g_2^{(0)}}}{k_2} \frac{\partial \ln p}{\partial l} \frac{p_0}{p} Y_{TN},$$

$$Y_{TN}(x^1, l) = \tilde{Z}_N(x^1, l, \Omega_{TN}(x^1)) = \frac{v_{A0}}{\omega} \frac{\partial T_N(x^1, l)}{\partial l}.$$

Кроме того, обозначим

$$\tilde{Q}_N^{(1)} = \tilde{Q}_N, \quad \tilde{Q}_N^{(2)} = i \frac{p_0}{k_2} \nabla_1 \tilde{Q}_N \quad (3.11.11)$$

и введем функцию  $\tilde{Q}_N^{(3)}$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\perp}^{(0)} \tilde{Q}_N^{(3)} = \frac{2k_2}{\sqrt{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}} \nabla_1 \tilde{Q}_N.$$

В области, где применимо приближение ВКБ,

$$\tilde{Q}_N^{(2)} = -p_0 \frac{k_{1N}}{k_2} \tilde{Q}_N, \quad \tilde{Q}_N^{(3)} = -\frac{2ik_{1N}k_2}{q_N^{(0)}} \tilde{Q}_N. \quad (3.11.12)$$

Вблизи полоидальной поверхности

$$\tilde{Q}_N^{(3)} = -\frac{2p_0}{k_2} \nabla_1 \tilde{Q}_N,$$

а вблизи тороидальной поверхности

$$\tilde{Q}_N^{(3)}(x^1, \omega) = \frac{2k_2}{p_0} \int_{-\infty}^{x^1} Q_N(x^{1'}, \omega) dx^{1'}.$$

Отметим, что все функции  $\tilde{Q}_N^{(i)}$  безразмерны и порядка единицы, функции  $\tilde{Y}_N^{(i)}$  также безразмерны, причем  $\tilde{Y}_N^{(1)}$  и  $\tilde{Y}_N^{(2)}$  порядка единицы, а  $\tilde{Y}_N^{(3)} \sim \tilde{Y}_N^{(1,2)}/m$ .

**3.11.2. Статистические свойства источника колебаний.** Рассмотрим альфвеновские колебания, источником которых является сторонний ток в ионосфере. Полную плотность тока в ионосфере  $\mathbf{j}$  можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(\text{ext})},$$

где  $\hat{\sigma}$  — тензор проводимости, а  $\mathbf{j}^{(\text{ext})}$  — плотность стороннего тока, имеющего неэлектромагнитное происхождение. Он может генерироваться движением нейтралов в акустико-гравитационных (АГВ) или внутренних гравитационных волнах (ВГВ) в слое E ионосферы. Обозначим через  $\tilde{j}_{\parallel}^{(\pm)}$  фурье-компоненту продольной составляющей  $\mathbf{j}^{(\text{ext})}$  в сопряженных ионосферах (плюс — в северной, минус — в южной). Введем функции  $\tilde{J}^{(\pm)}(x^1, \omega)$ , определив их уравнениями

$$\Delta_{\perp}^{(\pm)} \tilde{J}^{(\pm)} = \tilde{j}_{\parallel}^{(\pm)}. \quad (3.11.13)$$

Здесь

$$\Delta_{\perp}^{(\pm)} = \frac{1}{g_1^{(\pm)}} \nabla_1^2 - \frac{k_2^2}{g_2^{(\pm)}}$$

— поперечный лапласиан для альфвеновских волн на уровне ионосферы. Амплитуда стоячей альфвеновской волны, фигурирующая в формулах (3.11.7), (3.11.8), выражается через  $\tilde{J}^{(\pm)}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_N = & \frac{2\pi k_2}{\sqrt{g_1^{(0)}} c\omega v_{A0} t_A} \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \times \\ & \times \left[ -\frac{\Sigma_P^{(+)}}{p_+} \tilde{J}^{(+)} \tilde{Y}_N(l_+) + \frac{\Sigma_P^{(-)}}{p_-} \tilde{J}^{(-)} \tilde{Y}_N(l_-) \right]. \end{aligned} \quad (3.11.14)$$

Здесь  $\Sigma_P^{(\pm)}$  — интегральные педерсеновские проводимости сопряженных ионосфер.

Для стохастического источника колебаний функции  $\tilde{J}^{(\pm)}(x^1, \omega)$  являются случайными функциями частоты  $\omega$ . Их статистические свойства характеризуются заданием корреляционных функций. Будем предполагать, что сторонние токи сопряженных полушарий не коррелируют друг с другом:

$$\langle \tilde{j}_{\parallel}^{(+)*}(x^1, \omega) \tilde{j}_{\parallel}^{(-)}(x^1, \omega') \rangle = 0. \quad (3.11.15)$$

Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю. Для автокорреляторов мы примем самую простую модель — модель «белого шума». Иными словами, положим

$$\langle \tilde{j}_{\parallel}^{(\pm)*}(x^1, \omega) \tilde{j}_{\parallel}^{(\pm)}(x^1, \omega') \rangle = f^{(\pm)}(x^1, x^1, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (3.11.16)$$

где  $f^{(\pm)}(x^1, x^1, \omega)$  — корреляционные функции.

В силу уравнения (3.11.13) функции  $\tilde{J}^{(\pm)}(x^1, \omega)$  также являются случайными функциями  $\omega$  и обладают статистическими свойствами

«белого шума». Действительно, пусть  $\Upsilon^{(\pm)}(x^1, y^1, \omega)$  — функция Грина уравнения (3.11.13), тогда

$$\tilde{\mathcal{J}}^{(\pm)}(x^1, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon^{(\pm)}(x^1, y^1, \omega) \tilde{j}_{\parallel}^{(\pm)}(y^1, \omega) dy^1. \quad (3.11.17)$$

Интегрирование по  $y^1$  формально распространено на интервал  $(-\infty, \infty)$ , но имеется в виду, что в действительности оно осуществляется по области локализации стороннего тока  $\tilde{j}_{\parallel}$ . Из (3.11.15), (3.11.16) и (3.11.17) следует

$$\langle \tilde{\mathcal{J}}^{(+)*}(x^1, \omega) \tilde{\mathcal{J}}^{(-)}(x^1, \omega') \rangle = 0, \quad (3.11.18)$$

$$\langle \tilde{\mathcal{J}}^{(\pm)*}(x^1, \omega) \tilde{\mathcal{J}}^{(\pm)}(x^1, \omega') \rangle = F^{(\pm)}(x^1, x^1, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (3.11.19)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(\pm)}(x^1, x^1, \omega) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \int_{-\infty}^{\infty} dy'^1 \tilde{\Upsilon}^{(\pm)}(x^1, y^1, \omega) \Upsilon^{(\pm)}(x^1, y'^1, \omega) f^{(\pm)}(y^1, y'^1, \omega). \end{aligned}$$

Используя (3.11.14), (3.11.18), (3.11.19), нетрудно убедиться, что амплитудная функция  $\tilde{B}_N(x^1, \omega)$  также обладает свойствами «белого шума». В дальнейшем нам понадобится коррелятор

$$\langle \tilde{B}_N^*(x^1, \omega) \tilde{B}_N(x^1, \omega') \rangle = \frac{1}{|\omega|} B_N^2(x^1, \omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (3.11.20)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} B_N^2(x^1, \omega) &= \frac{1}{g_1^{(0)} |\omega|} \left( \frac{8\pi k_2}{cv_{A0} t_A} \right)^2 \left( \frac{a_N}{\lambda_{PN}} \right)^2 \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\Sigma_P^{(+)} \tilde{Y}_N(l_+)}{p_+} \right)^2 F^{(+)}(x^1, x^1, \omega) + \left( \frac{\Sigma_P^{(-)} \tilde{Y}_N(l_-)}{p_-} \right)^2 F^{(-)}(x^1, x^1, \omega) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что функция  $B_N(x^1, \omega)$  имеет размерность индукции магнитного поля.

**3.11.3. Спектральные и поляризационные свойства альфвеновских шумов.** Стохастическая природа источника приводит к стохастическому характеру порождаемых им стоячих альфвеновских волн. Для описания их статистических свойств мы рассмотрим корреляторы компонент возмущенного магнитного поля. Из формул (3.11.7) и (3.11.20) имеем

$$\langle \hat{B}_i^*(x^1, l, \omega) \hat{B}_j(x^1, l, \omega') \rangle = \mathcal{P}_{ij}(x^1, l, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (3.11.21)$$

где

$$\mathcal{P}_{ij}(x^1, l, \omega) = \frac{1}{|\omega|} B_N^2(x^1, \omega) \times \\ \times \tilde{Q}_N^{(i)*}(x^1, \omega) \tilde{Q}_N^{(j)}(x^1, \omega) \tilde{Y}_N^{(i)}(x^1, l, \omega) \tilde{Y}_N^{(j)}(x^1, l, \omega). \quad (3.11.22)$$

Таким образом, стоячие альфвеновские волны также представляют собой «белый шум», а функции  $\mathcal{P}_{ij}(x^1, l, \omega)$  имеют смысл спектральных плотностей колебаний в данной точке пространства  $(x^1, l)$ . В дальнейшем мы ограничимся изучением функций  $\mathcal{P}_{11}$ ,  $\mathcal{P}_{12}$ ,  $\mathcal{P}_{22}$ , и  $\mathcal{P}_{33}$ . Первые три из них описывают поперечные, а последняя — продольную компоненты возмущенного магнитного поля альфвеновских колебаний.

Произвольные функции времени можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x^1, x^3, \omega) e^{ik_2 x^2 - i\omega t} d\omega. \quad (3.11.23)$$

Амплитуда альфвеновских волн в точке  $(x^1, l)$  определяется корреляторами

$$P_{ij}(x^1, l) = \langle \hat{B}_i(x^1, l, t) \hat{B}_j(x^1, l, t) \rangle.$$

Из (3.11.21) и (3.11.23) нетрудно получить

$$P_{ij}(x^1, l) = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{ij}(x^1, l, \omega) d\omega. \quad (3.11.24)$$

В силу стационарности выбранной модели случайного источника эти корреляторы не зависят от времени  $t$ .

Свойства спектральных плотностей как функций частоты  $\omega$  определяются, главным образом, функциями  $\tilde{Q}_N^{(i)*}(x^1, \omega)$  и  $\tilde{Q}_N^{(j)}(x^1, \omega)$ , входящими в выражение (3.11.22). Их наличие приводит к тому, что функции  $\mathcal{P}_{ij}$  имеют острые пики вблизи частот  $\Omega_{PN}$  и  $\Omega_{TN}$ . Они сосредоточены в основном в интервале  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$  и быстро убывают при удалении от него. Гораздо более плавная зависимость функций  $\tilde{Y}_N^{(i)}$  от  $\omega$  не сказывается качественно на поведении  $\mathcal{P}_{ij}$ . В еще большей степени это относится к функции  $B_N^2$ . Мы будем предполагать, что ширина спектра источника много больше  $\Delta\Omega_N$ , поэтому функцию  $B_N^2(x^1, \omega)$  можно считать постоянной в интервале  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$ .

Особый интерес представляет вопрос о том, на каких частотах сосредоточен спектр альфвеновских шумов (вблизи  $\Omega_{PN}$ , либо вблизи  $\Omega_{TN}$ , либо во всем интервале между ними). Другими словами, в какой области частот в основном набирается интеграл (3.11.24)? Как будет видно ниже, ответ на этот вопрос зависит от величины затухания стоячих альфвеновских волн в ионосфере. Имеются два предельных случая большого и малого затухания. В первом случае

монохроматические волны, составляющие альфвеновский шум и бегущие от полоидальной поверхности к тороидальной, затухают вблизи полоидальной поверхности на длине много меньше расстояния между резонансными поверхностями. Согласно (3.7.32) и (3.7.48), характерное время пробега между этими поверхностями  $\tau \sim m/\omega$ , следовательно коэффициент ослабления волны  $\gamma_N \tau_N \sim m(\gamma_N/\omega)$ . Сильное затухание означает, что  $m(\gamma_N/\omega) \gg 1$ . В этом случае энергия альфвеновских колебаний сосредоточена вблизи  $\Omega_{PN}$  и колебания носят полоидальный характер, т. е. радиальная компонента возмущенного магнитного поля много больше азимутальной. При малом затухании,  $m(\gamma_N/\omega) \ll 1$ , монохроматические волны добегают до окрестности тороидальной поверхности без заметного затухания и накапливаются там в силу быстрого уменьшения групповой скорости  $v_N^1$  при приближении к тороидальной поверхности (см. (3.7.29)). В результате спектр шумов сосредоточен вблизи частоты  $\Omega_{TN}$  и их поляризация носит тороидальный характер.

Вычислим корреляторы (3.11.24) в этих предельных случаях. При большом затухании, когда колебания на заданной магнитной оболочке сосредоточены вблизи полоидальной частоты, достаточно использовать для  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  выражение (3.11.2). Имеем

$$\mathcal{P}_{11}(x^1, l, \omega) = \frac{1}{\Omega_{PN}} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) \left| G \left( \frac{\omega - \Omega_{PN}}{\omega_{PN}} + i\varepsilon_{PN} \right) \right|^2 Y_{PN}^{(1)2}(x^1, l).$$

Здесь для медленно меняющихся функций  $\omega$  взяты их значения в точке  $\omega = \Omega_{PN}$ . Используя определение (3.11.24) и результаты Приложения Ж, имеем

$$\begin{aligned} P_{11}(x^1, l) &= \frac{2\omega_{PN}}{\Omega_{PN}} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(1)2}(x^1, l) \int_{-\infty}^{\infty} |G(\eta + i\varepsilon_{PN})|^2 d\eta = \\ &= \frac{\mu_N}{\nu_N} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(1)2}(x^1, l). \end{aligned} \quad (3.11.25)$$

Здесь обозначено

$$\mu_N = \frac{k_2 \lambda_{PN}^2}{\rho_0 a_N}, \quad \nu_N = \frac{2k_2 a_N}{\rho_0} \frac{\gamma_{PN}}{\Omega_{PN}}.$$

По порядку величины

$$\mu_N \sim \frac{\alpha_N^{2/3}}{m^{1/3}}, \quad \nu_N = m \frac{\gamma_{PN}}{\omega}.$$

В рассматриваемом случае  $\nu_N \gg 1$ .

Замечательно, что точно такой же результат можно получить, используя для  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  приближение ВКБ (3.11.3), несмотря на то,



что оно неприменимо в малой окрестности точки  $\omega = \Omega_{PN}$ . В этом приближении

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{11}(x^1, l, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\omega} B_N^2(x^1, \omega) \frac{v_{PN}^1}{v_N^1(x^1, \omega)} \frac{k_2^2/p_0^2}{k_{1N}^2(x^1, \omega) + k_2^2/p_0^2} e^{-2\Gamma_N(x^1, \omega)} \tilde{Y}_N^{(1)2}(x^1, l, \omega). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя в (3.11.24) к переменной интегрирования

$$k_1 = k_{1N}(x^1, \omega) \quad (3.11.26)$$

и используя соотношение (3.7.23), имеем

$$\begin{aligned} P_{11}(x^1, l) &= 2\mu_N B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) \int_0^\infty dk_1 \frac{k_2/p_0}{k_1^2 + k_2^2/p_0^2} \times \\ &\times e^{-2\Gamma_N[x^1, \omega_N(x^1, k_1)]} \tilde{Y}_N^{(1)2}(x^1, l, \omega_N(x^1, k_1)), \quad (3.11.27) \end{aligned}$$

где функция  $\omega_N(x^1, k_1)$  является решением уравнения (3.11.26) относительно  $\omega$  при заданном  $k_1$ . Используя определения (3.7.52) и (3.7.22) (см. также [285]), можно показать, что

$$\Gamma_N[x^1, \omega_N(x^1, k_1)] \approx \begin{cases} \frac{\gamma_{PN}}{|\nabla_1 \Omega_{PN}|} k_1, & k_1 \ll k_2/p_0, \\ \bar{\Gamma}_N + \frac{\gamma_{PN}}{|\nabla_1 \Omega_{PN}|} k_1, & k_1 \gg k_2/p_0. \end{cases} \quad (3.11.28)$$

Используя это выражение, легко убедиться, что при  $\nu_N \gg 1$  из-за быстрого убывания экспоненты интеграл (3.11.27) набирается при

$$k_1 \lesssim \frac{|\nabla_1 \Omega_{PN}|}{\gamma_{PN}} \sim \frac{1}{\nu_N} \frac{k_2}{p_0} \ll \frac{k_2}{p_0}.$$

На языке переменной  $\omega$ , согласно соотношениям (3.7.18), (3.7.20), это означает, что ширина спектра

$$\Delta\omega \sim \omega - \Omega_{PN} \lesssim \frac{\Delta\Omega_N}{\nu_N^2}.$$

Интеграл (3.11.27) в этом случае без труда вычисляется, и мы снова приходим к выражению (3.11.25).

При вычислении других корреляторов приближение ВКБ и использование выражения (3.11.3) также дают одинаковые результаты. Имеем

$$\begin{aligned} P_{12} &= -\frac{\mu_N}{2\nu_N^2} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(1)}(x^1, l) Y_{PN}^{(2)}(x^1, l), \\ P_{22} &= \frac{\mu_N}{2\nu_N^3} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(2)2}(x^1, l), \\ P_{33} &= \frac{\mu_N}{2\nu_N^3} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(3)2}(x^1, l). \end{aligned}$$

Используя результаты Приложения 3, находим полуоси эллипса поперечной поляризации альфвеновских колебаний и угол его наклона к координатной линии  $x^1$ :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{B}_{\perp \max}^2 \rangle &= \frac{\mu_N}{\nu_N} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(1)2}(x^1, l), \\ \langle \widehat{B}_{\perp \min}^2 \rangle &= \frac{\mu_N}{4\nu_N^3} B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) Y_{PN}^{(2)2}(x^1, l), \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{2\nu_N} \frac{Y_{PN}^{(2)}(x^1, l)}{Y_{PN}^{(1)}(x^1, l)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\nu_N \gg 1$  альфвеновские шумы имеют полоидальный характер. Их спектр сосредоточен вблизи частоты  $\omega = \Omega_{PN}$ , характерная ширина спектра  $\Delta\omega \sim \Delta\Omega_N/\nu_N^2 \ll \Delta\Omega_N$ . Эллипс поляризации сильно вытянут,

$$\langle \widehat{B}_{\perp \min}^2 \rangle / \langle \widehat{B}_{\perp \max}^2 \rangle \sim \frac{1}{\nu_N^2} \ll 1,$$

и ориентирован практически по координате  $x^1$ . Отметим также, что

$$\langle \widehat{B}_{\parallel}^2 \rangle / \langle \widehat{B}_{\perp \max}^2 \rangle \sim \frac{1}{m^2 \nu_N^2} \ll 1.$$

Схематические графики спектральных плотностей для различных компонент возмущенного магнитного поля при  $\nu_N \gg 1$  приведены на рис. 3.40.

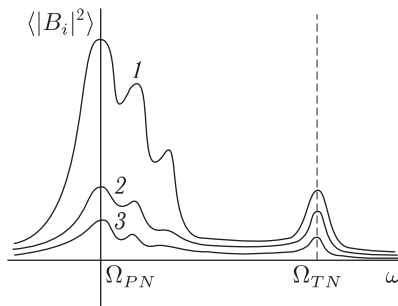


Рис. 3.40. Схематические графики спектральной плотности компонент возмущенного магнитного поля стоячих альфвеновских волн  $\langle |B_i|^2 \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при сильном затухании колебаний ( $\nu_N \gg 1$ )

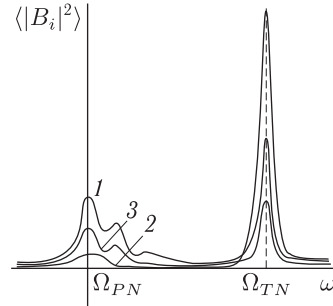


Рис. 3.41. Схематические графики спектральной плотности компонент возмущенного магнитного поля стоячих альфвеновских волн  $\langle |B_i|^2 \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при слабом затухании колебаний ( $\nu_N \ll 1$ )

Обратимся к случаю  $\nu_N \ll 1$ . Из соотношений (3.11.28) видно, что экспонента в подынтегральном выражении (3.11.27) в этом случае убывает очень медленно, характерный масштаб ее убывания

$$k_1 \sim \frac{|\nabla_1 \Omega_{PN}|}{\gamma_{PN}} \sim \frac{1}{\nu_N} \frac{k_2}{p_0} \gg \frac{k_2}{p_0}.$$

Тогда эту экспоненту можно опустить, поскольку интеграл остается сходящимся:

$$P_{11}(x^1, l) = 2\mu_N B_N^2(x^1, \Omega_{PN}) \times \int_0^\infty dk_1 \frac{k_2/p_0}{k_1^2 + k_2^2/p_0^2} \tilde{Y}_N^{(1)2}(x^1, l, \omega_N(x^1, k_1)). \quad (3.11.29)$$

Этот интеграл набирается при  $k_1 \sim k_2/p_0$ , то есть, на языке переменной  $\omega$ , при

$$\omega - \Omega_{PN} \sim \Delta\Omega_N.$$

В замкнутом виде взять интеграл (3.11.29) невозможно из-за наличия множителя  $\tilde{Y}_N^{(1)2}$ , но нетрудно получить оценку по порядку величины

$$P_{11} \sim \mu_N B_N^2. \quad (3.11.30)$$

Если для коррелятора  $\mathcal{P}_{22}$  также использовать приближение ВКБ, то вместо (3.11.27) получим

$$P_{22} = \frac{2p_0\mu_N}{k_2} B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) \times \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2/p_0^2} e^{-2\Gamma_N[x^1, \omega_N(x^1, k_1)]} \tilde{Y}_N^{(2)2}(x^1, l, \omega_N(x^1, k_1)). \quad (3.11.31)$$

Здесь в подынтегральном выражении уже нельзя опускать экспоненту, — интеграл станет расходящимся. Используя выражение (3.11.28), легко найти, что в этом случае характерная область интегрирования по  $k_1$

$$k_1 \sim \frac{|\nabla_1 \Omega_{PN}|}{\gamma_{TN}} \sim \frac{1}{\nu_N} \frac{k_2}{p_0} \gg \frac{k_2}{p_0}.$$

На языке переменной  $\omega$  это означает, что спектр сосредоточен вблизи  $\omega = \Omega_{TN}$  и его характерная ширина, как это следует из (3.7.19) и (3.7.20),

$$\Delta\omega \sim \Omega_{TN} - \omega - \nu_N^2 \Delta\Omega_N \ll \Delta\Omega_N.$$

С учетом сказанного, интеграл (3.11.31) легко вычисляется:

$$P_{22} = \frac{\mu_N}{\nu_N} \frac{\gamma_{PN}}{\gamma_{TN}} B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) Y_{TN}^{(2)2}(x^1, l). \quad (3.11.32)$$

Здесь учтено, что  $\bar{\Gamma}_N \sim \nu_N \ll 1$ .

Поскольку в последнем случае спектр сосредоточен в малой окрестности тороидальной частоты  $\Omega_{TN}$ , возникает вопрос о корректности

использования приближения ВКБ, так как это приближение неприменимо при  $|\omega - \Omega_{TN}| \lesssim 1$ . По этой причине вычислим  $P_{22}$ , используя для  $\tilde{Q}_N$  выражение (3.11.4). Из (3.11.11) имеем

$$P_{22} = \frac{2}{\Omega_{TN}} B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) Y_{TN}^{(2)2}(x^1, l) \int_{-\infty}^{\infty} \left| g' \left( \frac{\omega - \Omega_{TN}}{\omega_{TN}} + i\varepsilon_{TN} \right) \right|^2 d\omega.$$

Используя значение интеграла из Приложения Ж, снова приходим к выражению (3.11.32).

Аналогично устанавливается, что спектральная плотность  $\mathcal{P}_{12}(x^1, l, \omega)$  также сосредоточена вблизи частоты  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$  на интервале  $\Delta\omega = \nu_N^2 \Delta\Omega_N$ . Соответствующий коррелятор равен

$$P_{12} = -2\mu_N \left( \ln \frac{1}{\nu_N} \right) B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) Y_{TN}^{(1)}(x^1, l) Y_{TN}^{(2)}(x^1, l), \quad (3.11.33)$$

причем вычисления в приближении ВКБ и с использованием выражения (3.11.4) дают один и тот же результат.

Соотношения (3.11.25), (3.11.32) и (3.11.33) позволяют найти полуоси эллипса поперечной поляризации колебаний и его наклон к оси  $x^1$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{B}_{\perp \max}^2 \rangle &= P_{22} = \frac{\mu_N}{\nu_N} \frac{\gamma_{PN}}{\gamma_{TN}} B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) Y_{TN}^{(2)2}(x^1, l), \\ \langle \hat{B}_{\perp \min}^2 \rangle &= P_{11} \sim \mu_N B_N^2(x^1, \Omega_{TN}), \\ \alpha_0 &= \frac{\pi}{2} + 2\nu_N \frac{Y_{TN}^{(1)}(x^1, l)}{Y_{TN}^{(2)}(x^1, l)} \ln \frac{1}{\nu_N}. \end{aligned}$$

Что касается коррелятора  $P_{33}$ , то в приближении ВКБ с учетом (3.11.12) имеем

$$P_{33} = 8\mu_N B_N^2(x^1, \Omega_{TN}) \times \int_0^{\infty} dk_1 \frac{k_1^2 (k_2/p_0)^3}{(k_1^2 + k_2^2/p_0^2)^3} e^{-2\Gamma_N[x^1, \omega_N(x^1, k_1)]} \tilde{Y}_N^{(3)2}(x^1, l, \omega_N(x^1, k_1)).$$

Здесь, как и при вычислении  $P_{11}$ , экспоненциальный множитель можно опустить. Спектральная плотность распределена по всему интервалу  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$ . В замкнутом виде интеграл не берется, но оценку по порядку величины легко получить:

$$P_{33} \equiv \langle \hat{B}_{\parallel}^2 \rangle \sim \mu_N B_N^2 \tilde{Y}_N^{(3)2} \sim \frac{\mu_N}{m^2} B_N^2.$$

Таким образом, при  $\nu_N \ll 1$  колебания имеют тороидальный характер. Большая полуось эллипса поляризации направлена практически по азимуту. Колебания вдоль этой оси имеют узкий спектр, сосредоточенный вблизи частоты  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$ , с характерной шириной  $\Delta\omega \sim \nu_N^2 \Delta\Omega_N$ . Колебания по малой полуоси эллипса поперечной по-

ляризации, а также вдоль геомагнитного поля имеют более широкий спектр, заключенный в интервале  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$ , их амплитуды относительно малы:

$$\frac{\langle \widehat{B}_{\perp \min}^2 \rangle}{\langle \widehat{B}_{\perp \max}^2 \rangle} \sim \nu_N, \quad \frac{\langle \widehat{B}_{\parallel}^2 \rangle}{\langle \widehat{B}_{\perp \max}^2 \rangle} \sim \frac{\nu_N}{m^2}.$$

Схематические графики спектральных плотностей для различных компонент возмущенного магнитного поля при  $\nu_N \ll 1$  представлены на рис. 3.41.

### 3.12. Широкополосные стоячие альфвеновские волны с $m \gg 1$ , генерируемые коррелированными источниками

Теперь рассмотрим стоячие альфвеновские волны, генерируемые в магнитосфере нестационарными коррелированными источниками. Это означает, что функция источника  $\tilde{\varphi}_N(x^1, \omega)$ , фигурирующая в (3.11.1), будет считаться заданной функцией координаты и частоты. Соответственно ее фурье-образ

$$\varphi_N(x^1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varphi}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega t} \quad (3.12.1)$$

является заданной функцией координаты и времени. Как уже указывалось, такая трактовка оправдана для колебаний, связанных с процессами перестройки магнитосферы, ее реакцией на резкие воздействия как внешнего, так и внутреннего происхождения. Характерные примеры — геомагнитные пульсации P12 и колебания SC (SSC).

Конкретно, задача настоящего раздела сводится к осуществлению обратного фурье-преобразования

$$\varphi(x^1, l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varphi}(x^1, l, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.12.2)$$

используя выражение для функции  $\tilde{\varphi}_N(x^1, l, \omega)$ , полученное ранее в разд. 3.7.5, 3.7.6, 3.7.7 и записанное в общем виде в разд. 3.11.1. Подставляя в (3.12.2) выражение (3.11.1), имеем

$$\varphi(x^1, l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varphi}_N(x^1, \omega) \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \tilde{Z}_N(x^1, l, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.12.3)$$

Используя соотношение (3.12.1), последнее выражение можно представить в виде

$$\varphi(x^1, l, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \varphi_N(x^1, t-t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{Q}_N(x^1, \omega) \tilde{Z}_N(x^1, l, \omega) e^{-i\omega t'}.$$

Для вычисления интеграла по частоте в этом выражении используем метод перевала, поскольку функция  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  быстро меняется по переменной  $\omega$ . Точка перевала является функцией параметров  $x^1$  и  $t'$ :

$$\omega = \Omega_N(x^1, t'). \quad (3.12.4)$$

Ниже будет показано, что функция  $\Omega_N(x^1, t)$  имеет простой физический смысл. При использовании метода перевала сравнительно медленно меняющуюся функцию  $\tilde{Z}_N(x^1, l, \omega)$  можно вынести из-под знака интеграла, взяв ее значение в точке перевала. Вводя обозначения

$$Z_N(x^1, l, t) = \tilde{Z}_N(x^1, l, \Omega_N(x^1, t)), \quad (3.12.5)$$

$$Q_N(x^1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{Q}_N(x^1, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.12.6)$$

имеем

$$\varphi(x^1, l, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \varphi_N(x^1, t-t') Q_N(x^1, t') Z_N(x^1, l, t'). \quad (3.12.7)$$

Формула (3.12.7) выражает потенциал альфвеновской волны через функцию источника  $\varphi_N(x^1, t)$ . Легко видеть, что функции  $Q_N(x^1, t)$  и  $Z_N(x^1, l, t)$  описывают альфвеновскую волну, возбуждаемую источником типа мгновенного импульса. Полагая

$$\varphi_N(x^1, t) = \varphi_N(x^1) \delta(t),$$

имеем

$$\varphi(x^1, l, t) = \frac{1}{2\pi} \varphi_N(x^1) Q_N(x^1, t) Z_N(x^1, l, t). \quad (3.12.8)$$

Функция  $Z_N(x^1, l, t)$  описывает продольную структуру стоячей альфвеновской волны, а основная зависимость от координаты  $x^1$  и времени  $t$  сосредоточена в быстроменяющейся функции  $Q_N(x^1, t)$ .

Отклик на источник типа мгновенного импульса является случаем в определенном смысле противоположным случаю монохроматической волны. Исследование структуры волны в этих двух крайних пределах позволяет составить общее представление и обо всех промежуточных случаях. Поэтому мы ограничимся изучением отклика на источник типа мгновенного импульса. Изучение общего случая (3.12.7) требует задания конкретной модели источника  $\varphi_N(x^1, t)$ . Следует отметить,

что упоминавшиеся выше примеры (SC, SSC и суббуревые P<sub>i</sub>2) вполне могут трактоваться как отклик магнитосферы на источник типа мгновенного импульса.

**3.12.1. Отклик альфвеновских колебаний магнитосферы на мгновенный импульс.** Предположим сначала, что точка перевала лежит внутри промежутка  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$  достаточно далеко от его концов (более точно последнее условие сформулируем ниже). Тогда, используя выражение (3.11.3), имеем

$$Q_N(x^1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \frac{v_{PN}^1}{v_N^1(x^1, \omega)} \frac{p_0^{-1} k_2^2}{p_0 k_{1N}^2(x^1, \omega) + p_0^{-1} k_2^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \exp \left[ i\Psi_N(x^1, \omega, t) - \Gamma_N(x^1, \omega) + i\frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.12.9)$$

Здесь обозначено

$$\Psi_N(x^1, \omega, t) = \vartheta_N(x^1, \omega) - \omega t.$$

Точка перевала определяется уравнением

$$\frac{\partial \Psi_N(x^1, \omega, t)}{\partial \omega} = 0,$$

которое с учетом соотношений (3.7.10) и (3.7.32) можно представить в виде

$$\tau(x^1, \omega) = t. \quad (3.12.10)$$

Это уравнение имеет простой физический смысл. Оно определяет частоту той монохроматической волны, которая достигает оболочки  $x^1$  через время  $t$  после того, как породится на своей пологоидальной поверхности. Именно эта волна определяет колебание на оболочке  $x^1$  в момент времени  $t$ .

Для функции  $\omega = \Omega_N(x^1, t)$ , определяемой уравнением (3.12.10), нетрудно получить предельные выражения для малых и больших значений  $t$ . В двух предельных случаях имеем

$$\Omega_N(x^1, t) = \Omega_{PN}(x^1) + \omega_{PN}^3(x^1)t^2, \quad t \ll m/\Omega, \quad (3.12.11)$$

$$\Omega_N(x^1, t) = \Omega_{TN}(x^1) - \frac{1}{\omega_{TN}(x^1)t^2}, \quad t \gg m/\Omega. \quad (3.12.12)$$

Здесь  $\Omega$  — величина порядка  $\Omega_{PN}$  или  $\Omega_{TN}$ , а функции  $\omega_{PN}(x^1)$  и  $\omega_{TN}(x^1)$  определены в выражениях (3.11.2) и (3.11.4). Таким образом, при изменении  $t$  в интервале  $(0, \infty)$  функция  $\Omega_N(x^1, t)$  меняется в интервале  $(\Omega_{PN}(x^1), \Omega_{TN}(x^1))$ .

Определим зависящие от времени квазиклассический волновой вектор

$$\bar{k}_{1N}(x^1, t) = k_{1N}[x^1, \Omega_N(x^1, t)] \quad (3.12.13)$$

и фазу

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_N(x^1, t) &= \Psi_N[x^1, \Omega_N(x^1, t), t] \equiv \\ &\equiv \vartheta_N[x^1, \Omega_N(x^1, t)] - \Omega_N(x^1, t)t. \quad (3.12.14)\end{aligned}$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_N(x^1, t)}{\partial x^1} = \bar{k}_{1N}(x^1, t); \quad \frac{\partial \bar{\Psi}_N(x^1, t)}{\partial t} = -\Omega_N(x^1, t). \quad (3.12.15)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \bar{k}_{1N}(x^1, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega_N(x^1, t)}{\partial x^1}.$$

Используя эти соотношения и предельные выражения (3.12.11) и (3.12.12) для  $\Omega_N(x^1, t)$  можно получить соответствующие выражения для  $\bar{k}_{1N}(x^1, t)$  и  $\bar{\Psi}_N(x^1, t)$ :

$$\bar{k}_{1N}(x^1, t) = \begin{cases} -\nabla_1 \Omega_{PN}(x^1)t, & t \ll m/\Omega, \\ -\nabla_1 \Omega_{TN}(x^1)t, & t \gg m/\Omega, \end{cases} \quad (3.12.16)$$

$$\bar{\Psi}_N(x^1, t) = \begin{cases} -\Omega_{PN}(x^1)t - \frac{\omega_{PN}^3(x^1)t^3}{3}, & t \ll m/\Omega, \\ \tilde{\Psi}_N(x^1) - \Omega_{TN}(x^1)t - \frac{1}{\omega_{TN}(x^1)t}, & t \gg m/\Omega. \end{cases} \quad (3.12.17)$$

Здесь обозначено

$$\tilde{\Psi}_N(x^1) = \int_0^{\infty} [\Omega_{TN}(x^1) - \Omega_N(x^1, t)] dt. \quad (3.12.18)$$

Можно показать, что

$$\tilde{\Psi}_N(x^1) = \bar{\vartheta}_N[\Omega_{TN}(x^1)]. \quad (3.12.19)$$

Нам понадобится также зависящий от времени коэффициент ослабления волны

$$\bar{\Gamma}_N(x^1, t) = \Gamma_N[x^1, \Omega_N(x^1, t)], \quad (3.12.20)$$

который имеет следующие предельные выражения

$$\bar{\Gamma}_N(x^1, t) = \begin{cases} \gamma_{PN}(x^1)t, & t \ll m/\Omega, \\ \tilde{\Gamma}_N(x^1) + \gamma_{TN}(x^1)t, & t \gg m/\Omega. \end{cases} \quad (3.12.21)$$



Здесь  $\tilde{\Gamma}_N(x^1) \equiv \tilde{\Gamma}_N(x^1, \Omega_{TN}(x^1))$ ,  $\gamma_{TN}(x^1) \equiv \gamma_{TN}(\Omega_{TN}(x^1))$ ,  $\gamma_{PN}(x^1) \equiv \gamma_{PN}(\Omega_{TN}(x^1))$ , где функция  $\Gamma_N(x^1, \omega)$  определена как

$$\tilde{\Gamma}_N(x^1, \omega) = \int_{x_{PN}^1(\omega)}^{x_{TN}^1(\omega)} \frac{\gamma_N(x^1, \omega) - \tilde{\gamma}_{TN}(\omega)}{v_N^1(x^1, \omega)} dx^1 + \frac{\gamma_{TN}}{\omega_{TN}} \left( \frac{\omega_{TN}}{\Omega_{TN} - \omega} \right)^{1/2},$$

функции  $\gamma_N(x^1, \omega)$ ,  $\gamma_{PN}(\omega)$  и  $\gamma_{TN}(\omega)$  — соответственно как (3.7.56), (3.7.57) и (3.7.58), а  $\tilde{\gamma}_{TN}(\omega) = \gamma(x_{TN}^1(\omega), \omega)$ .

Возвращаясь к вычислению интеграла (3.12.9) методом перевала, имеем

$$\frac{\partial^2 \Psi_N}{\partial \omega^2} = \frac{\partial \tau_N}{\partial \omega} = -\frac{1}{\nabla_1 \Omega_{PN}} \frac{\partial k_{1N}}{\partial \omega} = -\frac{1}{\nabla_1 \Omega_{PN}} \frac{1}{v_N^1}.$$

Таким образом, вблизи точки перевала

$$\Psi_N(x^1, \omega, t) \approx \bar{\Psi}_N(x^1, t) - \frac{[\omega - \Omega_N(x^1, t)]^2}{2v_N^1(x^1, \Omega_N) \nabla_1 \Omega_{PN}}.$$

Ширина пика при интегрировании по  $\omega$  методом перевала по порядку величины

$$\Delta\omega \sim |v_N^1 \nabla_1 \Omega_{PN}|^{1/2} \sim \frac{\Delta\Omega_N}{(\alpha_N m)^{1/2}}.$$

Напомним, что  $\alpha_N = \Delta\Omega_N / \Omega_{TN}$ . Поскольку предполагается, что  $\alpha_N m \gg 1$ , то  $\Delta\omega \ll \Delta\Omega_N$  и использование метода перевала оправдано, если  $\Omega_N(x^1, \omega)$  не слишком близка к концам интервала  $(\Omega_{PN}, \Omega_{TN})$ . После всего сказанного вычисление интеграла (3.12.9) не составляет труда. Имеем

$$Q_N(x^1, t) = 2\sqrt{\pi} \omega_{PN} \left[ \frac{k_2^2/p_0^2}{\bar{k}_{1N}^2(x^1, t) + k_2^2/p_0^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \exp [i\bar{\Psi}_N(x^1, t) - \bar{\Gamma}_N(x^1, t) + i\pi/2]. \quad (3.12.22)$$

Если точка перевала  $\omega = \Omega_N(x^1, t)$  близка к полоидальной или тороидальной частоте, то проведенное вычисление несправедливо. Уточним соответствующие условия. Для правомерности рассмотренного выше метода интегрирования вблизи полоидальной частоты необходимо выполнение неравенств

$$\omega - \Omega_{PN} \gg \omega_{PN}, \quad \Delta\omega \sim \left( \frac{\Omega_{PN} v_N^1}{a_N} \right)^{1/2} \ll \omega - \Omega_{PN}. \quad (3.12.23)$$

Первое из них обеспечивает применимость приближения ВКБ для  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  вблизи точки перевала, а второе — применимость самого метода перевала. Вблизи полоидальной частоты имеем

$$\Delta\omega \sim \omega_{PN} \left( \frac{\omega - \Omega_{PN}}{\omega_{PN}} \right)^{1/4},$$

откуда следует, что второе неравенство (3.12.23) сводится к первому. Аналогично вблизи тороидальной частоты необходимо выполнение неравенств

$$\Omega_{TN} - \omega \gg \omega_{TN}, \quad \Delta\omega \ll \Omega_{TN} - \omega. \quad (3.12.24)$$

Вблизи тороидальной частоты имеем

$$\Delta\omega \sim \omega_{TN} \left( \frac{\Omega_{TN} - \omega}{\omega_{TN}} \right)^{3/4},$$

и второе неравенство (3.12.24) также сводится к первому.

Если неравенство (3.12.23) не выполняется, т. е.  $\Omega_N - \Omega_{PN} \lesssim \omega_{PN}$ , то в (3.12.6) нужно подставить выражение (3.11.2). Используя также (3.11.5) и меняя в получающемся кратном интеграле порядок интегрирования, получаем

$$Q_N(x^1, t) = 2i\sqrt{\pi} \omega_{PN} \theta(t) \exp\left(-i\Omega_{PN}t - \frac{i}{3}\omega_{PN}^3 t^3 - \gamma_{PN}t\right), \quad (3.12.25)$$

где  $\theta(t)$  — функция Хэвисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Из неравенства  $\Omega_N - \Omega_{PN} \lesssim \omega_{PN}$  следует, что

$$t \lesssim \frac{1}{\omega_{PN}} \ll \frac{m}{\Omega}. \quad (3.12.26)$$

Но тогда

$$\bar{k}_{1N}(x^1, t) \sim \nabla_1 \Omega_{PN} t \lesssim \frac{1}{\lambda_{PN}} \ll \frac{k_2}{p_0},$$

а для функций  $\bar{\Psi}_N(x^1, t)$  и  $\bar{\Gamma}_N(x^1, t)$  справедливы приближенные выражения, приведенные в верхних строчках в (3.12.17) и (3.12.21). Учитывая сказанное, мы видим, что формулы (3.12.22) и (3.12.25) совпадают.

Аналогично, при  $\Omega_{TN} - \tilde{\Omega}_N \lesssim \omega_{TN}$  в (3.12.6) следует подставлять выражение (3.11.4)

$$Q_N(x^1, t) = i \frac{k_2 \lambda_{PN}}{p_0} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g \left( \frac{\omega - \Omega_{TN} + i\gamma_{TN}}{\omega_{TN}} \right) \exp \left[ -i\omega t + i\bar{\vartheta}_N(\omega) - \tilde{\Gamma}_N(\omega) \right]. \quad (3.12.27)$$

Величину  $\exp[-\tilde{\Gamma}_N(\omega)]$  можно вынести из-под знака интеграла в точке  $\omega = \Omega_{TN}$  (получится  $\exp[-\tilde{\Gamma}_N(x^1)]$ ), но в множителе  $\exp[i\bar{\vartheta}_N(\omega)]$  необходимо учесть зависимость от  $\omega$ , поскольку  $\bar{\vartheta}_N(\omega)$  — большая

фаза. Для этого достаточно линейного разложения этой фазы вблизи точки  $\omega = \Omega_{TN}$

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_N(\omega) &= \bar{\vartheta}_N(\Omega_{TN}(x^1)) + \left. \frac{\partial \bar{\vartheta}_N}{\partial \omega} \right|_{\omega=\Omega_{TN}} \times (\omega - \Omega_{TN}) = \\ &= \tilde{\Psi}_N(x^1) + \tau_N(\Omega_{TN})(\omega - \Omega_{TN}(x^1)). \end{aligned}$$

После этого, используя интегральное представление (3.11.6) и меняя порядок интегрирования в возникающем кратном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} Q_N(x^1, t) &= 2i\sqrt{\pi} \frac{k_2 \lambda_{PN}}{p_0} \frac{1}{t} \times \\ &\times \exp\left(-i\Omega_{TN}t + i\tilde{\Psi}_N(x^1) - \frac{i}{\omega_{TN}t} - \Gamma_N(x^1) - \gamma_{TN}t\right). \end{aligned} \quad (3.12.28)$$

Неравенство  $\Omega_{TN} - \Omega_N \lesssim \omega_{TN}$  означает, что

$$t \frac{1}{\omega_{TN}} \gg \frac{m}{\Omega},$$

и, следовательно, применимы выражения, приведенные в нижних строчках в (3.12.16), (3.12.17) и (3.12.21), и выполняется условие  $\bar{k}_{1N}(x^1, t) \gg k_2/p_0$ . Но в таком случае легко видеть, что выражение (3.12.22) переходит в (3.12.28).

Таким образом, формула (3.12.22), первоначально полученная в интервале  $(1/\omega_{PN}) \ll t \ll (1/\omega_{TN})$ , оказывается применима при любых значениях переменной  $t$ , а формулы (3.12.25) и (3.12.28) являются ее предельными выражениями соответственно при  $t \ll m/\Omega$  и  $t \gg m/\Omega$ .

Имея выражение для поперечного потенциала  $\varphi(x^1, l, t)$ , нетрудно определить компоненты возмущенного электрического и магнитного полей альфвеновских колебаний. Ограничимся вычислением возмущенного магнитного поля. По аналогии с определением (3.12.5) введем зависящие от времени продольные функции для магнитного поля

$$Y_N^{(i)}(x^1, l, t) = \tilde{Y}_N^{(i)}[x^1, l, \Omega_N(x^1, t)]$$

и зависящую от времени амплитуду магнитного поля

$$B_N(x^1, t) = \tilde{B}_N(x^1, \Omega_N(x^1, t)),$$

где функции  $\tilde{B}_N(x^1, \omega)$  и  $\tilde{Y}_N^{(i)}(x^1, \omega)$  определены соотношениями (3.11.8), (3.11.9) и (3.11.10). Используя эти определения, получаем следующее выражение для физических компонент возмущенного магнитного поля:

$$\hat{B}_i(x^1, l, t) = B_N(x^1, t) Q_N^{(i)}(x^1, t) Y_N^{(i)}(x^1, l, t).$$

Здесь обозначено (ср. с (3.11.11)):

$$\begin{aligned} Q_N^{(1)}(x^1, t) &= Q_N(x^1, t); \\ Q_N^{(2)}(x^1, t) &= -\frac{\bar{k}_{1N}(x^1, t)}{k_2/p_0} Q_N(x^1, t); \\ Q_N^{(3)}(x^1, t) &= -2i \frac{\bar{k}_{1N}(x^1, t) \cdot (k_2/p_0)}{\bar{k}_{1N}^2(x^1, t) + (k_2/p_0)^2} Q_N(x^1, t). \end{aligned}$$

Полученным результатам можно дать простую и наглядную физическую трактовку. Источник типа мгновенного импульса, обладая очень широким (формально бесконечным) спектром, возбуждает альфвеновские волны сразу на всех магнитных оболочках. При этом на данной магнитной оболочке  $x^1$  возбуждается монохроматическая волна, для которой эта оболочка является полоидальной. Соответственно, частота волны  $\omega$  равна полоидальной частоте этой оболочки  $\Omega_{PN}(x^1)$ , а поляризация волны имеет полоидальный характер (магнитное поле колеблется в радиальном направлении — по координате  $x^1$ ). После этого каждая из монохроматических волн бежит в радиальном направлении, т.е. к своей тороидальной поверхности, и по мере этого распространения поляризация волны постепенно превращается из полоидальной в тороидальную.

Нетрудно понять, как эта картина будет выглядеть на фиксированной магнитной оболочке  $x^1$ . В первый момент на ней возбудится колебание полоидального типа с частотой, равной полоидальной частоте данной магнитной оболочки  $\Omega_{PN}(x^1)$ . Оно тут же покинет данную магнитную оболочку, начав движение к своей тороидальной поверхности. К магнитной оболочке  $x^1$  будут прибегать колебания с других, все более удаленных оболочек, на которых они были сгенерированы как полоидальные. Чем дальше от  $x^1$  расположена такая оболочка, тем сильнее за время пробега поляризация колебания изменится от полоидальной к тороидальной. Наконец оболочка  $x^1$  достигнет колебание с частотой  $\Omega_{TN}(x^1)$ , для которого эта оболочка является тороидальной.

Таким образом, на данной оболочке будет наблюдаться колебание, медленно меняющееся от полоидального типа до тороидального: его частота меняется от  $\Omega_{PN}(x^1)$  до  $\Omega_{TN}(x^1)$ , а поляризация — от радиальной до азимутальной. Характерное время такого изменения  $\sim m/\omega$ , т.е. при  $t \ll m/\omega$  колебание носит полоидальный характер, а при  $t \gg m/\omega$  — тороидальный.

Описанная картина имеет место при достаточно малом затухании, когда за характерное время  $m/\omega$  коэффициент ослабления волны  $\Gamma \sim \gamma m/\omega$  мал:

$$m \frac{\gamma}{\omega} \ll 1.$$

В обратном случае

$$m \frac{\gamma}{\omega} \gg 1$$

волна не успевает превратиться в тороидальную и затухает на той стадии, когда имеет еще полоидальный характер.

Выше отмечалось, что источник типа мгновенного импульса и монохроматический источник представляют собой, в известном смысле, противоположные предельные случаи: первый соответствует  $\delta$ -функции от времени  $t$ , а второй —  $\delta$ -функции от частоты  $\omega$ . Совершенно ясно, что источник можно рассматривать как мгновенный также и при некоторой конечной, но достаточно малой продолжительности импульса  $\Delta t$ , и как монохроматический — при малой ширине спектра  $\Delta\omega$ . Сформулируем соответствующие требования явно.

При интегрировании по частоте в (3.12.9) методом перевала мы видели, что вблизи точки перевала функция  $\tilde{Q}_N(x^1, \omega)$  представляет собой острый пик по переменной  $\omega$  с характерной шириной

$$\Delta\omega \sim \frac{\Delta\Omega_N}{(\alpha_N m)^{1/2}} \sim \left(\frac{\alpha_N}{m}\right)^{1/2} \Omega_N. \quad (3.12.29)$$

Формула (3.12.22) получена при рассмотрении мгновенного импульса, когда функция источника  $\varphi_N(x^1, \omega) = \text{const}$ . Вычисление интеграла (3.12.9) не изменится и в том случае, когда  $\tilde{\varphi}_N(x^1, \omega)$  зависит от  $\omega$ , но характерный масштаб ее изменения по этой переменной  $\Delta\omega$  много больше величины (3.12.29):

$$\Delta\omega \gg \Delta\Omega. \quad (3.12.30)$$

Это условие во всяком случае выполняется, если источник представляет собой импульс с длительностью

$$\Delta t \ll \frac{1}{\Delta\Omega} \sim \left(\frac{m}{\alpha_N}\right)^{1/2} \frac{1}{\Omega_N}. \quad (3.12.31)$$

При характерных значениях  $m \approx 40$ ,  $\alpha \approx 0,2$  величина  $(m/\alpha_N)^{1/2} \approx 15$ , тогда условие (3.12.31) означает, что продолжительность импульса должна быть меньше 15 периодов колебания. При явлении SC и суббуревом взрыве это условие скорее выполняется, чем не выполняется. При выполнении неравенства, обратного неравенству (3.12.31),

$$\Delta\omega \ll \Delta\Omega \sim \left(\frac{\alpha_N}{m}\right)^{1/2} \Omega_N,$$

источник можно считать монохроматическим.

**3.12.2. Выводы теории и наблюдения.** В работах [195, 286] на основании статистических наблюдений на геостационарном спутнике АМРТЕ/ССЕ показано, что около 50% наблюдаемых в магнитосфере МГД-колебаний составляют неструктурированные стохастические колебания. Из оставшихся 50% около 30% представляют собой гармонические тороидальные колебания, 10% — колебания с большой долей сжимаемой компоненты ( $B_3 \sim B_1, B_2$ ) и менее 5% составляют поперечные колебания полоидального типа. В работах [205, 287, 288]

было показано, что поперечные полоидальные МГД-колебания ( $B_1 > B_2 \gg B_3$ ) наблюдались в основном в магнитоспокойных условиях. В возмущенной магнитосфере чаще всего регистрируются колебания полоидального типа с существенной долей сжимаемой компоненты [289–291]. Наши расчеты относятся к колебаниям первого типа — без существенной доли сжимаемой компоненты. Колебания другого типа описываются в рамках теории, учитывающей конечное давление плазмы  $\beta \sim 1$  [224, 225, 292, 293].

Можно предположить, что распространение полоидальных альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек, обусловленное их поперечной дисперсией, носит универсальный характер, независимо от способа их возбуждения. В связи с этим можно интерпретировать данные приведенных выше наблюдений следующим образом. Полоидальные альфвеновские волны, возбуждаемые широкополосными источниками, могут быть зарегистрированы только в течении интервала времени  $t \sim m/\Omega$  с момента их генерации. В процессе своего распространения поперек магнитных оболочек они превращаются в тороидальные колебания за счет своей поперечной дисперсии. В то же время тороидальные колебания, генерируемые, например, в альфвеновском резонансе (*field line resonance*), в процессе распространения поперек магнитных оболочек только усиливают свой тороидальный характер (см. [181] и результаты разд. 3.2). В связи с этим вероятность наблюдения полоидальных колебаний значительно меньше вероятности наблюдения тороидальных колебаний.

В работе [201] проведено сравнение теоретически предсказанного поведения годографов с поведением годографов, построенных по наблюдениям на радаре STAR [289]. В этом эксперименте на достаточно плотной сети точек наблюдения в ионосфере были одновременно построены годографы альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  на уровне ионосферы. Если предположить, что причиной этих колебаний является полоидальная альфвеновская волна в магнитосфере, то поведение этих годографов должно описываться теорией, представленной в разд. 3.7 настоящей монографии. Оказалось, что ориентация наблюдаемых годографов совпадает с ориентацией годографов монохроматических альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  в области между резонансными поверхностями — полоидальной и тороидальной. В то же время в работе [289] частота колебаний менялась в процессе наблюдений. Это можно объяснить следующим образом. Годографы колебаний, построенные за период времени  $t \ll m/\Omega$ , отражают в точке наблюдения поведение именно монохроматической волны, которая медленно перемещается поперек магнитных оболочек. Поэтому если источник колебаний действует достаточно продолжительное время и мало меняется, то в разных точках пространства мы должны наблюдать колебание, плавно меняющееся от полоидального типа к тороидальному. Отметим, что подобное поведение возможно только при достаточно слабой диссипации

волны в ионосфере. При сильной диссипации колебание во всех точках наблюдения будет полоидальным.

Отметим характерные особенности рассматриваемых колебаний, которые могут служить их индикатором в наблюдениях. Первая особенность связана с поведением годографов монохроматических колебаний. Как следует из результатов, представленных в разд. 3.7, в области между резонансными поверхностями, где в основном и сосредоточено колебание, поведение годографа сильно зависит от точки наблюдения. Для одного и того же колебания вблизи полоидальной поверхности (где  $B_1 \gg B_2$ ) и вблизи тороидальной поверхности ( $B_2 \gg B_1$ ) годограф вращается в разных направлениях. Направление его вращения зависит от знака  $k_2$  (или, что то же, от знака  $m$ ). В области между резонансными поверхностями, достаточно далеко от каждой из них, поляризация колебаний линейная (см. рис. 3.42).

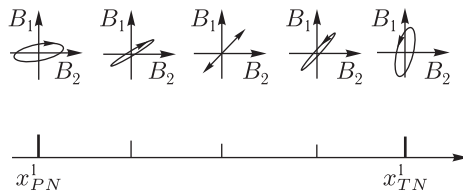


Рис. 3.42. Годографы монохроматических альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  в различных точках внутри области прозрачности между резонансными поверхностями  $x^1_{PN} < x^1 < x^1_{TN}$

Вторая особенность касается спектра широкополосных стохастических колебаний. Характерной чертой такого спектра при умеренном затухании колебаний является наличие пиков вблизи собственных частот каждой из гармоник стоячих альфвеновских волн в магнитосфере. При этом каждый из таких пиков должен расщепляться на два близко расположенных пика, один из которых соответствует полоидальной собственной частоте  $\Omega_{PN}$ , а другой — тороидальной собственной частоте  $\Omega_{TN}$  (см. рис. 3.40 и 3.41). Спектральное расщепление  $\Delta\Omega_N = \Omega_{TN} - \Omega_{PN}$  мало по сравнению с каждой из собственных частот  $\Omega_{PN}, \Omega_{TN}$ . В «холодной» плазме это расщепление наиболее велико у основной гармоники  $N = 1$ :  $\Delta\Omega_1/\Omega_1 \sim 0.25$ . Таким образом, расщепление спектра альфвеновских колебаний наиболее легко наблюдать вблизи частоты основной гармоники  $N = 1$ . При увеличении  $N$  отношение  $\Delta\Omega_N/\Omega_{TN}$  резко уменьшается.

Третья особенность связана с наблюдением альфвеновских волн, возбуждаемых источниками типа внезапного импульса. Как следует из результатов настоящей работы, при регистрации колебаний от такого источника в фиксированной точке пространства должны наблюдаться колебания с переменной частотой. При этом в процессе наблюдения (если время наблюдения  $t > m/\Omega$ ) частота регистрируемых колебаний для каждой гармоники стоячих альфвеновских волн должна возра-

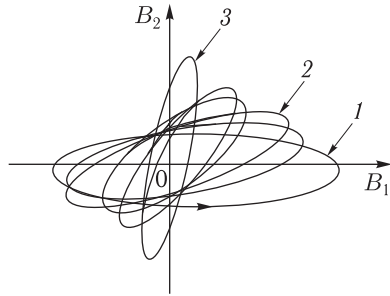


Рис. 3.43. Годографы нестационарных альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$ , возбуждаемых в точке наблюдения источником типа «внезапный импульс» в различные моменты времени: 1 —  $t \ll m/\omega$  — колебания полоидального типа ( $B_1 \gg B_2$ ); 2 —  $t \sim m/\omega$  — колебания промежуточного типа ( $B_1 \sim B_2$ ); 3 —  $t \gg m/\omega$  — колебания тороидального типа ( $B_1 \ll B_2$ )

тать от полоидальной собственной частоты  $\Omega_{PN}$  до тороидальной  $\Omega_{TN}$ . Как и в случае стохастических колебаний, наибольший эффект должен наблюдаться у основной гармоники  $N = 1$ . Изменение характерного вида годографа таких колебаний с течением времени изображено на рис. 3.43.

### 3.13. Модельное уравнение для определения поперечной структуры стоячих альфвеновских волн в магнитосфере

Как мы видели в предшествующих разделах, альфвеновские колебания с  $m \gg 1$  имеют достаточно сложную структуру в направлении поперек магнитных оболочек. Они характеризуются наличием двух выделенных оболочек, полоидальной ( $x^1 = x_{PN}^1$ ) и тороидальной ( $x^1 = x_{TN}^1$ ), между которыми заключено колебание. Колебания генерируются внешним источником (например сторонними токами в ионосфере) на полоидальной поверхности и медленно перемещаются поперек магнитных оболочек к тороидальной поверхности, где полностью поглощаются в области альфвеновского резонанса.

Расщепление резонансных поверхностей на две и явление поперечного перемещения стоячих альфвеновских волн обусловлены их специфической поперечной дисперсией, связанной с кривизной силовых линий магнитного поля [282]. В реалистичных моделях магнитосферы расстояние между полоидальной и тороидальной поверхностями  $\Delta = x_{TN}^1 - x_{PN}^1$  (для удобства изложения нижний индекс  $N$  в  $\Delta_N$  в данном разделе опускаем) много меньше их экваториального радиуса  $a$  (характерное значение  $\Delta/a \sim 0,01 \div 0,2$ ). Теория, развитая в предыдущих разделах, предполагает, что между резонансными поверхностями умещается много длин волн. Оказывается, что это равенство равносильно условию

$$m \gg a/\Delta. \quad (3.13.1)$$

В силу этого неравенства развитая выше теория, очевидно, относится к случаю  $m \gg 1$ . Основным достижением этой теории является детальное исследование продольной (вдоль магнитного поля) структуры



альфвеновской волны, после чего задача описания поперечной (по нормали к магнитным оболочкам) структуры становится одномерной.

Получить единое уравнение для описания поперечной структуры во всей области существования волны не удастся. В разд. 3.7.6 и 3.7.7 получены уравнения, описывающие поперечную структуру колебаний отдельно вблизи полоидальной и тороидальной поверхностей. В промежутке между ними (но не слишком близко к ним) применимо приближение ВКБ по поперечной координате  $x^1$ , на основе которого получено решение в этой области (см. разд. 3.7.5). В данном разделе мы получим уравнение, которое в приближении ВКБ воспроизводит это решение. Одновременно оно является обобщением уравнений вблизи резонансных поверхностей: совпадает с ними в областях их применимости. Получить такое обобщенное уравнение с помощью регулярной процедуры из исходных уравнений МГД невозможно, поэтому его следует считать модельным. В то же время, можно дать его полуфеноменологический вывод, который приведен ниже (см. также [300]).

Модельное уравнение можно решить и в случае

$$m \leq a/\Delta, \tag{3.13.2}$$

когда неприменимы результаты, полученные в разд. 3.7. Чтобы оправдать возможность использования модельного уравнения для таких  $m$ , в Приложении И дан строгий вывод поперечного уравнения при  $m \ll a/\Delta$  в двух областях по радиальной координате  $x^1$  — вблизи тороидальной поверхности и в асимптотически далекой от нее области (ограничение  $m \gg 1$ , исключаящее *field line resonance*, при этом сохраняется). Полученные уравнения качественно совпадают с модельным. Указанные соображения позволяют считать модельное уравнение достаточно надежным инструментом исследования пространственной структуры волн в широкой области ее параметров.

**3.13.1. Вывод однородного модельного уравнения (в отсутствие источника колебаний).** Возмущение в альфвеновской волне, как и в предыдущих разделах, будем описывать с помощью потенциала  $\tilde{\varphi}$ , зависимость которого от времени и координат зададим в виде

$$\tilde{\varphi} = \varphi(x^1, x^3) \exp[i(k_2 x^2 - \omega t)].$$

В разд. 3.7 для потенциала  $\varphi$  было получено уравнение

$$\hat{L}\varphi \equiv \nabla_1 \hat{L}_T(\omega) \nabla_1 \varphi - k_2^2 \hat{L}_P(\omega) \varphi = 0. \tag{3.13.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{L}_T(\omega) &= \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2}, \\ \hat{L}_P(\omega) &= \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{p} \frac{\omega^2}{v_A^2} \end{aligned}$$

— тороидальный и полоидальный операторы, содержащие производные только по продольной координате  $l$ ,  $p = (g_2/g_1)^{1/2}$  — функция,

играющая ключевую роль в теории. Ее зависимость от координаты  $l$ , обусловленная кривизной силовых линий магнитного поля, приводит к различию операторов  $\widehat{L}_T$  и  $\widehat{L}_P$  и, как следствие, к поперечной дисперсии альфвеновских волн и расщеплению резонансных поверхностей на тороидальную и полоидальную. Отметим, что координата  $x^1$  выступает в операторах  $\widehat{L}_T$  и  $\widehat{L}_P$  как параметр.

Большую роль в развитой в разд. 3.7 теории играют следующие краевые задачи:

$$\widehat{L}_T(\omega)R = 0, \quad R|_{l_{\pm}} = 0, \quad (3.13.4)$$

$$\widehat{L}_P(\omega)R = 0, \quad R|_{l_{\pm}} = 0. \quad (3.13.5)$$

Они определяют в качестве собственных значений соответственно тороидальную  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$  и полоидальную  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$  частоты, а также соответствующие собственные функции  $R = T_N(x^1, l)$  и  $R = P_N(x^1, l)$ . Здесь  $N = 1, 2, \dots$  — номер продольной гармоники стоячих вдоль магнитных силовых линий альфвеновских волн. Собственные значения и собственные функции зависят от  $x^1$  как от параметра. При заданной частоте  $\omega$  уравнение  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$  определяет координату тороидальной поверхности  $x^1 = x_{TN}^1(\omega)$ , а уравнение  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$  — координату полоидальной поверхности  $x^1 = x_{PN}^1(\omega)$ .

Введем параметр  $\bar{\kappa}$ , который по порядку величины равен  $m\Delta/a$  (напомним, что  $a$  — экваториальный радиус магнитной оболочки, см. рис. 3.1). Отношение  $m/a$  по порядку величины совпадает с азимутальной компонентой волнового вектора, которую мы обозначим  $k_y$ , имея в виду аналогию с моделью плоского слоя, в которой криволинейные координаты  $x^1, x^2, x^3$  заменяются на декартовы  $x, y, z$ . Таким образом,  $\bar{\kappa} \sim k_y \Delta$ .

Вывод модельного уравнения начнем со случая  $\bar{\kappa} \gg 1$ , который рассмотрен разд. 3.7. Решение уравнения (3.13.3) имеет вид

$$\varphi(x^1, l, \omega) = U_N(x^1, \omega)R_N(x^1, l, \omega), \quad (3.13.6)$$

где функция  $R_N(x^1, l, \omega)$  описывает продольную структуру стоячей волны и сравнительно слабо зависит от координаты  $x^1$  (характерный масштаб изменения по этой координате равен  $\Delta$ ), а функция  $U_N(x^1, \omega)$  определяет поперечную структуру волны (ее характерный масштаб по  $x^1$  равен  $1/k_y$ ).

В промежутке между полоидальной и тороидальной поверхностями, где применимо приближение ВКБ,

$$U_N(x^1, \omega) = C \left[ v_N^1 \left\langle \frac{q_N}{v_A} \right\rangle \right]^{-1/2} \exp \left[ i \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N}(x^{1'}, \omega) dx^{1'} \right]. \quad (3.13.7)$$

Здесь  $C$  — константа,  $k_{1N}(x^1, \omega)$  — квазиклассический волновой вектор,

$$v_N^1(x^1, \omega) = [\partial k_{1N}(x^1, \omega) / \partial \omega]^{-1}$$

— групповая скорость,  $q_N = pk_{1N}^2 + p^{-1}k_2^2$ , а угловые скобки означают среднее вдоль силовой линии:

$$\langle F \rangle = \left( \oint F \frac{dl}{v_A} \right) / \left( \oint \frac{dl}{v_A} \right),$$

где криволинейный интеграл означает интегрирование вдоль силовой линии между магнитосопреженными ионосферами «туда и обратно».

Волновой вектор  $k_{1N}(x^1, \omega)$  определяется вместе с продольной функцией  $R_N(x^1, l, \omega)$  из задачи на собственные значения

$$\left[ k_{1N}^2 \widehat{L}_T(\omega) + k_2^2 \widehat{L}_P(\omega) \right] R_N = 0, \quad R_N|_{l_{\pm}} = 0, \quad (3.13.8)$$

в которой  $k_{1N}^2$  играет роль собственного значения, а  $R_N(x^1, l, \omega)$  — собственной функции. Будем предполагать функцию  $R_N$  нормированной условием

$$\left\langle \frac{q_N}{v_A} R_N^2 \right\rangle = \left\langle \frac{q_N}{v_A} \right\rangle.$$

Выбор весового множителя в этом соотношении определяется тем соображением, что с таким множителем функции  $R_N$  ортогональны

$$\left\langle \frac{q_N}{v_A} R_N R_{N'} \right\rangle = \delta_{NN'} \left\langle \frac{q_N}{v_A} \right\rangle,$$

где  $\delta_{NN'}$  — символ Кронекера. Здесь же отметим, что

$$\left\langle \frac{q_N}{v_A} \right\rangle = \alpha_T k_{1N}^2 + \alpha_P k_2^2,$$

где обозначено

$$\alpha_T = \left\langle \frac{p}{v_A} \right\rangle, \quad \alpha_P = \left\langle \frac{1}{pv_A} \right\rangle.$$

Сравнивая задачу (3.13.8) с задачами (3.13.4) и (3.13.5), легко видеть, что на полоидальной поверхности, при  $x^1 = x_{PN}^1$ ,

$$k_{1N}^2 = 0, \quad R_N = P_N,$$

а на тороидальной поверхности, при  $x^1 = x_{TN}^1$ ,

$$k_{1N}^2 = \infty, \quad R_N = T_N.$$

В разделе 3.7.2 получены выражения для  $k_{1N}^2$  вблизи резонансных поверхностей. Вблизи полоидальной поверхности

$$k_{1N}^2 = k_2^2 \alpha_P \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial l^2} v_A R_N^2 \right\rangle^{-1} (\omega^2 - \Omega_{PN}^2), \quad (3.13.9)$$

и вблизи тороидальной поверхности

$$k_{1N}^2 = k_2^2 \frac{1}{\alpha_T} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial l^2} \left( -\frac{1}{p} \right) v_A R_N^2 \right\rangle \frac{1}{\Omega_{TN}^2 - \omega^2}. \quad (3.13.10)$$

В качестве первого шага к выводу модельного уравнения примем для  $k_{1N}(x^1, \omega)$  следующее модельное выражение:

$$k_{1N}^2 = k_y^2 \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2}{\Omega_{TN}^2 - \omega^2}, \quad (3.13.11)$$

где обозначено

$$k_y^2 = \frac{\alpha_P}{\alpha_T} k_2^2. \quad (3.13.12)$$

Определим теперь параметр  $\bar{k}$  равенством

$$\bar{k} = k_y \Delta.$$

Так как по порядку величины (подробности см. в разд. 3.7)

$$\frac{1}{\alpha_T} \left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} v_A R_N^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\alpha_P} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{1}{p} \right) v_A R_N^2 \right\rangle \sim (\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2),$$

то выражение (3.13.11) правильно передает предельные случаи (3.13.9) и (3.13.10).

Будем считать, что модельное уравнение, описывающее функцию  $U_N(x^1, \omega)$ , представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x^1} A(x^1, \omega) \frac{\partial U_N(x^1, \omega)}{\partial x^1} + D(x^1, \omega) U_N(x^1, \omega) = 0, \quad (3.13.13)$$

где  $A$  и  $D$  — функции, подлежащие определению. В приложении И показано, что знание решения уравнения (3.13.13) в приближении ВКБ (как показателя экспоненты, так и предэкспоненты) однозначно определяет функции  $A$  и  $D$ . Считая, что (3.13.7) является ВКБ-решением уравнения (3.13.13), в соответствии с результатами Приложения И имеем

$$A = \frac{\alpha_T k_{1N}^2 + \alpha_P k_2^2}{\partial k_{1N}^2 / \partial \omega}; \quad D = \frac{k_{1N}^2 (\alpha_T k_{1N}^2 + \alpha_P k_2^2)}{\partial k_{1N}^2 / \partial \omega}.$$

Подставляя сюда модельное выражение (3.13.13), приходим к следующему уравнению для функции  $U_N(x^1, \omega)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\omega^2 - \Omega_{TN}^2) \frac{\partial U_N(x^1, \omega)}{\partial x^1} - k_y^2 (\omega - \Omega_{PN}^2) U_N(x^1, \omega) = 0. \quad (3.13.14)$$

Достоинством изложенного вывода модельного уравнения является ясность сделанных предположений. Это, во-первых, предположение о том, что оно должно быть дифференциальным уравнением второго порядка и, во-вторых, использование модельного выражения (3.13.11) для  $k_{1N}^2(x^1, \omega)$ . Недостатком же этого вывода является невозможность получения правой части уравнения, играющей роль источника колебаний. Этот недостаток связан с использованием в качестве отправной точки решения ВКБ (3.13.7), для которого в разд. 3.7 показано, что в области его применимости источником можно пренебречь. В связи с этим, мы дадим другой вывод модельного уравнения, который

не столь прозрачен как предыдущий для получения левой части уравнения, но зато позволяет получить его правую часть.

**3.13.2. Неоднородное модельное уравнение.** Будем исходить из уравнения (3.13.3) и граничного условия на ионосфере, в котором учтена диссипация и сторонний ток, играющий роль источника колебаний (см. разд. 2.17.2):

$$\varphi|_{l_{\pm}} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{(\pm)}}{V_{p\pm}}. \quad (3.13.15)$$

Здесь

$$v_{p\pm} = \frac{c^2 \cos \chi_{\pm}}{4\pi \Sigma_P^{(\pm)}}, \quad V_{p\pm} = \frac{\Sigma_P^{(\pm)}}{\cos \chi_{\pm}},$$

значки  $(\pm)$  относятся к сопряженным ионосферам северного и южного полушарий,  $\chi_{\pm}$  — угол между вертикалью и силовой линией в точке ее пересечения с ионосферой (см. рис. 2.42),  $\Sigma_P^{(\pm)}$  — интегральная педерсеновская проводимость ионосферы, функция  $J_{\parallel}^{(\pm)}$  связана с плотностью стороннего продольного тока в ионосфере  $j_{\parallel}^{(\pm)}$  соотношением

$$\Delta_{\perp}^{(\pm)} J_{\parallel}^{(\pm)} = j_{\parallel}^{(\pm)}, \quad (3.13.16)$$

где  $\Delta_{\perp}^{(\pm)} = \Delta_{\perp}|_{l_{\pm}} \equiv (1/g_1^{(\pm)}) \nabla_1^2 - k_2^2/g_2^{(\pm)}$ . Правую часть соотношения (3.13.15) будем считать малой, что означает малость параметров  $v_{p\pm}$  и  $(1/V_{p\pm})$ .

Вначале рассмотрим случай  $\bar{\kappa} \gg 1$ . В разд. 3.7 для этого случая развита теория возмущений, использующая сразу несколько малых параметров: малость правой части соотношения (3.13.15) и малый параметр  $(1/\bar{\kappa})$ , связанный с неравенством

$$\left| \frac{\nabla_1 U_N}{U_N} \right| \gg \left| \frac{\nabla_1 R_N}{R_N} \right|.$$

В главном порядке теории возмущений решение представляется в виде (3.13.6) и имеет место задача на собственные значения (3.13.8), которую мы теперь перепишем в виде

$$\left[ -\frac{\nabla_1^2 U_N}{U_N} \widehat{L}_T(\omega) + k_2^2 \widehat{L}_P(\omega) \right] R_N = 0, \quad R_N|_{l_{\pm}} = 0. \quad (3.13.17)$$

Эта задача определяет собственную функцию  $R_N$  и отношение

$$-\frac{\nabla_1^2 U_N(x^1, \omega)}{U_N(x^1, \omega)} = k_{1N}^2(x^1, \omega), \quad (3.13.18)$$

которое играет роль собственного значения. Знание функции  $k_{1N}^2(x^1, \omega)$  позволяет рассматривать соотношение (3.13.18) как уравнение для функции  $U_N(x^1, \omega)$ . Однако точность, с которой получено это соотношение, недостаточна для определения  $U_N$ , поскольку малые поправки, возникающие в следующем порядке теории возмущений могут значи-

тельно изменить решение. На языке приближения ВКБ можно сказать, что точность, с которой получено соотношение (3.13.18), позволяет определить правильно экспоненту решения, но не его предэкспоненту.

В следующем порядке теории возмущений полагаем

$$\varphi(x^1, l, \omega) = U_N(x^1, \omega) [R_N(x^1, l, \omega) + h_N(x^1, l, \omega)], \quad (3.13.19)$$

где  $h_N$  — малая поправка. Нашей целью будет не определение этой поправки, а получение правильного уравнения для функции главного приближения  $U_N$ , которое представляет собой условие разрешимости уравнения для поправки  $h_N$ . Подставляя (3.13.19) в уравнение (3.13.3), получаем

$$(\nabla_1^2) \widehat{L}_T R_N + (\nabla_1 U_N) \widehat{L}_T (\nabla_1 R_N) - k_2^2 U_N \widehat{L}_P R_N = -\widehat{L} U_N h_N. \quad (3.13.20)$$

Умножим это равенство слева на  $R_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. Результат представим в виде

$$\nabla_1 \varsigma_N(x^1, \omega) \nabla_1 U_N - k_2^2 \varpi_N(x^1, \omega) U_N = -\oint H_N \widehat{L} U_N h_N dl, \quad (3.13.21)$$

где обозначено

$$\varsigma_N(x^1, \omega) = \oint R_N \widehat{L}_T(\omega) R_N dl, \quad (3.13.22)$$

$$\varpi_N(x^1, \omega) = \oint R_N \widehat{L}_P(\omega) R_N dl. \quad (3.13.23)$$

Для функций  $\varsigma_N$  и  $\varpi_N$  нетрудно вывести полезное соотношение. Умножая (3.13.17) на  $R_N$  и интегрируя по  $l$ , имеем

$$\frac{\varpi_N(x^1, \omega)}{\varsigma_N(x^1, \omega)} = -\frac{k_{1N}^2(x^1, \omega)}{k_2^2}. \quad (3.13.24)$$

Получить явное аналитическое выражение для этих функций не представляется возможным. Мы примем для них следующие модельные выражения

$$\varpi_N(x^1, \omega) = \alpha_P(\omega^2 - \Omega_{PN}^2), \quad (3.13.25)$$

$$\varsigma_N(x^1, \omega) = \alpha_T(\omega^2 - \Omega_{TN}^2). \quad (3.13.26)$$

В пользу такого выбора можно привести следующие аргументы. В разд. 3.7 развивается теория возмущений, позволяющая явно вычислять различные функции вблизи полоидальной и тороидальной резонансных поверхностей. Ее применение приводит к формулам (3.13.25) и (3.13.26). Если эти выражения подставить в (3.13.24), то получается уже использованное модельное выражение (3.13.11) для  $k_{1N}^2(x^1, \omega)$ . Наконец, эти выражения дают в уравнении (3.13.21) такую же левую часть, что и в уравнении (3.13.14).

Для вычисления правой части уравнения (3.13.21) используем ли-  
неаризованное граничное условие (3.13.15):

$$U_N h_N|_{l_{\pm}} = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} U_N \frac{\partial R_N}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{(\pm)}}{V_{p\pm}}.$$

С помощью интегрирования по частям и учитывая равенство (3.13.16),  
получаем

$$\oint R_N \widehat{L} U_N h_N dl = 2i\alpha_T \omega \gamma_{TN} \nabla_1 U_N^2 - 2i\alpha_P k_2^2 \omega \gamma_{PN} U_N - I_N, \quad (3.13.27)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \gamma_{TN} &= \frac{1}{\alpha_T} \frac{1}{\omega^2} \left[ p_+ v_{p+} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_+}^2 + p_- v_{p-} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_-}^2 \right], \\ \gamma_{PN} &= \frac{1}{\alpha_P} \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{v_{p+}}{p_+} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_+}^2 + \frac{v_{p-}}{p_-} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_-}^2 \right], \\ I_N &= 2\sqrt{g_1^{(+)} g_2^{(+)}} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_+} \frac{j_{\parallel}^{(+)}}{V_{p+}} - 2\sqrt{g_1^{(-)} g_2^{(-)}} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)_{l_-} \frac{j_{\parallel}^{(-)}}{V_{p-}}. \end{aligned}$$

Величины  $\gamma_{TN}$  и  $\gamma_{PN}$  можно трактовать как локальные значения  
декремента затухания соответственно вблизи тороидальной и поло-  
идальной поверхностей (подробнее см. в разд. 3.7.4). Они предпо-  
лагаются малыми:  $\gamma_{TN}, \gamma_{PN} \ll \omega$ . Порядок их величины одинаков,  
и в рамках модельного рассмотрения мы не будем их различать, поло-  
жив  $\gamma_{TN} = \gamma_{PN} = \gamma_N$ .

Подставляя (3.13.25)–(3.13.27) в соотношение (3.13.21), приходим  
к окончательной форме модельного уравнения:

$$\alpha_T \nabla_1 \left[ (\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{TN}^2 \right] \nabla_1 U_N - \alpha_P k_2^2 \left[ (\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{PN}^2 \right] \nabla_1 U_N = I_N. \quad (3.13.28)$$

Это уравнение обобщает уравнение (3.13.14), учитывая диссипацию  
в ионосфере и сторонний ток, играющий роль источника колебаний.  
Подчеркнем, что уравнение (3.13.28) вблизи резонансных поверхностей  
совпадает с соответствующими уравнениями, выведенными в разд. 3.7  
с помощью строгой теории возмущений.

Перейдем теперь к случаю  $\bar{\kappa} \ll 1$ . В отличие от противоположного  
предельного случая,  $\bar{\kappa} \gg 1$ , здесь не удастся провести строгий и пол-  
ный математический анализ, на который можно было бы опираться.  
В Приложении К дан строгий вывод уравнения для поперечной струк-  
туры волны в двух предельных областях по координате  $x^1$ :

$$|x^1 - x_{TN}^1| \ll 1/k_y, \quad |x^1 - x_{TN}^1| \gg 1/k_y. \quad (3.13.29)$$

Решение здесь также может быть представлено в виде (3.13.6), причем  
в первой области продольная функция  $R_N$  совпадает с тороидаль-  
ной  $T_N$ , а во второй — с полоидальной  $P_N$ . Уравнения для поперечной

функции  $U_N$  в обеих областях качественно совпадают с уравнением (3.13.28). На этом основании мы будем считать, что модельное уравнение (3.13.28) применимо и для случая  $\bar{\kappa} \ll 1$ . После этого, естественно считать, что оно применимо для произвольных значений  $\bar{\kappa}$ . Таким образом, можно полагать, что модельное уравнение (3.13.28) применимо в широкой области параметров, ограниченной условиями

$$m \gg 1, \quad \gamma_N \ll \omega.$$

**3.13.3. Аналитическое решение модельного уравнения.** Как будет видно ниже, область локализации моды по координате  $x^1$  много меньше характерного масштаба изменения равновесных параметров. Это означает, что для функций  $\Omega_{TN}(x^1)$  и  $\Omega_{PN}(x^1)$  в этой области можно использовать линейные разложения

$$\begin{aligned} \Omega_{TN} &= \omega \left( 1 - \frac{x^1 - x_{TN}^1}{2a_N} \right), \\ \Omega_{PN} &= \omega \left( 1 - \frac{x^1 - x_{PN}^1}{2a_N} \right). \end{aligned} \quad (3.13.30)$$

Здесь  $a_N$  — характерный масштаб изменения функций вблизи резонансных поверхностей. Предполагается, что  $\nabla_1 \Omega_{TN}, \nabla_1 \Omega_{PN} < 0$ , как это имеет место в большей части магнитосферы. Разложения (3.13.30) неприменимы вблизи экстремумов функций  $\Omega_{TN}(x^1), \Omega_{PN}(x^1)$ , где необходимо специальное рассмотрение.

Используя разложения (3.13.30), приводим уравнение (3.13.28) к виду

$$\nabla_1(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon)\nabla_1 U_N - k_y^2(x^1 - x_{PN}^1 + i\varepsilon)U_N = b_N, \quad (3.13.31)$$

где

$$\varepsilon = 2a_N \frac{\gamma_N}{\omega}, \quad b_N = \frac{a_N I_N}{\alpha_T \omega^2}.$$

Будем предполагать, что правая часть уравнения (3.13.31) имеет по координате  $x^1$  масштаб изменения много больший области локализации моды, поэтому в пределах этой области величину  $b_N$  можно считать константой.

Поскольку коэффициенты уравнения (3.13.31) являются линейными функциями  $x^1$ , его можно решать с помощью преобразования Фурье. Обозначим

$$\tilde{U}_N(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_N(x^1) \exp(-ikx^1) dx^1. \quad (3.13.32)$$



Осуществляя преобразование Фурье левой и правой частей уравнения (3.13.31), получаем

$$-i(k^2 + k_y^2) \frac{d\tilde{U}(k)}{dk} + [k^2 x_{TN}^1 + k_y^2 x_{PN}^1 - ik - i\varepsilon(k^2 + k_y^2)] \tilde{U}_N = b_N \delta(k). \quad (3.13.33)$$

Решение этого уравнения первого порядка находится без труда. Используя обратное преобразование Фурье, имеем

$$U_N(x^1) = i \frac{b_N}{k_y} \int_0^\infty \frac{dk}{(k^2 + k_y^2)^{1/2}} \exp \left[ ik(x^1 - x_{TN}^1) - k\varepsilon + ik_y \Delta \operatorname{arctg} \frac{k}{k_y} \right]. \quad (3.13.34)$$

Полученное интегральное представление может быть использовано для аналитического изучения различных предельных случаев.

На большом расстоянии от резонансных поверхностей, при  $|x^1 - x_{TN}^1| \gg \Delta, 1/k_y$ , основной вклад в интеграл вносит область интегрирования  $k \ll k_y$ . Полагая в предэкспоненте  $k = 0$ , имеем

$$U_N(x^1) = -\frac{b_N}{k_y^2(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon)}. \quad (3.13.35)$$

Это же выражение получается для произвольных значений  $x^1$  при большом затухании, когда  $\varepsilon \gg 1/k_y, \Delta$ .

В обратном предельном случае, при  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll 1/k_y, \Delta$ , основной вклад в интеграл дает область  $k \gg k_y$ . В этом случае удобнее сначала вычислить  $\nabla_1 U_N(x^1)$ . Дифференцируя (3.13.34) под знаком интеграла и пренебрегая затем в предэкспоненте  $k_y$ , малом по сравнению с  $k$ , имеем

$$\begin{aligned} \nabla_1 U_N(x^1) &= -\frac{b_N}{k_y} \exp\left(\frac{i\pi\bar{\kappa}}{2}\right) \int_0^\infty \exp[k(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon)] dk = \\ &= -i \frac{b_N \exp(i\pi\bar{\kappa}/2)}{k_y(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.13.36)$$

Интегрируя это выражение, получаем главный член в асимптотике функции  $U_N(x^1)$  вблизи тороидальной поверхности:

$$U_N(x^1) = -\frac{b_N}{k_y} \exp\left(\frac{i\pi\bar{\kappa}}{2}\right) \ln(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon). \quad (3.13.37)$$

В случае  $\bar{\kappa} \gg 1$  для вычисления интеграла (3.13.34) можно использовать метод перевала (см. [281]). Обозначим большую фазу подынтегрального выражения

$$\Xi(x^1, k) = k(x^1 - x_{TN}^1) + k_y \Delta \operatorname{arctg} \frac{k}{k_y}. \quad (3.13.38)$$

Точка перевала определяется уравнением  $\partial \Xi / \partial k = 0$ . Из этого уравнения имеем

$$k = k_{1N}(x^1) \equiv k_y \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{x_{TN}^1 - x^1} \right)^{1/2}.$$

Как и следовало ожидать, это решение совпадает (если учесть формулы (3.13.30)) с модельным выражением (3.13.11). Значение фазы в точке перевала

$$\begin{aligned} \Xi(x^1, k_{1N}(x^1)) &\equiv \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N}(x^{1'}) dx^{1'} = \\ &= k_y \sqrt{(x^1 - x_{PN}^1)(x_{TN}^1 - x^1)} + k_y \Delta \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^1 - x_{PN}^1}{x_{TN}^1 - x^1}}. \end{aligned}$$

Вторая производная фазы в точке перевала

$$\left. \frac{\partial^2 \Xi}{\partial k^2} \right|_{k=k_{1N}} = -\frac{2a_N}{\omega} v_N^1,$$

где групповая скорость дается выражением

$$v_N^1 = \frac{\omega}{k_y} \frac{\Delta}{a_N} \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1}{\Delta} \right)^{1/2} \left( \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\Delta} \right)^{3/2}.$$

Теперь нетрудно написать результат интегрирования методом перевала:

$$\begin{aligned} U_N(x^1) &= \frac{b_N}{k_y} \left[ \frac{\omega}{a_N} \frac{1}{v_N^1} \frac{1}{(k_{1N}^2 + k_y^2)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \exp \left[ i \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N}(x^{1'}) dx^{1'} - k_{1N}(x^1) \varepsilon + i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.13.39) \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с формулой (3.13.7) приближения ВКБ, с тем, конечно, отличием, что здесь определена константа  $C$  и все входящие функции имеют простые аналитические выражения. При приближении к резонансным поверхностям  $v_N^1$  стремится к нулю и метод перевала становится неприменим. Но в этих случаях в (3.13.34) возможны другие упрощения.

Вблизи полоидальной поверхности основной вклад вносит интегрирование по  $k \ll k_y$ . Это видно из того, что фаза (3.13.38) при  $x^1 = x_{PN}^1$  имеет в точке  $k = 0$  нуль третьего порядка. Разлагая эту фазу в ряд

по малым  $k$ , получаем

$$U_N(x^1) = i \frac{b_N}{k_y^2} \int_0^\infty dk \exp \left[ ik(x^1 - x_{PN}^1 + i\varepsilon) - i \frac{\Delta}{3k_y^2} k^3 \right].$$

Введем характерную длину  $\lambda_P = (\Delta/k_y^2)^{1/3}$  и сделаем замену переменной  $k = s/\lambda_P$ . Результат представим в виде

$$U_N(x^1) = -\frac{b_N}{k_y^{4/3} \Delta^{1/3}} G \left( \frac{x^1 - x_{PN}^1 + i\varepsilon}{\lambda_P} \right), \quad (3.13.40)$$

где  $G(z)$  — функция, имеющая интегральное представление (3.11.5).

Вблизи тороидальной поверхности существенно интегрирование по большим  $k$ . Это видно из того, что при  $x^1 = x_{TN}^1$  (и в отсутствие затухания,  $\varepsilon = 0$ ) интеграл (3.13.34) расходится на верхнем пределе. Разлагая подынтегральное выражение по большим  $k$ , имеем

$$U_N(x^1) = i \frac{b_N}{k_y} \exp \left( i \frac{\pi \bar{\kappa}}{2} \right) \int_0^\infty \frac{dk}{k} \exp \left[ ik(x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon) - i \frac{k_y^2 \Delta}{k} \right].$$

Вводя здесь характерную длину  $\lambda_T = 1/(k_y^2 \Delta)$ , и делая замену переменной  $k = s/\lambda_T$ , представим результат в виде

$$U_N(x^1) = 2i \frac{b_N}{k_y} \exp \left( i \frac{\pi \bar{\kappa}}{2} \right) g \left( \frac{x^1 - x_{TN}^1 + i\varepsilon}{\lambda_T} \right), \quad (3.13.41)$$

где функция  $g(z) = K_0(2z^{1/2})$ , выражающаяся через модифицированную функцию Бесселя  $K_0$ , имеет интегральное представление (3.11.6).

Формулы (3.13.40)–(3.13.41) полностью совпадают с соответствующими формулами в разд. 3.7. Это означает, что модельное уравнение в случае  $\bar{\kappa} \gg 1$  воспроизводит все существенные результаты строгой теории.

В обратном предельном случае,  $\bar{\kappa} \ll 1$ , множитель

$$\exp \left[ ik_y \Delta \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{k_y} \right) \right] \approx 1 + ik_y \Delta \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{k_y} \right)$$

можно опустить, поскольку он дает лишь малую поправку к решению. После этого интеграл (3.13.34) можно представить в виде

$$U_N(x^1) = i \frac{b_N}{k_y} f [k_y(x^1 - x_{TN}^1)], \quad (3.13.42)$$

где

$$f(\xi) = \int_0^\infty \frac{dq}{(1+q^2)^{1/2}} \exp(iq\xi - \epsilon q) \quad (3.13.43)$$

и введено обозначение

$$\epsilon = k_y \varepsilon = 2k_y a_N (\gamma_N / \omega).$$

В решении (3.13.42), (3.13.43) отсутствует параметр  $\Delta$ . Это означает, что полоидальная поверхность при  $\bar{\kappa} \ll 1$  ничем не выделена и нет оснований называть ее резонансной. Характерный масштаб решения в этом случае равен  $1/k_y$ . Поведение решения при  $|x^1 - x_{TN}^1| \gg 1/k_y$  и  $|x^1 - x_{TN}^1| \ll 1/k_y$  определяется соответственно формулами (3.13.35) и (3.13.37).

Выражение для  $U_N(x^1)$  можно представить в виде, аналогичном выражению (3.13.42) и в общем случае для произвольных значений  $\bar{\kappa}$ . Вводя безразмерную переменную

$$\xi = k_y(x^1 - x_{TN}^1) \quad (3.13.44)$$

и сделав в (3.13.34) замену  $q = k/k_y$ , имеем

$$U_N(x^1) = i \frac{b_N}{k_y} f(\xi), \quad (3.13.45)$$

где

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{dq}{(1+q^2)^{1/2}} \exp(iq\xi - \epsilon q + i\bar{\kappa} \arctg q). \quad (3.13.46)$$

В этой формуле четко выделяется роль безразмерных параметров:  $\epsilon$  характеризует диссипацию, а  $\bar{\kappa}$  — дисперсию моды.

Зная функцию  $U_N(x^1)$ , с помощью формул (Д.1), (Д.2) (Приложение Д) и (3.13.6) можно написать выражения для компонент электромагнитного поля колебаний:

$$E_1 = -ib_N f'(\xi) R_N, \quad E_2 = (\alpha_T / \alpha_P)^{1/2} b_N f(\xi) R_N, \quad (3.13.47)$$

$$B_1 = \frac{c}{\omega} \frac{g_1}{\sqrt{g}} k_2 f(\xi) \frac{\partial R_N}{\partial l}, \quad B_2 = i \frac{c}{\omega} \frac{g_2}{\sqrt{g}} k_2 f'(\xi) \frac{\partial R_N}{\partial l}. \quad (3.13.48)$$

Важной характеристикой колебаний является их поляризация. Из приведенных выше формул видно, что рассматриваемые нами стоячие альфеновские волны с  $m \gg 1$  в одной области по координате  $x^1$  могут быть тороидальными (т.е.  $|B_2| \gg |B_1|$  и  $|E_1| \gg |E_2|$ ), а в другой — полоидальными ( $|B_2| \ll |B_1|$  и  $|E_1| \ll |E_2|$ ). Введем параметр, характеризующий тип волны интегрально. Для этой цели естественно использовать энергию колебания. Плотность энергии гидромагнитных волн складывается из энергии возмущенного магнитного поля и кинетической энергии плазмы:

$$w = \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + \frac{\rho_0 \mathbf{v}_E^2}{2},$$

где  $\rho_0$  — плотность плазмы,  $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]/B_0^2$  — возмущенная скорость плазмы, равная скорости электрического дрейфа. Представим энергию

колебания в виде суммы  $w = w_T + w_P$  тороидальной и полоидальной составляющих, где

$$w_T = \frac{B_2 B_2^*}{8\pi g_2} + \frac{\rho_0 c^2}{2B_0^2} \frac{E_1 E_1^*}{g_1}, \quad w_P = \frac{B_1 B_1^*}{8\pi g_1} + \frac{\rho_0 c^2}{2B_0^2} \frac{E_2 E_2^*}{g_2}.$$

Подставляя сюда (3.13.47) и (3.13.48), получаем

$$w_T = \frac{c^2 |b_N|^2}{8\pi} \frac{1}{g_1} |f'(\xi)|^2 \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{v_A^2} R_N^2 \right],$$

$$w_P = \frac{c^2 |b_N|^2}{8\pi} \frac{\alpha_T}{\alpha_P} \frac{1}{g_2} |f(\xi)|^2 \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{v_A^2} R_N^2 \right].$$

Энергия, содержащаяся в тонкой силовой трубке с единичными размерами по координатам  $x^1$  и  $x^2$ , дается формулами

$$W_T = \frac{1}{2} \oint \sqrt{g_1 g_2} w_T dl = \frac{c^2 |b_N|^2}{16\pi} |f'(\xi)|^2 \oint p \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{v_A^2} R_N^2 \right] dl,$$

$$W_P = \frac{1}{2} \oint \sqrt{g_1 g_2} w_P dl = \frac{c^2 |b_N|^2}{16\pi} \frac{\alpha_T}{\alpha_P} |f(\xi)|^2 \oint \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{v_A^2} R_N^2 \right] dl.$$

Интегралы вдоль силовой линии в этих формулах будем считать равными  $2\alpha_T$  и  $2\alpha_P$  соответственно. Это верно по порядку величины, и такая точность достаточна в рамках модельного рассмотрения. Таким образом,

$$W_T(x^1) = \frac{c^2 |b_N|^2}{8\pi} \alpha_T |f'(\xi)|^2, \quad (3.13.49)$$

$$W_P(x^1) = \frac{c^2 |b_N|^2}{8\pi} \alpha_T |f(\xi)|^2.$$

Полная энергия колебания, проинтегрированная по  $x^1$  и отнесенная к единичному интервалу по координате  $x^2$ , дается выражениями

$$\bar{W}_T = \int_{-\infty}^{\infty} W_T(x^1) dx^1 = \frac{\alpha_T c^2 |b_N|^2}{8\pi k_y} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\bar{W}_P = \int_{-\infty}^{\infty} W_P(x^1) dx^1 = \frac{\alpha_T c^2 |b_N|^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 d\xi.$$

Подставляя сюда выражение (3.13.46), после несложных преобразований получаем

$$\bar{W}_T = \frac{\alpha_T c^2 |b_N|^2}{4k_y} \int_0^{\infty} \frac{q^2 e^{-2\epsilon q}}{1+q^2} dq,$$

$$\bar{W}_P = \frac{\alpha_T c^2 |b_N|^2}{4k_y} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\epsilon q}}{1+q^2} dq.$$

Примечательно, что эти величины не зависят от параметра  $\bar{\kappa}$ . Это означает, что интегральный тип поляризации волны определяется только затуханием (параметром  $\epsilon$ ). Отметим также, что для полной энергии колебаний имеется простое выражение

$$\bar{W} = \bar{W}_T + \bar{W}_P = \frac{\alpha_T c^2 |b_N|^2}{8k_y \epsilon}.$$

В качестве параметра, определяющего тип поляризации волны, примем величину

$$\eta = \frac{\bar{W}_T}{\bar{W}_P} = \left( \int_0^\infty \frac{q^2 e^{-2\epsilon q}}{1+q^2} dq \right) / \left( \int_0^\infty \frac{e^{-2\epsilon q}}{1+q^2} dq \right).$$

Асимптотические выражения для функции  $\eta = \eta(\epsilon)$  имеют вид

$$\eta(\epsilon) = \begin{cases} (\pi\epsilon)^{-1} & \text{при } \epsilon \ll 1, \\ \epsilon^{-2}/2 & \text{при } \epsilon \gg 1. \end{cases}$$

Таким образом, при малом затухании колебания являются тороидальными, а при большом — полоидальными вне зависимости от величины  $\bar{\kappa}$ .

**3.13.4. Численное исследование решений модельного уравнения.** Полную картину поперечной структуры волны и ее поляризации в зависимости от значений параметров  $\bar{\kappa}$  и  $\epsilon$ , в том числе для их промежуточных значений, можно получить с помощью численного исследования. Проще всего это сделать, используя интегральное представление для решения в форме (3.13.45), (3.13.46). Характерные результаты численных расчетов представлены на рис. 3.44—3.46.

На рис. 3.44 приведены графики функций  $\text{Re}f(\xi)$  и  $\text{Im}f(\xi)$  при трех различных значениях параметра  $\bar{\kappa} = 0.1; 3; 20$  и фиксированном значении параметра  $\epsilon = 10^{-3}$ . Последнее выбрано очень малым, чтобы исключить влияние диссипации и отчетливо продемонстрировать роль дисперсии. На первом из графиков рис. 3.44 мы имеем структуру, типичную для резонансных колебаний, например для резонансных альфвеновских волн (*field line resonance*). Напомним, что поскольку  $m \gg 1$ , обычный альфвеновский резонанс в этом случае невозможен — источником поля в окрестности резонанса является не быстрая магнитозвуковая волна, приходящая извне, а сторонние токи в ионосфере (т. е. источник — внутримангнитосферный). Однако, основные особенности в поведении поля имеют тот же самый характер, что и для резонансных альфвеновских волн. На резонансной (тороидальной) поверхности имеется сингулярность — логарифмическая для компонент  $E_1$  и  $B_2$  и полюсная — для компонент  $E_2$  и  $B_1$  (см. (3.13.36) и (3.13.37)), регуляризованная слабой диссипацией. На полоидальной поверхности, при  $\xi = -\bar{\kappa}$ , никаких заметных деталей в поведении поля

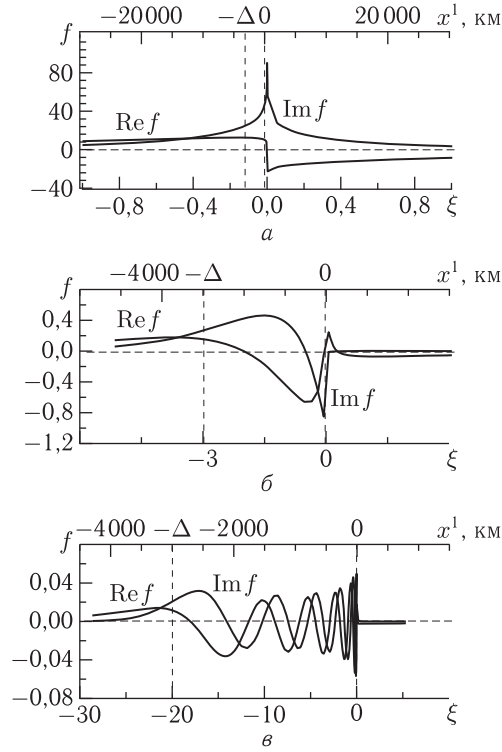


Рис. 3.44. Структура поля стоячих альфвеновских волн с  $t \gg 1$  поперек магнитных оболочек для различных значений параметра  $\bar{\kappa}$ :  $a - \bar{\kappa} = 0,1$  — типичная структура резонансных колебаний;  $б - \bar{\kappa} = 3$  — структура промежуточного типа;  $в - \bar{\kappa} = 20$  — структура типа «бегущая волна». Верхняя ось — координата  $x^1$  в экваториальной плоскости на магнитной оболочке  $L = 6,6$ , нижняя — безразмерная переменная  $\xi$ . Точка  $\xi = 0$  соответствует тороидальной резонансной поверхности ( $x^1 = x_{TN}^1$ ), а  $\xi = -\bar{\kappa}$  — полоидальной ( $x^1 = x_{PN}^1$ )

нет. При удалении от резонансной поверхности поле плавно выходит на асимптотические значения.

При увеличении  $\bar{\kappa}$  происходит переход к структуре типа «бегущая волна». Совершенно отчетливо она видна на третьем графике рис. 3.44. Здесь поле заключено между полоидальной и тороидальной поверхностями, где умещается много длин волн. Длина волны резко уменьшается при приближении к тороидальной поверхности, где имеется сингулярность поля. Зависимость структуры поля колебаний от двух параметров  $\bar{\kappa}$  и  $\epsilon$  нагляднее демонстрируется графиками тороидальной и полоидальной составляющих плотности энергии колебания  $w_T(x^1)$  и  $w_P(x^1)$ . На рис. 3.45 изображены графики функций  $W_T(\xi)$  и  $W_P(\xi)$  для значения  $\bar{\kappa} = 20$  и трех различных значений параметра  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon \sim 1$  и  $\epsilon \gg 1$ . Отметим, что численные значения параметра  $\epsilon$  на рис. 3.45

и рис. 3.46 выбраны так, чтобы добиться наилучшего визуального представления рассматриваемых функций. В первом случае отчетливо доминирует тороидальная составляющая, а во втором — полоидальная. Интересной особенностью, которая хорошо видна на этих графиках, является колебательный характер плотности энергии полоидальной составляющей. Он обусловлен тем обстоятельством, что при  $\bar{\kappa} \gg 1$  волна порождается в окрестности полоидальной поверхности и вблизи нее представляет собой почти стоячую по координате  $x^1$  волну, структура бегущей волны формируется только при достаточном удалении от полоидальной поверхности.

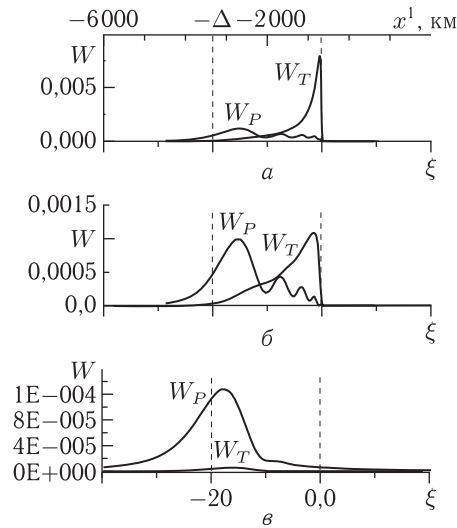


Рис. 3.45. Зависимость полоидальной ( $W_P$ ) и тороидальной ( $W_T$ ) составляющих полной энергии стоячей альфвеновской волны (в относительных единицах) для колебаний типа «бегущая волна» ( $\bar{\kappa} \gg 1$ , см. рис. 3.44, в) при различных значениях безразмерного показателя диссипации  $\epsilon = 2k_y a_N (\gamma_N / \omega)$ :  
 $a - \epsilon = 0,4$ ;  $б - \epsilon = 0,8$ ;  $в - \epsilon = 4$

На рис. 3.46 аналогичным образом изображен случай  $\bar{\kappa} = 0,1$  при трех значениях параметра  $\epsilon$ :  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon \sim 1$  и  $\epsilon \gg 1$ . Здесь картина по координате  $\xi$  более простая. Обе функции  $W_T(\xi)$  и  $W_P(\xi)$  имеют колоколообразную форму и при переходе от первого случая к последнему меняются ролями. Отметим, что поскольку в этих случаях можно считать  $\epsilon \gg \bar{\kappa}$ , то для  $f(\xi)$  можно использовать асимптотическое выражение при больших  $\epsilon$ . Тогда (ср. с (3.13.35))

$$W_T(\xi) \sim \frac{1}{(\xi^2 + \epsilon^2)^2}, \quad W_P(\xi) \sim \frac{1}{\xi^2 + \epsilon^2}.$$

Графики на рис. 3.46 хорошо согласуются с этими формулами.



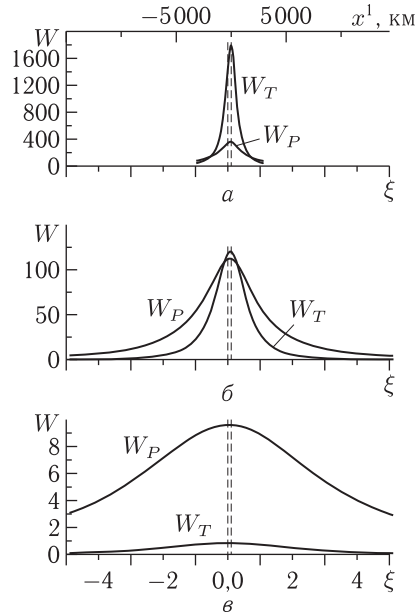


Рис. 3.46. То же, что и на рис. 3.45, но для волны с поперечной структурой резонансного типа ( $\bar{\kappa} \ll 1$ , см. рис. 3.44, а): а —  $\epsilon = 0,4$  — слабая диссипация — волна тороидального типа; б —  $\epsilon = 1,2$  — умеренная диссипация — волна промежуточного типа; в —  $\epsilon = 6$  — сильная диссипация — волна полоидального типа

### 3.14. Пространственная структура альфвеновских колебаний, возбуждаемых в магнитосфере локализованным монохроматическим источником

В этом и следующем разделах рассмотрим альфвеновские колебания магнитосферы, источником которых служат локализованные возмущения в ионосфере. Возмущения могут быть как монохроматическими, так и широкополосными. В связи с этим, для исследования поля альфвеновских волн необходимо перейти от описания структуры отдельной фурье-гармоники колебаний, с фиксированной частотой  $\omega$  и азимутальным волновым числом  $m$ , к полю колебаний, генерируемых широкополосными, распределенными в пространстве источниками.

В разд. 3.13 было предложено модельное уравнение, позволяющее исследовать пространственную структуру альфвеновских волн практически во всем диапазоне значений азимутальных волновых чисел  $m$ , за исключением нескольких первых гармониках с  $m \sim 1$ , описываемых теорией альфвеновского резонанса. Однако, при генерации сильно локализованным источником, эти гармоники колебаний в общем волновом пакете не играют значительной роли. При малых значениях

$m$  поле МГД-колебаний представляет собой связанные тороидальную альфвеновскую и магнитозвуковую волны. Для магнитозвуковой волны с  $m \sim 1$  имеется область прозрачности, где она может убежать поперек магнитных оболочек на бесконечность. Таким образом, поле альфвеновской волны, связанной с этой магнитозвуковой волной, будет затухать.

В данном разделе мы исследуем поле монохроматических альфвеновских колебаний, генерируемых в магнитосфере источником, локализованным в ионосфере [301]. Это означает, что источник колебаний может иметь произвольную структуру поперек силовых линий геомагнитного поля, т.е. он возбуждает полный спектр гармоник во всем диапазоне азимутальных волновых чисел  $m$ . Особое внимание уделим колебаниям от сильно локализованного источника. Для генерации таких колебаний может быть использован ВЧ-радар, осуществляющий периодический нагрев ионосферы с частотой, близкой к частоте собственных альфвеновских колебаний магнитосферы на рассматриваемой магнитной оболочке [169]. Характерные особенности пространственного распределения амплитуды таких альфвеновских колебаний можно использовать для измерения поляризационного расщепления их спектра на тороидальные и полоидальные собственные моды.

**3.14.1. Структура монохроматических альфвеновских колебаний от источника, локализованного поперек силовых линий магнитного поля.** Как было показано в разд. 3.7, 3.13, пространственную структуру стоячей альфвеновской волны с фиксированной частотой  $\omega$  и азимутальным волновым числом  $m$  можно представить в виде

$$\varphi_N = U_N(x^1, k_2, \omega) R_N(x^1, x^3, k^2, \omega) e^{-i\omega t + ik_2 x^2},$$

$N = 1, 2, 3, \dots$  — номер собственной продольной гармоники стоячих волн, функция  $R_N$  описывает ее структуру вдоль силовых линий магнитного поля (см. уравнение (3.13.8)), а  $U_N$  — ее структуру поперек магнитных оболочек (3.13.14). Если в качестве азимутальной координаты  $x^2$  использовать азимутальный угол  $\phi$ , то  $k_2 = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — азимутальное волновое число. Здесь мы используем общие обозначения  $x^2$  и  $k_2$ , поскольку рассматривается большое число азимутальных гармоник (от  $m \sim 1$  до  $m = \infty$ ) и изменение  $k_2$  будет считаться непрерывным.

В разд. 3.13 найдено решение уравнения (3.13.31), описывающего альфвеновские колебания, возбуждаемые в магнитосфере нелокализованным монохроматическим источником. Было получено выражение (3.13.34) для функции  $U_N(x^1, k_2, \omega)$ , описывающей структуру отдельной гармоники колебаний поперек магнитных оболочек. При этом правая часть уравнения (3.13.31) считалась постоянной.

Теперь получим решение уравнения (3.13.31), полагая, что его правая часть является функцией поперечной координаты:  $b_N \equiv b_N(\xi, k_y)$ , где азимутальное волновое число  $k_y$  определяется выражением (3.13.12),

а безразмерная поперечная координата  $\xi$  — выражением (3.13.44). Функция  $b_N$  зависит также от частоты  $\omega$ , но в данном случае это не играет особой роли, и мы не будем записывать соответствующую зависимость в явном виде. Будем искать решение (3.13.31) методом Фурье (см. разд. 3.13), представляя искомое решение в виде (3.13.32). Подстановка этого выражения в (3.13.31) дает уравнение первого порядка для фурье-образа  $\bar{U}_N(k)$ , аналогичное (3.13.33), решение которого легко находится.

Подставляя полученное решение в (3.13.32), получаем

$$U_N(\xi) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_N(\xi', k_y) d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Xi_N(\xi, k, k_y)}}{\sqrt{k^2 + k_y^2}} dk \int_{-\infty}^k \frac{e^{-i\Xi_N(\xi', k', k_y)}}{\sqrt{k'^2 + k_y^2}} dk', \quad (3.14.1)$$

где обозначено

$$\Xi_N(\xi, k, k_y) = k(\xi + i\epsilon) + |k_y| \operatorname{arctg} \frac{k}{|k_y|}.$$

Если  $b_N$  не зависит от  $\xi$ , то интеграл по  $\xi'$  приводит к  $\delta(\xi')$ -функции и решение (3.14.1) переходит в решение (3.13.45).

Решение (3.14.1) описывает фурье-гармонику колебаний с фиксированным значением азимутального волнового числа  $m$  (или  $k_y$ ). Если источник имеет также произвольную структуру по азимутальной координате, т. е. функцию источника можно представить в виде

$$\bar{b}_N(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_N(\xi, k_y) e^{ik_y \eta} dk_y,$$

где  $\eta = \sqrt{\alpha_T/\alpha_P} x^2/\Delta_N$  — безразмерная азимутальная координата, то полное решение будет иметь вид

$$U_N(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{b}_N(\xi', \eta') V_N(\xi, \xi', \eta, \eta') d\xi' d\eta', \quad (3.14.2)$$

где функция

$$V_N = i \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\Xi_N(\xi, k, k_y) + ik_y \eta]}{\sqrt{k^2 + k_y^2}} dk \times \\ \times \int_{-\infty}^k \frac{\exp[-i\Xi_N(\xi', k', k_y) + ik_y \eta']}{\sqrt{k'^2 + k_y^2}} dk' \quad (3.14.3)$$

описывает поперечную структуру  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых источником вида  $\delta(\xi - \xi_0)\delta(\eta - \eta_0)$ , где  $(\xi_0, \eta_0)$  — точка локализации источника.

**3.14.2. Поперечная структура стоячих альфвеновских волн от источника, сильно локализованного по одной из поперечных координат.** Для того, чтобы качественно понять структуру полученного решения (3.14.2), рассмотрим два противоположных предельных случая. Пусть  $\bar{b}_N$  в (3.14.2) имеет вид  $\bar{b}_N = \tilde{b}_N \delta(\xi - \xi_0) e^{i\bar{k}_y \eta}$ , где  $\tilde{b}_N$  не зависит от  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда

$$U_N = \bar{B}_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Xi_N(\xi, k, \bar{k}_y)}}{\sqrt{k^2 + \bar{k}_y^2}} dk \int_{-\infty}^k \frac{e^{-i\Xi_N(\xi_0, k', \bar{k}_y)}}{\sqrt{k'^2 + \bar{k}_y^2}} dk', \quad (3.14.4)$$

где  $\bar{B}_N = i\tilde{b}_N e^{i\bar{k}_y \eta} / 2\pi$ . Пусть  $\bar{k}_y \Delta_N \gg 1$ , где  $\Delta_N = x_{TN}^1 - x_{PN}^1$  — расстояние между полоидальной и тороидальной резонансными поверхностями. Тогда, как во внутреннем интеграле по  $k'$ , так и во внешнем по  $k$ , можно для приближенного вычисления использовать метод стационарной фазы. Точки перевала  $\bar{k}'$  и  $\bar{k}$  в этих интегралах определяются из условий  $\partial \Xi_N(\xi_0, k', \bar{k}_y) / \partial k' |_{k'=\bar{k}'} = 0$ ,  $\partial \Xi_N(\xi, k, \bar{k}_y) / \partial k |_{k=\bar{k}} = 0$  и имеют вид  $\bar{k}' = \pm \bar{k}_y \kappa_N(\xi_0)$ ,  $\bar{k} = \pm \bar{k}_y \kappa_N(\xi)$ , где

$$\kappa_N = \sqrt{\frac{\xi + 1}{-\xi}}. \quad (3.14.5)$$

При этом  $-1 < \xi < 0$ , а точки  $\xi = 0$  и  $\xi = -1$  соответствуют тороидальной и полоидальной резонансным поверхностям. Взяв последовательно эти интегралы, получим

$$U_N = \frac{2\pi(\omega/a_N)\bar{B}_N}{\left[v_N v_N^0 (\bar{k}'^2 + \bar{k}_y^2)(\bar{k}^2 + \bar{k}_y^2)\right]^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \theta(\xi - \xi_0) e^{i\Xi_N^0} + i e^{-i(\Xi_N + \Xi_N^0)} + \theta(\xi_0 - \xi) e^{i(\Xi_N - \Xi_N^0)} \right\},$$

где

$$v_N(\xi, \omega) = \frac{\omega}{\bar{k}_y} \frac{\Delta_N}{a_N} (\xi + 1)^{1/2} \xi^{3/2}$$

— групповая скорость  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн по координате  $\xi$ ,  $v_N^0 = v_N(\xi_0, \omega)$ ,  $\Xi_N = \Xi_N(\xi, \bar{k}, \bar{k}_y)$ ,  $\Xi_N^0 = \Xi_N(\xi_0, \bar{k}', \bar{k}_y)$ . В области прозрачности  $-1 \leq \xi$ ;  $\xi_0 \leq 0$  первое слагаемое в фигурной скобке описывает волну, бегущую от точки локализации источника ( $\xi = \xi_0$ ) к полоидальной резонансной поверхности ( $\xi = -1$ ), второе слагаемое — волну, отраженную от полоидальной поверхности и бегущую к тороидальной резонансной поверхности ( $\xi = 0$ ), а третье — волну, бегущую от точки локализации источника к тороидальной поверхности.

Другой предельный случай представляет собой источник, сильно локализованный по азимуту в точке  $\eta = \eta_0$ :  $\bar{b}_N = \tilde{b}_N \delta(\eta - \eta_0)$ . Для такого источника имеем

$$\nabla_2 U_N = -i \bar{B}_{N1} \int_0^\infty \frac{d\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \left[ \frac{1}{\Xi_N(\xi, \kappa) + \eta - \eta_0} + \frac{1}{\Xi_N(\xi, \kappa) - \eta + \eta_0} \right] \quad (3.14.6)$$

— функция, определяющая радиальную структуру компонент поля волны  $B_1$  и  $E_2$ . Здесь  $\bar{B}_{N1} = i \tilde{b}_N \sqrt{\alpha_T / \alpha_P} / 2\pi \Delta_N$  и обозначено

$$\Xi_N(\xi, \kappa) = \kappa(\xi + i\epsilon) + \operatorname{arctg} \kappa.$$

Интеграл (3.14.6) получается из (3.14.1) последовательным интегрированием по  $\eta', \xi', k'$  и  $k_y$  и заменой переменной интегрирования  $\kappa = k/|k_y|$ . Функция  $\nabla_1 U_N$ , определяющая радиальную структуру компонент поля  $B_2$  и  $E_1$ , отличается от (3.14.6) наличием дополнительного множителя  $\kappa$  в подынтегральном выражении и амплитудой  $\bar{B}_{N2} = \sqrt{\alpha_P / \alpha_T} \bar{B}_{N1}$ .

Исходя из структуры подынтегрального выражения (3.14.6), можно сказать, что основной вклад в интеграл дает начало пути интегрирования  $0 \leq \kappa \leq \bar{\kappa} \ll 1$  и точки  $\kappa_\pm$ , где имеются особенности, определяемые нулями знаменателей:  $\Xi_N(\xi, \kappa_\pm) \pm (\eta - \eta_0) = 0$ . При  $\kappa < \bar{\kappa}$  для  $\Xi_N$  справедливо приближенное выражение  $\Xi_N \approx (\xi + 1 + i\epsilon)\kappa$  и интеграл при  $\kappa \leq \bar{\kappa}$  легко вычисляется:

$$\nabla_2 U_N|_{\kappa \leq \bar{\kappa}} \approx -i \frac{\bar{B}_{N1}}{\xi + 1 + i\epsilon} \ln \frac{(\eta - \eta_0)^2 - \bar{\kappa}^2 (\xi + 1 + i\epsilon)^2}{(\eta - \eta_0)^2}.$$

В этом выражении имеется особенность при  $\eta = \eta_0$ , которая не регулируется наличием диссипации  $\epsilon$ . Для регуляризации этой особенности достаточно несколько «размазать» структуру источника по координате  $\eta$ , используя вместо  $\delta(\eta - \eta_0)$ -функции в выражении для  $\bar{b}_N$ , например, функцию

$$\bar{b}_N(\eta) = \tilde{b}_N \frac{\Delta}{(\eta - \eta_0)^2 + \Delta^2},$$

которая при  $\Delta \rightarrow 0$  переходит в  $\bar{b}_N = \tilde{b}_N \delta(\eta - \eta_0)$ . Использование такой модели источника приводит во всех предшествующих выкладках к замене  $\eta - \eta_0 \rightarrow \eta - \eta_0 + i\Delta$ .

Что касается двух других особенностей подынтегрального выражения, можно показать, что они представляют собой полюса в точках  $\kappa = \pm \kappa_N(\xi)$ , где  $\kappa_N(\xi)$  определяется (3.14.5), а координата  $\xi$  лежит на характеристиках, определяемых уравнением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \kappa_N(\xi). \quad (3.14.7)$$

Таким образом, решение (3.14.6) будет определяться вкладом области локализации источника  $\eta = \eta_0$  и волнами, распространяющимися от такого источника по характеристикам (3.14.7).

Исходя из этих двух предельных случаев, можно ожидать следующей картины распределения поля колебаний, возбуждаемых источником, локализованным по обеим поперечным координатам. Должен наблюдаться локальный максимум в распределении амплитуды колебаний в точке локализации источника  $(\xi_0, \eta_0)$ . Если источник расположен внутри области локализации стоячей волны ( $-1 \leq \xi_0 \leq 0$ ), то на резонансных поверхностях должны наблюдаться локальные максимумы амплитуды в точках их пересечения характеристиками, проходящими через точку локализации источника. Поскольку через данную точку  $(\xi_0, \eta_0)$  проходят две характеристики, соответствующие разным знакам в (3.14.7), локальные максимумы на резонансных поверхностях будут располагаться симметрично относительно  $\eta = \eta_0$ .

### 3.14.3. Поперечная структура стоячих альфвеновских волн от источника, локализованного по двум поперечным координатам.

В предыдущем разделе мы качественно проанализировали распространение стоячих альфвеновских волн поперек силовых линий геомагнитного поля, которые возбуждаются источником, локализованным по одной из поперечных координат,  $x^1$  или  $x^2$ . Теперь численно проинтегрируем решение (3.14.2) для случая, когда источник сильно локализован по обеим поперечным координатам. Для определенности, будем рассматривать поперечное распространение волн в проекции на ионосферу северного полушария. Поскольку источник сильно локализован, интегрирование по  $\xi'$  и  $\eta'$  в (3.14.2) полностью переносится на функцию источника  $b_N(\xi', \eta')$ , а в выражении для  $V_N$  производится замена  $\xi' \rightarrow \xi_0$  и  $\eta' \rightarrow \eta_0$ . В результате, выражения для компонент электромагнитного поля  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн вблизи ионосферы имеют вид

$$\begin{aligned} E_{xN} &= E_N \frac{I_1 \cos \chi}{\sqrt{g_1^{(i)}}}, & E_{yN} &= \sqrt{\frac{\alpha_T}{\alpha_P}} E_N \frac{I_2}{\sqrt{g_2^{(i)}}}, \\ B_{xN} &= \sqrt{\frac{\alpha_T}{\alpha_P}} B_N \frac{I_2 \cos \chi}{\sqrt{g_2^{(i)}}}, & B_{yN} &= -B_N \frac{I_1}{\sqrt{g_1^{(i)}}}, \end{aligned} \quad (3.14.8)$$

где  $E_N = A_N R_N^{(i)}$ ,  $B_N = icA_N (\partial R_N / \partial l)^{(i)} / \omega$  — характерные амплитуды электрического и магнитного поля колебаний,

$$A_N = 2 \frac{a_N}{\omega^2} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right)^{(i)} \frac{\cos \chi}{\sqrt{\alpha_P \alpha_T} \Delta_N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_{\parallel}(x, y)}{\Sigma_P} dx dy,$$

а индекс  $(i)$  указывает на то, что соответствующие величины берутся на верхней границе ионосферы.

Координаты  $x$  и  $y$  имеют на уровне ионосферы направления соответственно с юга на север и с запада на восток (см. рис. 2.42). Они связаны с безразмерными координатами  $\xi$  и  $\eta$  соотношениями  $x = \xi \Delta_N^{(i)}$ ,  $y = \eta \sqrt{\alpha_P / \alpha_T} \Delta_N^{(i)} \cos \chi$ , где  $\Delta_N^{(i)} = \Delta_N \sqrt{g_1^{(i)}} / \cos \chi$  — расстояние между резонансными оболочками в проекции на ионосферу. Безразмерные функции  $I_1(\xi, \eta)$  и  $I_2(\xi, \eta)$  описывают распределение поля колебаний по безразмерным координатам  $\xi$  и  $\eta$ :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \int_{-\infty}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\sqrt{1+\kappa'^2}} \left[ \frac{1}{(\tilde{\eta} + \eta + i\Delta)^2} + \frac{1}{(\tilde{\eta} - \eta + i\Delta)^2} \right],$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \int_{-\infty}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\sqrt{1+\kappa'^2}} \left[ \frac{1}{(\tilde{\eta} + \eta + i\Delta)^2} - \frac{1}{(\tilde{\eta} - \eta + i\Delta)^2} \right],$$

где

$$\tilde{\eta} = \kappa(\xi + i\varepsilon) - \kappa'(\xi_0 + i\varepsilon) + \arctg \kappa - \arctg \kappa',$$

$\xi_0$  — оболочка, на которой локализован источник,  $\Delta$  — характерный масштаб его локализации по координате  $\eta$  и принято  $\eta_0 = 0$ .

В приведенных ниже численных расчетах использована дипольная модель геомагнитного поля, а распределение скорости Альфвена в меридиональной плоскости задано моделью (3.7.45). Характерный масштаб изменения функций  $\Omega_{TN}$  и  $\Omega_{PN}$  определяется при этом как  $a_N = (\partial \ln t_A / \partial a)^{-1} = a/\mu$ . Малые параметры, регуляризующие решения, выбраны следующими:  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $\Delta = 10^{-1}$ , что означает малую диссипацию волн в ионосфере и малость масштаба локализации источника по сравнению с размером области прозрачности  $\Delta_N$ .

Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 3.47, где приведены распределения амплитуды электрического поля колебаний  $E_t = \sqrt{|E_{xN}|^2 + |E_{yN}|^2}$  по координатам  $\xi$  и  $\eta$  при единичной характерной амплитуде колебаний  $|E_N| = 1$ . Аналогичное распределение амплитуды имеют и магнитные компоненты поля колебаний, которые на ионосфере, наоборот, имеют пучность. Следует отметить, что в нулевом порядке приближения ВКБ на ионосфере имеет место равенство  $R_N^{(i)} \equiv R_N(x, l_{\pm}, \omega) = 0$ , так что должно быть  $|E_N| = 0$ . Однако это выражение следует рассматривать как приближенное с точностью до малых параметров, определяемых малой диссипацией волн в ионосфере. Точное значение  $|E_N| \neq 0$ . На рис. 3.47 представлены распределения  $E_t$  для четырех различных случаев расположения источника колебаний:  $a$  — в области непрозрачности за тороидальной резонансной поверхностью ( $\xi_0 = 1$ ),  $b$  — на тороидальной поверхности ( $\xi_0 = 0$ ),  $v$  — на полоидальной резонансной поверхности ( $\xi_0 = -1$ ) и  $z$  — в области непрозрачности за полоидальной поверхностью ( $\xi_0 = -2$ ).

Во всех четырех случаях хорошо видна тороидальная резонансная поверхность ( $\xi_0 = 0$ ) и точка локализации источника ( $\xi = \xi_0, \eta = 0$ ).

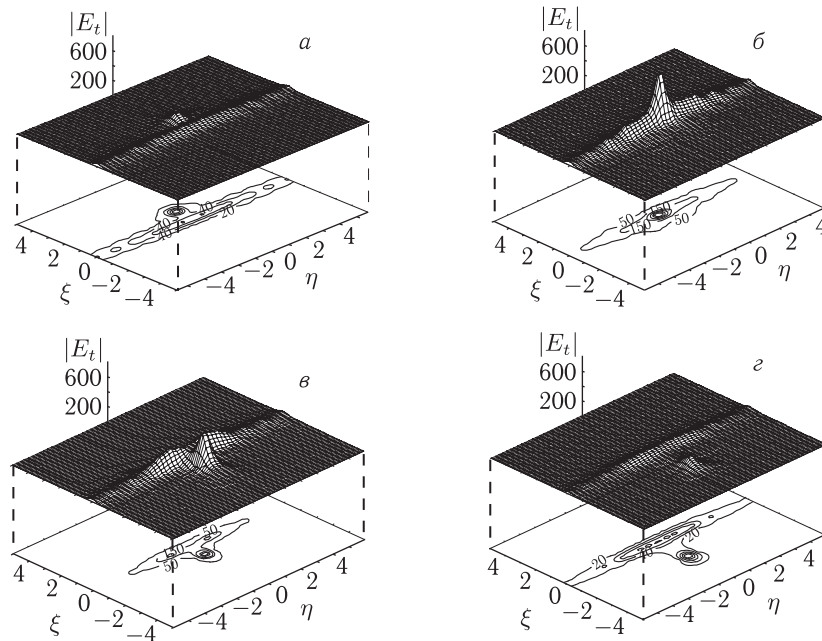


Рис. 3.47. Распределение по безразмерным поперечным координатам ( $\xi$  и  $\eta$ ) амплитуды стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых сильно локализованным монохроматическим источником. Расположение источника:  $a$  — в области непрозрачности за тороидальной поверхностью,  $b$  — на тороидальной поверхности,  $v$  — на полоидальной поверхности и  $z$  — в области непрозрачности за полоидальной поверхностью

Полоидальная поверхность в этих расчетах не проявляется. Это можно понять из следующих рассуждений. При малой диссипации возбуждаемых волн их амплитуда на тороидальной резонансной поверхности много больше их амплитуды на полоидальной поверхности. Кроме того, для гармоник с  $m < a_N/\Delta_N$  полоидальная поверхность вообще не является чем-либо выделенной, тогда как на тороидальной поверхности амплитуда колебаний имеет особенность, регуляризованную малым параметром  $\epsilon$ . В точке локализации источника амплитуда также имеет особенность, регуляризованную малым параметром  $\Delta$ . Увеличивая эти параметры можно уменьшить амплитуду колебаний в этих областях, сделав ее сравнимой с амплитудой на полоидальной поверхности. Однако при этом общая амплитуда колебаний уменьшается настолько, что их наблюдение становится практически невозможным.

Другой особенностью, которую можно видеть на рис. 3.47, является то, что при попадании источника внутрь области прозрачности волны ( $-1 \leq \xi_0 \leq 0$ ) амплитуда колебаний оказывается много больше, чем при расположении его в областях непрозрачности. Это означает, что



гармоники с  $m \gg a_N/\Delta_N \gg 1$  играют определяющую роль в колебаниях, возбуждаемых сильно локализованным источником. На это же указывает наличие двух локальных максимумов на тороидальной поверхности при попадании источника на полоидальную поверхность. Как следует из результатов предыдущего раздела, эти максимумы связаны с волнами, распространяющимися от источника по характеристикам, описываемым уравнением (3.14.7). При попадании источника на тороидальную поверхность длина характеристик обращается в нуль и все три максимума сливаются в один.

**3.14.4. Возможность измерения поляризационного расщепления спектра собственных альфвеновских колебаний магнитосферы.** Попытки искусственной генерации геомагнитных пульсаций с помощью периодического (с частотой собственных альфвеновских колебаний магнитосферы) воздействия на ионосферу предпринимались в некоторых экспериментах [148, 296, 297]. Подобные эксперименты можно было бы использовать для измерения величины расщепления резонансных поверхностей магнитосферы  $\Delta_N^{(i)}$  и связанного с ним поляризационного расщепления спектра  $\Delta\Omega_N = \Omega_{TN} - \Omega_{PN}$ . Для этого, конечно, требуется организовать достаточно плотную (с шагом  $\Delta_N^{(i)}/2$ ;  $\Delta_N^{(i)}/4$ ) сеть наблюдения в окрестности источника колебаний. Это можно сделать, если для наблюдения использовать ВЧ-радар, например как в работе [289]. Если область воздействия на ионосферу много меньше  $\Delta_N^{(i)}$ , для описания поля возбуждаемых колебаний можно использовать предложенную выше теорию.

Наиболее вероятным в таком эксперименте представляется попадание источника в область прозрачности между резонансными поверхностями. При попадании его в область непрозрачности амплитуда возбуждаемых колебаний будет недостаточно большой для наблюдений, а попадание точно на резонансные поверхности маловероятно. При попадании источника в область прозрачности должны наблюдаться три локальных максимума амплитуды колебаний: один, связанный с источником колебаний, и два симметрично расположенные относительно  $y = 0$  — на тороидальной резонансной поверхности. Расстояние между максимумами легко рассчитать, используя уравнение характеристик (3.14.7). Интегрируя его, получаем

$$\Delta\eta = 2 \int_0^{\Delta\eta/2} d\eta = 2 \int_{\xi_0}^0 \kappa_N(\xi) d\xi = 2 \left( \sqrt{-\xi_0(1+\xi_0)} + \arcsin \sqrt{-\xi_0} \right). \quad (3.14.9)$$

Это уравнение можно использовать для определения величины расщепления между полоидальной и тороидальной поверхностями  $\Delta_N^{(i)}$ , по измеряемым в эксперименте расстояниям между локальными пиками на тороидальной поверхности  $\Delta_{yN} = \sqrt{\alpha_T/\alpha_P} \Delta\eta \Delta_N^{(i)}$  и от точки

локализации источника до тороидальной поверхности  $\Delta_0 = -\xi_0 \Delta_N^{(i)}$ .  
Имеем

$$\Delta_{yN} = 2\sqrt{\alpha_T/\alpha_P} \left( \sqrt{\Delta_0(\Delta_N^{(i)} - \Delta_0)} + \Delta_N^{(i)} \arcsin \sqrt{\frac{\Delta_0}{\Delta_N^{(i)}}} \right),$$

где  $0 < \Delta_0 < \Delta_N^{(i)}$ . Это уравнение неявно определяет величину расщепления резонансных поверхностей  $\Delta_N^{(i)}$ . При попадании источника на тороидальную поверхность ( $\Delta_0 = 0$ )  $\Delta_{yN} = 0$ , т.е. все локальные максимумы сливаются в один. При попадании его на полоидальную поверхность ( $\Delta_0 = \Delta_N^{(i)}$ ) имеем  $\Delta_{yN} = \pi \Delta_N^{(i)}$  — расстояние между максимумами на тороидальной поверхности максимально (отношение  $\sqrt{\alpha_T/\alpha_P} \approx 1$  на всех геомагнитных широтах). Определив такими образом  $\Delta_N^{(i)}$ , можно определить также поляризационное расщепление спектра

$$\Delta\Omega_N = \Omega_{TN} - \Omega_{PN} = \frac{\Delta_N^{(i)}}{a_N^{(i)}} \omega,$$

где  $a_N^{(i)}$  — характерный масштаб неоднородности магнитосферной плазмы поперек магнитных оболочек в проекции на ионосферу. В нашем случае — это характерный масштаб изменения функций  $\Omega_{TN}(x)$ ,  $\Omega_{PN}(x)$ .

Характерные расчетные величины исследуемых параметров представлены на рис. 3.48, 3.49. Приведены зависимости  $\Delta_N^{(i)}$  и  $\Omega_{TN}$  от

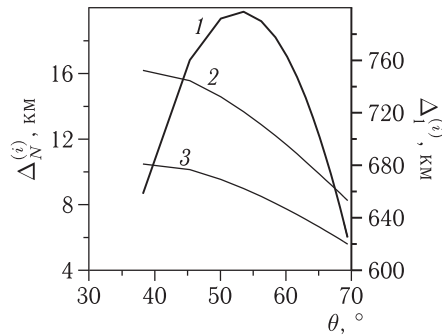


Рис. 3.48. Расчетная зависимость расщепления между тороидальной и полоидальной резонансными магнитными оболочками  $\Delta_N^{(i)}$  в проекции на ионосферу от геомагнитной широты  $\theta$  для первой ( $N = 1$ , ось справа) и двух следующих  $\Delta_N^{(i)}$  ( $N = 2, 3$ , ось слева) гармоник стоячих альфвеновских волн

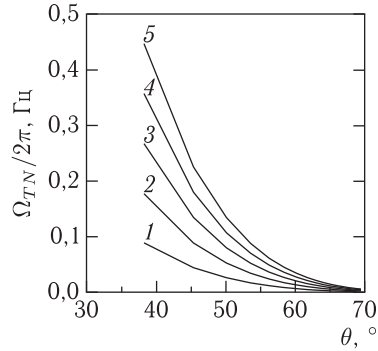


Рис. 3.49. Расчетная зависимость собственных частот тороидальных альфвеновских колебаний  $\Omega_{TN}$  от геомагнитной широты  $\theta$  для первых пяти собственных гармоник стоячих альфвеновских волн ( $N = 1, 2, 3, 4, 5$ )

геомагнитной широты  $\theta$  для первых гармоник собственных альфвеновских колебаний магнитосферы. На рис. 3.48 обращает на себя внимание аномально большая величина  $\Delta_1^{(i)} \approx 800$  км в сравнении с  $\Delta_{2,3}^{(i)} \sim 10 - 50$  км. Это дает возможность при исследовании основной гармоники колебаний использовать менее плотную сеть станций наблюдения, возможно даже наземными измерительными приборами. Однако, амплитуда этой гармоники должна быть существенно меньше, чем у других гармоник при равной мощности источника, поскольку  $E_N \sim \Delta_N^{-2}$ . Из рис. 3.49 следует, что возбуждение собственных колебаний проще осуществить на низких широтах из-за увеличения их собственной частоты, поскольку монохроматический источник должен действовать в течение достаточно большого числа периодов колебаний.

### 3.15. Альфвеновские колебания, генерируемые в магнитосфере импульсными локализованными источниками

В разд. 3.14 рассмотрены альфвеновские колебания, генерируемые в магнитосфере узколокализованным монохроматическим источником. Однако локализованные колебания могут возбуждаться в магнитосфере и источниками с широким спектром частот. Далее мы рассмотрим динамику поля альфвеновских колебаний, источником которых служат импульсные токи, локализованные в ионосфере (см. [305]).

**3.15.1. Переход от монохроматических колебаний к нестационарным.** В разд. 3.14.1 для функции  $U_N$ , описывающей структуру локализованной монохроматической альфвеновской волны, было получено выражение (3.14.2), где под интегралом стоит функция  $V_N(\xi, \xi', \eta, \eta')$  (3.14.3). Если в (3.14.3) перейти к переменным интегрирования  $\kappa = k/|k_y|$  и  $\kappa' = k'/|k_y|$ , то внешний интеграл по  $k_y$  можно взять аналитически. В результате выражение для  $U_N(\xi, \eta, \omega)$  можно представить в виде

$$U_N(\xi, \eta, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha_{TN}/\alpha_{PN}}}{4\pi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{b}_N(\xi', \eta', \omega) \tilde{V}_N(\xi, \xi', \eta, \eta', \omega) d\xi' d\eta'}_{(3.15.1)},$$

где обозначено

$$\tilde{b}_N = \frac{a_N \Delta_N}{\alpha_{TN} \Omega_{TN}^2} I_N, \quad I_N = j_N^+ - j_N^-,$$

$$j_N = 2\sqrt{g_1 g_2} \frac{\partial R_N}{\partial l} \frac{\tilde{j}_{\parallel}(x^1, x^2, \omega)}{\Sigma_P} \cos \chi,$$

а индексы плюс и минус означают, что параметры среды берутся на верхних границах ионосферы северного и южного полушарий соответственно. Здесь  $\tilde{j}_{\parallel}$  — фурье-гармоника плотности стороннего продольного тока

на верхней границе ионосферы (источник альфвеновских волн),  $\Sigma_P$  — интегральная педерсеновская проводимость ионосферы,  $\chi$  — угол магнитного наклонения (см. рис. 2.42). Здесь использованы безразмерные поперечные координаты

$$\xi = (x^1 - x_{TN}^1)/\Delta_N, \quad \eta = \sqrt{\frac{\alpha_{TN}}{\alpha_{PN}}} \frac{x^2}{\Delta_N}.$$

Входящая в (3.15.1) функция  $\tilde{b}_N(\xi, \eta, \omega)$  описывает структуру фурье-гармоник колебаний с частотой  $\omega$  от пространственно распределенного источника. Функция  $\tilde{V}_N$  описывает поперечную структуру поля стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых источником вида  $b_N = \delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta')$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Безразмерная функция  $\tilde{V}_N$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N = \Delta\Omega_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{dk}{k\sqrt{1+(\kappa-k^{-1})^2}} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_+(\kappa, k)} + \frac{1}{\omega - \omega_-(\kappa, k)} \right], \end{aligned} \quad (3.15.2)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \Delta\Omega_N \Psi^{\pm}(\kappa, k) - i\gamma_N, \\ \Psi^{\pm} &= k[\kappa(\xi - \xi') \pm (\eta - \eta') - \arctg \kappa + \arctg(\kappa - k^{-1})], \end{aligned} \quad (3.15.3)$$

а

$$\gamma_N = (g_N^+ + g_N^-)/\Omega_N^2 \alpha_{TN}, \quad g_N = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \frac{c^2 \cos \chi}{4\pi \Sigma_P} \left( \frac{\partial R_N}{\partial t} \right)^2,$$

является декрементом затухания стоячих альфвеновских волн, связанным с их джоулевой диссипацией в ионосфере. В выражении для  $\gamma_N$ , в отличие от (3.15.3), знаки « $\pm$ » обозначают величины, соответствующие ионосфере северного и южного полушарий.

Для перехода к описанию колебаний, возбуждаемых в магнитосфере широкополосными источниками, выполним обратное фурье-преобразование (3.15.1) по спектру частот источника. Выражение (3.15.1) получено в предположении  $\omega > 0$ . Для того, чтобы учесть область спектра  $\omega < 0$ , следует проинтегрировать (3.15.1) по  $\omega$  от 0 до  $\infty$  и добавить к полученному выражению комплексно сопряженное. В предыдущем разделе показано, что выражение (3.15.1) имеет резкие пики в точках  $\omega = \Omega_{TN}$ , в окрестностях которых набирается основная часть интеграла. Поэтому в интеграле по  $\omega$  можно перейти к переменной интегрирования  $\omega' = \omega - \Omega_{TN}$  и распространить нижний предел интегрирования по переменной  $\omega'$  до  $-\infty$ . Как видно из (3.15.2), в подынтегральном выражении в точках  $\omega' = \omega_{\pm} - \Omega_{TN}$  имеются полюса. Это обстоятель-

ство можно использовать, применив для вычисления полученных интегралов теорему о вычетах. Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости комплексного  $\omega'$ , получим следующие выражения для компонент электромагнитного поля волны:

$$\begin{aligned} E_{1N} &= Q_N^1 R_N, & E_{2N} &= Q_N^2 R_N, \\ B_{1N} &= \frac{c}{\Omega_{TN}} Q_N^3 \frac{\partial R_N}{\partial l}, & B_{2N} &= \frac{c}{\Omega_{TN}} Q_N^4 \frac{\partial R_N}{\partial l}, \end{aligned}$$

где

$$Q_N^n = \frac{\Omega_{TN}}{\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} b_N(\xi', \eta', t') I_{Nn}(\xi - \xi', \eta - \eta', t - t') d\xi' d\eta', \quad (3.15.4)$$

$$I_{Nn}(\xi, \eta, t) = \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} a_n(\kappa, k, t) [\cos(\Omega_N^+ t + \iota_n) + \delta_n \cos(\Omega_N^- t + \iota_n)] dk, \quad (3.15.5)$$

$n = 1, 2, 3, 4$ , и введены обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_4 = \frac{\kappa e^{-\gamma_N t}}{\sqrt{(1 + \kappa^2)(1 + (\kappa - k^{-1})^2)}}, & a_2 &= -a_3 = a_1/\kappa, \\ \iota_1 &= \iota_2 = 0, & \iota_3 &= \iota_4 = -\pi/2, & \delta_1 &= \delta_3 = -\delta_2 = -\delta_4 = 1, \\ \Omega_N^\pm &= \Omega_{TN}(\xi') + \Delta\Omega_N \Psi^\pm, & \tau_1 &= \Delta\Omega_1 t, \end{aligned}$$

а  $b_N(\xi, \eta, t)$  — функция источника, фурье-образом которой является  $\tilde{b}_N(\xi, \eta, \omega)$ . Отметим, что, для удобства дальнейших расчетов, выражение для  $I_{Nn}$  домножено на безразмерный множитель  $\Delta_1/\Delta_N$ , а выражение для  $b_N$  — на обратный ему множитель  $\Delta_N/\Delta_1$  (см. (3.15.7)). Как видно из (3.15.4), для возбуждаемой в магнитосфере стоячей альфвеновской волны соблюдается принцип причинности: поле колебаний в момент времени  $t$  определяется действием источника во все предшествующие моменты времени. Выражение (3.15.4) описывает структуру поля стоячей альфвеновской волны, возбуждаемой в магнитосфере источником, произвольно распределенным в ионосфере и с произвольным поведением по времени.

Если источник предельно локализован по поперечным координатам и действует в течение достаточно малого промежутка времени (более точные количественные соотношения будут даны ниже), выражения (3.15.1)–(3.15.5) можно упростить. При этом интегрирование по  $\xi', \eta'$  и  $t'$  полностью переносится на функцию  $b_N$ , описывающую источник колебаний, а функции  $I_{Nn}$  можно вынести из-под этих интегралов в точку локализации источника ( $\xi' = \xi_0, \eta' = \eta_0$ ) в момент времени его действия  $t' = t_0$ . Переходя для определенности к физическим

компонентам поля стоячей волны на верхней границе ионосферы, получаем

$$\begin{aligned}
 E_{xN} &= \theta(t - t_0) E_N I_{N1} \cos \chi / \sqrt{g_1}, \\
 E_{yN} &= \theta(t - t_0) \sqrt{\frac{\alpha_{TN}}{\alpha_{PN}}} E_N I_{N2} / \sqrt{g_2}, \\
 B_{xN} &= \theta(t - t_0) \sqrt{\frac{\alpha_{TN}}{\alpha_{PN}}} B_N I_{N3} \cos \chi / \sqrt{g_2}, \\
 B_{yN} &= -\theta(t - t_0) B_N I_{N4} / \sqrt{g_1},
 \end{aligned} \tag{3.15.6}$$

где

$$E_N = A_N R_N, \quad B_N = \frac{c}{\Omega_{TN}^0} A_N \frac{\partial R_N}{\partial l}$$

— характерные амплитуды колебаний электрического и магнитного поля стоячей альфвеновской волны вблизи ионосферы,

$$A_N = \frac{\cos^2 \chi}{\pi^2 \sqrt{\alpha_{TN} \alpha_{PN}}} \frac{1}{\Omega_{TN}^0 \Delta_1} \left( \frac{\partial R_N}{\partial l} \right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_{\parallel}(x, y, t) dx dy dt}_{\Sigma_P(x, y, t)}, \tag{3.15.7}$$

$\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Здесь и далее без потери общности будем полагать  $\xi_0 = 0, \eta_0 = 0, t_0 = 0, \Omega_{TN}^0 \equiv \Omega_{TN}(\xi_0 = 0)$ . Отметим, что для высших гармоник стоячих альфвеновских волн ( $N \gg 1$ ), для которых применимо приближение ВКБ по продольной координате, характерные амплитуды  $E_N$  и  $B_N$  практически не зависят от номера гармоники  $N$ . Таким образом, для приближенных расчетов при суммировании полей всех гармоник стоячих волн можно заменить  $E_N$  и  $B_N$  некоторыми усредненными значениями и вынести их из-под знака суммы.

Рассмотрим два различных режима колебаний стоячей альфвеновской волны.

**3.15.2. Начальный режим колебаний ( $\tau_N \ll 1$ ).** Исследуем функции  $I_{Nn}(\xi, \eta, t)$ , описывающие колебания компонент поля стоячей альфвеновской волны. Их поведение существенно зависит от параметра

$$\tau_N = \Delta \Omega_N t.$$

Рассмотрим начальный режим колебаний, когда  $\tau_N \ll 1$ . Поскольку для всех гармоник стоячих волн (за исключением первой) в магнитосфере выполняется условие  $\Delta \Omega_N \ll \Omega_{TN}$ , этот режим может поддерживаться в течении многих периодов колебаний после их импульсного возбуждения. В пределе  $\tau_N \ll 1$  основная часть внутреннего интеграла (3.15.5)

набирается при характерных значениях  $k \gg 1$ . Поэтому в подынтегральном выражении можно приближенно считать

$$a_2 = -a_3 \approx -e^{-\gamma_N t}/(1 + \kappa^2), \quad a_1 = -a_4 \approx -\kappa e^{-\gamma_N t}/(1 + \kappa^2), \\ \operatorname{arctg}(\kappa - k^{-1}) \approx \operatorname{arctg} \kappa.$$

После этого внутренний интеграл по переменной  $k$  легко вычисляется, в результате чего получаем

$$I_{Nn} \simeq -\sin(\Omega_{TN}^0 t + \iota_n) \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\kappa)[(\kappa\xi + \eta)^{-1} + (\kappa\xi - \eta)^{-1}] d\kappa.$$

В подынтегральном выражении имеются полюса в точках  $\kappa = \pm i$ ,  $\kappa = \pm \eta/\xi$ . Вычислим эти интегралы, используя теорему о вычетах. В результате получим

$$I_{Nn} \simeq A_{Nn} \sin(\Omega_{TN}^0 t + \iota_n), \quad (3.15.8)$$

где

$$A_{N1} = A_{N4} \simeq -2\pi \frac{\Delta_1}{\Delta_N} \frac{|\xi| e^{-\gamma_N t}}{|\xi|^2 + \eta^2}, \\ A_{N2} = A_{N3} \simeq -2\pi \frac{\Delta_1}{\Delta_N} \frac{\eta e^{-\gamma_N t}}{|\xi|^2 + \eta^2}. \quad (3.15.9)$$

Коэффициенты  $A_{Nn}$  имеют особенность в точке локализации источника ( $\xi = 0, \eta = 0$ ). Это происходит потому, что в качестве источника колебаний использована сингулярная функция  $b_N \sim \delta(\eta)$ . Если вместо нее использовать не имеющую особенности функцию вида

$$b_N = \bar{b}_N \frac{\Delta_\eta^2}{\eta^2 + \Delta_\eta^2}, \quad (3.15.10)$$

где  $\Delta_\eta$  — характерный масштаб локализации источника по координате  $\eta$ , особенность в коэффициентах (3.15.9) исчезает. При этом, во всех предшествующих выкладках следует сделать замену  $\pm\eta \rightarrow \pm\eta - i\Delta_\eta$ , в результате чего в коэффициентах (3.15.9) происходит замена  $|\xi| \rightarrow |\xi| + \Delta_\eta$ .

Как видно из (3.15.8), колебания в начальном режиме происходят с одной и той же частотой во всех точках плоскости  $(\xi, \eta)$ . Амплитуда этих колебаний имеет максимум в точке локализации источника и убывает по степенному закону ( $\sim 1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ) при удалении от нее. Отметим также, что при использовании модели источника (3.15.10), в выражении для характерной амплитуды колебаний (3.15.7) следует заменить интегрирование по  $y$  множителем

$$\int dy \rightarrow \Delta_y = \sqrt{\frac{\alpha_{PN} g^2}{\alpha_{TN}}} \Delta_N \Delta_\eta,$$

который равен характерному масштабу локализации источника в ионосфере по координате  $y$ .

**3.15.3. Асимптотический режим колебаний ( $\tau_N \gg 1$ ).** Функции  $I_{Nn}(\xi, \eta, t)$  состоят из суммы интегралов вида

$$I = \tau_1 e^{\pm i\Omega_N^0 t} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty a_n(k, \kappa) \exp(\pm i\tau_N \Psi^\pm(k, \kappa)) d\kappa. \quad (3.15.11)$$

Если  $\tau_N \gg 1$ , то для оценки этих интегралов на асимптотике можно использовать метод стационарной фазы. Приравняв нулю первую производную от фазы  $\Psi^\pm$  по переменной  $\kappa$ , получим уравнение, определяющее точку перевала:

$$v_1 \equiv \left( \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=\tilde{\kappa}} = k [\xi - (1 + \tilde{\kappa}^2)^{-1} + (1 + (\tilde{\kappa} - k^{-1})^2)^{-1}] = 0. \quad (3.15.12)$$

Вторая производная от фазы в точке перевала равна

$$v_2 \equiv \left( \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial \kappa^2} \right)_{\kappa=\tilde{\kappa}} = 2k \left[ \frac{\tilde{\kappa}}{(1 + \tilde{\kappa}^2)^2} - \frac{\tilde{\kappa} - k^{-1}}{(1 + (\tilde{\kappa} - k^{-1})^2)^2} \right].$$

Используя стандартные формулы метода стационарной фазы (см. [281]), запишем асимптотическое выражение для интеграла (3.15.11):

$$I \simeq \tau_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_N}} e^{\pm i\Omega_N^0 t} \int_0^\infty \frac{a_n(k, \tilde{\kappa})}{\sqrt{|v_2(k)|}} \exp \left[ \pm i\tau_N \tilde{\Psi}^\pm \pm i\frac{\pi}{4} \text{sign}(v_2) \right] dk, \quad (3.15.13)$$

где  $\tilde{\Psi}^\pm \equiv \Psi^\pm(k, \tilde{\kappa})$ . Поскольку в показателе экспоненты подынтегрального выражения сохраняется большой параметр  $\tau_N \gg 1$ , к этому интегралу также можно применить метод стационарной фазы. Приравняв к нулю первую производную от фазы  $\tilde{\Psi}^\pm$  по  $k$ , найдем уравнение, определяющее точку перевала  $\bar{k}$ :

$$\bar{w}_1 \equiv \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}^\pm}{\partial k} \right)_{k=\bar{k}} = \bar{\kappa} \xi \pm \eta - \arctg \bar{\kappa} + \arctg(\bar{\kappa} - \bar{k}^{-1}) + \left[ \bar{k} \left( 1 + (\bar{\kappa} - \bar{k}^{-1})^2 \right) \right]^{-1} = 0, \quad (3.15.14)$$

где  $\bar{\kappa} \equiv \tilde{\kappa}(\bar{k})$ . Запишем также выражение для второй производной от фазы  $\tilde{\Psi}^\pm$  в точке перевала:

$$\bar{w}_2 \equiv \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}^\pm}{\partial k^2} \right)_{k=\bar{k}} = -\frac{4}{\bar{k}^2} \frac{\bar{\kappa} - \bar{k}^{-1}}{(1 + \bar{\kappa}^2) \left( 1 + (\bar{\kappa} - \bar{k}^{-1})^2 \right) \bar{v}_2},$$

где  $\bar{v}_2 \equiv v_2(\bar{k}, \bar{\kappa})$ . Используя стандартные формулы метода перевала, запишем окончательное асимптотическое выражение для интеграла (3.15.11):

$$I \simeq A_{Nn} \exp(\pm i(\Omega_N^0 + \Delta\Omega_N \bar{\Psi}^\pm)t \pm i\alpha_n), \quad (3.15.15)$$



где

$$A_{Nn} = 2\pi \frac{\Delta_1}{\Delta_N} \frac{\bar{a}_n}{\sqrt{|\bar{v}_2 \bar{w}_2|}}, \quad (3.15.16)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{4} (\text{sign}(\bar{v}_2) + \text{sign}(\bar{w}_2)), \quad (3.15.17)$$

$\bar{\Psi}^\pm \equiv \Psi^\pm(\bar{k}, \bar{\kappa}, \xi, \eta)$ ,  $\bar{a}_n \equiv a_n(\bar{k}, \bar{\kappa})$ . Для того, чтобы записать выражения для функций  $I_{Nn}$ , необходимо найти корни уравнений (3.15.12) и (3.15.14) и определить области их существования. Будем искать такие корни уравнений (3.15.12), (3.15.14), которые оставляют фазу  $\bar{\Psi}^\pm$  действительной. Если фаза  $\bar{\Psi}^\pm$  комплексная, то интегралы (3.15.15) дают решения экспоненциально затухающие со временем, которыми мы пренебрежем. Поскольку пути интегрирования в (3.15.11) проходят по действительным осям  $k$  и  $\kappa$ , ограничимся поиском действительных корней  $\bar{k}$  и  $\bar{\kappa}$ . Если  $\bar{k}$  и  $\bar{\kappa}$  действительны, то фаза  $\bar{\Psi}^\pm$  также действительна. Выражая  $\bar{k}^{-1}$  из (3.15.12) через  $\bar{\kappa}$ , получим

$$\bar{k}^{-1} = \bar{\kappa} \pm \sqrt{\frac{\bar{\kappa}^2 + \xi(1 + \bar{\kappa}^2)}{1 - \xi(1 + \bar{\kappa}^2)}}. \quad (3.15.18)$$

Отсюда видно, что  $\bar{k}$  остается положительной действительной величиной если  $\bar{\kappa}$  и  $\xi$  находятся в следующих областях допустимых значений

$$-\sqrt{(1 - \xi)/\xi} \leq \bar{\kappa} \leq \sqrt{(1 - \xi)/\xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.15.19)$$

$$\bar{\kappa} \geq \sqrt{-\xi/(1 + \xi)}, \quad \bar{\kappa} \leq -\sqrt{-\xi/(1 + \xi)}, \quad -1 \leq \xi \leq 0. \quad (3.15.20)$$

Подставляя (3.15.18) в (3.15.14), получим уравнение для  $\bar{\kappa}$

$$\frac{\bar{\kappa}}{(1 + \bar{\kappa}^2)} - \arctg \bar{\kappa} \pm \left[ \frac{\sqrt{(\bar{\kappa}^2 + (1 + \bar{\kappa}^2)\xi)(1 - (1 + \bar{\kappa}^2)\xi)}}{1 + \bar{\kappa}^2} - \arctg \sqrt{\frac{\bar{\kappa}^2 + \xi(1 + \bar{\kappa}^2)}{1 - \xi(1 + \bar{\kappa}^2)}} \right] = \pm \eta. \quad (3.15.21)$$

Отметим, что знаки « $\pm$ » в левой и правой частях этого уравнения не связаны друг с другом и, таким образом, возможны четыре различных уравнения. Детальный анализ показывает, что только три из этих четырех уравнений дают решения, удовлетворяющие условиям (3.15.19), (3.15.20). Первое уравнение, соответствующее области значений (3.15.19), получается при выборе знака плюс в левой части (3.15.21) и такого знака в правой части, который обеспечивает ее отрицательное значение, т. е.  $-\eta$ .

Поведение корней уравнений (3.15.21) проще всего проанализировать, построив графики левой и правой частей этих уравнений. Точки пересечения этих графиков являются корнями уравнений (3.15.21).

Графическое решение первого из выбранных нами уравнений (3.15.21) представлено на рис. 3.50, а. Видно, что при  $1 \geq \xi \geq 0$  существуют два корня этого уравнения  $\bar{\kappa}_1$  и  $\bar{\kappa}_2$ , удовлетворяющие условию (3.15.19). При этом величина  $-|\eta|$  может меняться в пределах  $\eta_2 \leq -|\eta| \leq \eta_1$  для корня  $\bar{\kappa}_1$  и  $\eta_3 \leq -|\eta| \leq \eta_1$  для корня  $\bar{\kappa}_2$ , где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\xi(1-\xi)} - \operatorname{arctg} \sqrt{\xi/(1-\xi)}, \\ \eta_2 &= -\sqrt{\xi(1-\xi)} + \operatorname{arctg} \sqrt{(1-\xi)/\xi} - \pi/2, \\ \eta_3 &= \sqrt{\xi(1-\xi)} - \operatorname{arctg} \sqrt{(1-\xi)/\xi} - \pi/2. \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $-|\eta| = \eta_1$  оба корня  $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$  сливаются в один. Два других уравнения (3.15.21), соответствующие области значений (3.15.20), получаются при выборе двух различных знаков в левой части (3.15.21) и отрицательному значению  $-|\eta|$  в правой части. Соответствующие графические решения этих уравнений представлены на рис. 3.50, б. Видно, что при  $0 \geq \xi \geq -1$  также существуют два корня  $\bar{\kappa}_3$  и  $\bar{\kappa}_4$ , удовлетворяющие условию (3.15.20). Область допустимых

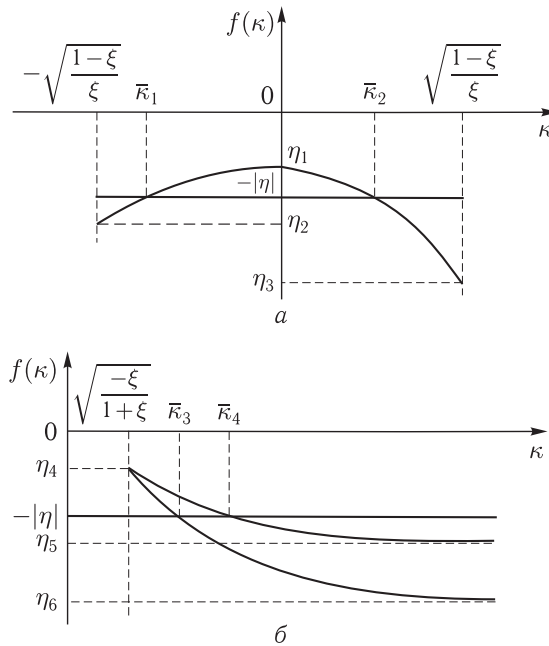


Рис. 3.50. Графическое решение уравнений (3.15.21): а — в области допустимых значений (3.15.19), б — в области допустимых значений (3.15.20). Кривые линии — левые части уравнений (3.15.21) (на панели б — верхняя кривая для знака «-», нижняя — для знака «+»), горизонтальные прямые линии — правые части этих уравнений

значений  $-|\eta|$  для корня  $\bar{\kappa}_3$  лежит в интервале  $\eta_6 \leq -|\eta| \leq \eta_4$ , а для корня  $\bar{\kappa}_4$  — в интервале  $\eta_5 \leq -|\eta| \leq \eta_4$ , где

$$\begin{aligned} \eta_4 &= \sqrt{-\xi(1+\xi)} - \arctg \sqrt{-\xi/(1+\xi)}, \\ \eta_5 &= -\sqrt{-\xi(1+\xi)} + \arctg \sqrt{-(1+\xi)/\xi} - \pi/2, \\ \eta_6 &= \sqrt{-\xi(1+\xi)} - \arctg \sqrt{-(1+\xi)/\xi} - \pi/2. \end{aligned}$$

При  $-|\eta| = \eta_4$  корни  $\bar{\kappa}_3$  и  $\bar{\kappa}_4$  сливаются в один. Таким образом, область существования действительных корней уравнений (3.15.18), (3.15.21) в плоскости  $(\xi, \eta)$  ограничена характеристиками  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ). Ее вид в плоскости безразмерных координат  $(\xi, \eta)$  представлен на рис. 3.51. По форме она напоминает «крылья бабочки», поэтому дальше для краткости будем использовать это определение для обозначения области существования колебаний в асимптотическом режиме. Если корни  $\bar{\kappa}_2$  и  $\bar{\kappa}_3$  существуют внутри всей этой области, то корни  $\bar{\kappa}_1$  и  $\bar{\kappa}_4$  — только в части «крыльев бабочки», ограниченной характеристиками  $\pm(\eta_1, \eta_2)$  и  $\pm(\eta_3, \eta_4)$ .

Запишем значения величин  $\bar{v}_2^{(i)}, \bar{w}_2^{(i)}$  и  $\bar{\Psi}_{(i)}^\pm$ , соответствующие корням  $\bar{\kappa}_i$  на характеристиках  $\eta_j$  (рис. 3.51):

- 1 — на характеристике  $\eta_1$ :  $\bar{\kappa}_1 = \bar{\kappa}_2 = 0, \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \sqrt{\xi/(1-\xi)}, \bar{v}_2^{(1,2)} = 2(1-\xi)^2, \bar{w}_2^{(1,2)} = 0, \bar{\Psi}_{(1,2)}^\pm = -(1-\xi)$ .
- 2 — на характеристике  $\eta_2$ :  $\bar{\kappa}_1 = -\sqrt{(1-\xi)/\xi}, \bar{k}_1 = 0, \bar{v}_2^{(1)} = 0, \bar{w}_2^{(1)} = 2, \bar{\Psi}_{(1)}^\pm = 0$ .
- 3 — на характеристике  $\eta_3$ :  $\bar{\kappa}_2 = \sqrt{(1-\xi)/\xi}, \bar{k}_2 = 0, \bar{v}_2^{(2)} = 0, \bar{w}_2^{(2)} = 2, \bar{\Psi}_{(2)}^\pm = 0$ .
- 4 — на характеристике  $\eta_4$ :  $\bar{\kappa}_3 = \bar{\kappa}_4 = \sqrt{-\xi/(1+\xi)}, \bar{k}_3 = \bar{k}_4 = \bar{\kappa}_3^{-1}, \bar{v}_2^{(3,4)} = 2(1+\xi)^2, \bar{w}_2^{(3,4)} = 0, \bar{\Psi}_{(3,4)}^\pm = -1$ .
- 5 — на характеристике  $\eta_5$ :  $\bar{\kappa}_4 = \infty, \bar{k}_4 = 0, \bar{v}_2^{(4)} = 0, \bar{w}_2^{(4)} = 2, \bar{\Psi}_{(4)}^\pm = \xi$ .
- 6 — на характеристике  $\eta_6$ :  $\bar{\kappa}_3 = \infty, \bar{k}_3 = 0, \bar{v}_2^{(3)} = 0, \bar{w}_2^{(3)} = 2, \bar{\Psi}_{(3)}^\pm = \xi$ .

Отсюда видно, что на каждой из этих характеристик обращается в нуль одна из вторых производных,  $\bar{v}_2^{(i)}$  или  $\bar{w}_2^{(i)}$ . Можно показать, что функции  $\bar{v}_2^{(1)}(\xi, \eta)$  при переходе от характеристик  $\eta_1$  к характеристикам  $\eta_2$  и  $\bar{v}_2^{(4)}(\xi, \eta)$  при переходе от  $\eta_4$  к  $\eta_5$  меняют знак, проходя через нуль на некоторых линиях  $\eta_0$ , расположенных между этими характеристиками. Уравнения для  $\eta_0$  получены в Приложении Л, а их графики представлены на рис. 3.51 штриховыми линиями. Представление (3.15.15), полученное с использованием классического метода стационарной фазы, на самих характеристиках  $\eta_j$  неприменимо. Можно, однако, расширить область применимости этого метода, учтя в разложении фазы  $\Psi^\pm$  производные высших порядков.

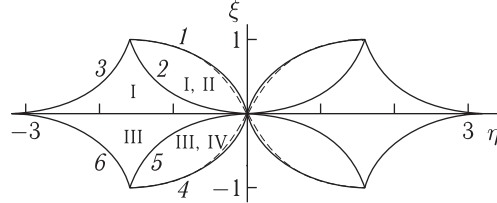


Рис. 3.51. Область, занимаемая колебаниями стоячей альфвеновской волны в асимптотическом режиме («крылья бабочки»). Сплошные линии 1–6 — характеристики  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6$ , штриховые линии — характеристики  $\eta_0$ . Римские цифры I, II, III и IV обозначают области существования корней уравнения (3.15.21)  $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3$  и  $\bar{\kappa}_4$

Третья производная от фазы  $\bar{w}_3^{(i)} \equiv (\partial^3 \Psi_{(i)}^\pm / \partial k^3)$ , где  $i = 1, 2$  на характеристиках  $\pm \eta_1$  и  $i = 3, 4$  на  $\pm \eta_4$ , равна

$$\bar{w}_3^{(i)} = -2 \left( \frac{|\xi|}{1 - |\xi|} \right)^{5/2}.$$

Ее учет в методе перевала (см. приложение М) дает для интеграла (3.15.11) асимптотическое представление, аналогичное (3.15.15), в котором следует полагать

$$A_{Nn}^{(i)} = \bar{a}_n \frac{\tau_1}{\tau_N^{5/6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{3|\bar{v}_2^{(i)}|}} \left( \frac{6}{|\bar{w}_3^{(i)}|} \right)^{1/3}, \quad (3.15.22)$$

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{\pi}{4} \text{sign}(\bar{v}_2^{(i)}). \quad (3.15.23)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Эти выражения следует использовать вблизи характеристик  $\pm \eta_1$  и  $\pm \eta_4$ , при выполнении условия

$$\frac{|\bar{w}_2^{(i)}|^3}{\bar{w}_3^{(i)2}} \tau_N \lesssim 1.$$

Аналогично, учет третьей производной

$$\bar{v}_3^{(i)} \equiv \left( \frac{\partial^3 \Psi_{(i)}^\pm}{\partial \kappa^3} \right)_{\kappa=\bar{\kappa}_i} = 2\bar{\kappa}_i \left[ \frac{1 - 3\bar{\kappa}_i^2}{(1 + \bar{\kappa}_i^2)^3} - \frac{1 - 3(\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_i^{-1})^2}{(1 + (\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_i^{-1})^2)^3} \right]$$

на характеристиках  $\eta_0$  дает для интеграла (3.15.11) выражение вида (3.15.15), в котором

$$A_{Nn}^{(i)} = \bar{a}_n \frac{\tau_1}{\tau_N^{5/6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{3|\bar{w}_2^{(i)}|}} \left( \frac{6}{|\bar{w}_3^{(i)}|} \right)^{1/3}, \quad (3.15.24)$$

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{\pi}{4} \text{sign}(\bar{w}_2^{(i)}). \quad (3.15.25)$$

Эти выражения применимы вблизи характеристик  $\eta_0$  при выполнении условия

$$\frac{|\bar{v}_2^{(i)}|^3}{\bar{v}_3^{(i)2}} \tau_N \lesssim 1.$$

Однако, даже такое расширенное применение метода стационарной фазы не дает правильного выражения для интеграла (3.15.11) на характеристиках  $\pm\eta_2, \pm\eta_3, \pm\eta_5, \pm\eta_6$ , где производные всех порядков от фазы  $\Psi_{(i)}^\pm$  по переменной  $\kappa$  обращаются в нуль. В этом случае можно использовать метод приближенного вычисления интегралов (3.15.11), представленный в Приложении Н, который основан на том, что при приближении к этим характеристикам  $\bar{k}_i \rightarrow 0$ . Использование этого метода дает для интеграла (3.15.11) выражение, аналогичное (3.15.15), в котором

$$A_{Nn}^{(i)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_N} |\Lambda| e^{-\gamma_N t}, \quad (3.15.26)$$

$$\alpha_n^{(i)} = \text{arctg}(\text{Re}\bar{\Lambda}/\text{Im}\bar{\Lambda}), \quad (3.15.27)$$

где

$$\bar{\Lambda} = - \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \left\{ \left[ \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{3}{2}\pi - |\eta|\right) \right]^{-1} + \left[ \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{\pi}{2} - |\eta|\right) \right]^{-1} \right\}. \quad (3.15.28)$$

Эти выражения следует использовать вблизи указанных выше характеристик при выполнении условия

$$\bar{v}_2^{(i)} \tau_N \lesssim 1.$$

Таким образом, при  $\tau_N \gg 1$  можно записать следующие выражения для функций  $I_{Nn}(\xi, \eta, t)$ , описывающих колебания компонент электромагнитного поля стоячей альфвеновской волны в асимптотическом режиме:

$$I_{Nn} = - \sum_{i=1}^4 \Theta^{(i)}(\xi, \eta) A_{Nn}^{(i)} \cos[(\Omega_N^0 + \Delta\Omega_N \bar{\Psi}_{(i)}^\pm(\xi, \eta))t + \bar{t}_n^{(i)}], \quad (3.15.29)$$

где  $\Theta^{(i)}(\xi, \eta)$  — функция, определяющая области существования корней  $\bar{k}_i, \bar{k}_i$ :

$$\Theta^{(1)} = \theta(\xi)\theta(1-\xi)\theta(|\eta| - \eta_2)\theta(\eta_1 - |\eta|),$$

$$\Theta^{(2)} = \theta(\xi)\theta(1-\xi)\theta(|\eta| - \eta_3)\theta(\eta_1 - |\eta|),$$

$$\Theta^{(3)} = \theta(-\xi)\theta(1+\xi)\theta(|\eta| - \eta_6)\theta(\eta_4 - |\eta|),$$

$$\Theta^{(4)} = \theta(-\xi)\theta(1+\xi)\theta(|\eta| - \eta_5)\theta(\eta_4 - |\eta|).$$

Амплитуды колебаний  $A_{Nn}^{(i)}$  определяются выражениями (3.15.16), (3.15.22), (3.15.24) и (3.15.26) в областях их применимости, поправки

к частоте колебаний  $\Delta\Omega_N \bar{\Psi}_{(i)}^{\pm}$  — выражением (3.15.3), а начальные фазы  $\bar{t}_n^{(i)}$  можно записать в виде

$$\bar{t}_n^{(i)} = t_n + \alpha_n^{(i)},$$

где  $\alpha_n^{(i)}$  определяются соответствующими выражениями (3.15.17), (3.15.23), (3.15.25) и (3.15.27). Если для источника колебаний использовать модельное представление (3.15.3), то в выражениях для  $\bar{a}_n$  и в уравнениях (3.15.26) и (3.15.28) следует сделать замену  $\gamma_N \rightarrow \gamma_N + k_i \Delta_\eta \Delta\Omega_N$  и  $|\eta| \rightarrow |\eta| + i \Delta_\eta$ .

Как видно из (3.15.29), колебания альфвеновской волны в асимптотическом режиме имеют сложный характер. В отличие от колебаний в начальном режиме, не только амплитуда, но также частота и начальная фаза асимптотических колебаний зависят от координаты точки наблюдения. При этом, в тех областях «крыльев бабочки», где одновременно существуют два корня уравнения (3.15.21), происходит сложение двух колебаний с разными частотами, фазами и амплитудами.

**3.15.4. Модель плазмосферы и уравнения для компонент поля стоячих альфвеновских волн.** Для численных расчетов используем дипольную модель геомагнитного поля и модель альфвеновской скорости (3.7.45). Компоненты электромагнитного поля альфвеновских колебаний, возбуждаемых в магнитосфере импульсным источником, описываются выражениями (3.15.6). Сильная локализация источника предполагает, что его характерный масштаб в направлении поперек силовых линий геомагнитного поля много меньше соответствующего масштаба локализации стоячих альфвеновских волн вблизи ионосферы  $\Delta_N^{(i)}$ . В наших дальнейших расчетах будут использованы величины  $\Delta_N^{(i)}$ , рассчитанные для магнитной оболочки  $L = 1,5$ , для сравнения с результатами наблюдений, полученными в ходе активного эксперимента «МАССА», проведенного на широте, соответствующей этой магнитной оболочке. В этом эксперименте был произведен мощный наземный взрыв, после которого в магнитосфере на спутнике «Ореол 3», который пролетал вблизи ионосферы на небольшом удалении от места взрыва, были зарегистрированы МГД-колебания альфвеновского типа [219, 299]. В разд. 3.14.4 были рассчитаны величины  $\Delta_N^{(i)}$  для первых трех гармоник стоячих альфвеновских волн на магнитной оболочке  $L = 6,6$ . На рассматриваемой магнитной оболочке ( $L = 1,5$ ) величины  $\Delta_N^{(i)}$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ) вблизи ионосферы меняются в пределах от  $\Delta_2^{(i)} = 60$  км до  $\Delta_5^{(i)} = 10$  км. Для первой гармоники величина  $\Delta_1^{(i)} \approx 600$  км намного превышает размеры локализации всех других гармоник. Таким образом, уравнения (3.15.6) применимы, если размер источника колебаний в ионосфере не превышает нескольких километров для гармоник  $N = 2, 3, \dots$ , а для основной гармоники он может составить несколько десятков километров.

Импульсный характер источника подразумевает, что характерное время его действия  $\Delta_t$  много меньше периодов возбуждаемых им колебаний. Эти периоды в ВКБ-приближении по продольной координате можно приближенно определить как  $t_N = t_A/N$ , где  $t_A$  — характерное время пробега с альфвеновской скоростью между магнитосопреженными ионосферами «туда и обратно» (3.7.35). Для используемой модели распределения альфвеновской скорости в магнитосфере на рассматриваемой магнитной оболочке  $L = 1.5$ , имеем  $t_A \simeq 5$  с. Однако это время значительно меньше периода колебаний основной гармоники стоячих альфвеновских волн, наблюдаемых на данной магнитной оболочке. Это объясняется тем, что здесь существенный вклад в периоды альфвеновских колебаний вносит заполнение магнитных силовых магнитных трубок ионами кислорода. В [300] показано, что учет ионов кислорода приводит к значениям  $t_A \simeq 15\text{--}30$  с на  $L = 1.5$ , что хорошо совпадает с наблюдаемыми периодами колебаний. В настоящей работе используется величина  $t_A \simeq 20$  с.

Полное поле МГД-колебаний, возбуждаемых в магнитосфере широкополосным локализованным источником, представляет собой суперпозицию всех гармоник стоячих альфвеновских волн. Для физических компонент электромагнитного поля этих колебаний вблизи ионосферы можно записать

$$E_{(x,y,z)} = \sum_{N=1}^{\infty} E_{(x,y,z)N}, \quad B_{(x,y,z)} = \sum_{N=1}^{\infty} B_{(x,y,z)N}, \quad (3.15.30)$$

где компоненты поля отдельных гармоник стоячих альфвеновских волн  $E_{xN}$ ,  $E_{yN}$ ,  $B_{xN}$ ,  $B_{yN}$  определяются уравнениями (3.15.6). Как отмечалось, характерные амплитуды электрических и магнитных компонент поля этих волн ( $E_N$  и  $B_N$ ) в приближении ВКБ ( $N \gg 1$ ) практически не зависят от номера гармоники  $N$ . С определенной точностью это утверждение можно распространить и на первые гармоники  $N \sim 1$ . Тогда в выражениях (3.15.30) можно заменить амплитуды  $E_N$  и  $B_N$  их средними значениями  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  и вынести из-под знаков суммы. Ограничиваясь тангенциальными по отношению к ионосфере составляющими поля МГД-колебаний, запишем

$$\begin{aligned} E_x &\simeq \bar{E}_x \sum_{N=1}^{\infty} I_{N1}(x, y, t), & E_y &\simeq \bar{E}_y \sum_{N=1}^{\infty} I_{N2}(x, y, t), \\ B_x &\simeq \bar{B}_x \sum_{N=1}^{\infty} I_{N3}(x, y, t), & B_y &\simeq \bar{B}_y \sum_{N=1}^{\infty} I_{N4}(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.15.31)$$

где функции  $I_{Nn}(x, y, t)$ , описывающие поведение отдельных гармоник стоячей альфвеновской волны, даются выражениями (3.15.5).

Отметим, что использование для описания продольной структуры стоячих волн ВКБ-приближения для функций  $R_N$  дает значения амплитуд  $\bar{E}_x = \bar{E}_y = 0$ , поскольку функции  $R_N$  имеют узлы на ионосфере. Однако учет конечной проводимости ионосферы дает значения  $\bar{E}_x$ ,

$\bar{E}_y \neq 0$ , хотя и достаточно маленькие. Напротив, функции  $\bar{B}_x, \bar{B}_y$ , пропорциональные  $\partial R_N / \partial l$ , достигают на ионосфере максимальной величины. В дальнейших расчетах будем рассматривать только магнитные компоненты поля колебаний  $B_x, B_y$ .

При увеличении номера гармоники  $N$  характерный масштаб локализации стоячей альфвеновской волны вблизи ионосферы  $\Delta_N^{(i)}$  и расщепление собственных частот  $\Delta\Omega_N$  уменьшаются. Таким образом, начиная с некоторого  $\bar{N}$ , в момент времени  $t$  для всех гармоник с  $N > \bar{N}$  будет выполнено условие  $\tau_N \equiv \Delta\Omega_N t < 1$  и они будут колебаться в начальном режиме. Функции  $I_{Nn}$ , описывающие колебания этих гармоник в начальном режиме, при переходе к физическим поперечным координатам  $x, y$  имеют вид

$$I_{Nn} = A_{Nn} \sin(\Omega_0 t + \iota_n), \quad (3.15.32)$$

где

$$\begin{aligned} A_{N1} = A_{N4} &= -2\pi\Delta_1^{(i)} \frac{|x|e^{-\gamma_N t}}{|x|^2 + y^2 \cos^2 \chi}, \\ A_{N2} = A_{N3} &= -2\pi\Delta_1^{(i)} \frac{ye^{-\gamma_N t} \cos \chi}{|x|^2 + y^2 \cos^2 \chi}, \end{aligned} \quad (3.15.33)$$

$\iota_1 = \iota_2 = 0, \iota_3 = \iota_4 = \pi/2$ . Отсюда видно, что коэффициенты  $A_{Nn}$  не зависят от номера  $N$  и, таким образом, ряды (3.15.32) при суммировании расходятся. Кроме того, при  $|x| \rightarrow 0$  и  $|y| \rightarrow 0$  в этих коэффициентах имеется особенность. Как было показано в предшествующем разделе, эта особенность связана с использованием модели источника (продольных токов  $j_{\parallel}$ ) в виде сингулярной функции  $\delta(\eta)$ . Использование модельной функции распределения токов в ионосфере

$$\tilde{j}_{\parallel} = \bar{j}_{\parallel} \frac{\Delta_y^2}{y^2 + \Delta_y^2}$$

устраняет особенность в коэффициентах (3.15.33). При этом происходит замена  $|x| \rightarrow |x| + \Delta_y$ .

Аналогично, расходимость рядов (3.15.32) связана с тем, что в качестве источника колебаний используется сингулярная функция вида  $\delta(t)$ . Если вместо нее использовать не имеющую особенностей модельную функцию

$$j_{\parallel} = \tilde{j}_{\parallel} \frac{\Delta_t^2}{t^2 + \Delta_t^2} = \bar{j}_{\parallel} \frac{\Delta_y^2}{y^2 + \Delta_y^2} \frac{\Delta_t^2}{t^2 + \Delta_t^2}, \quad (3.15.34)$$

то ряды (3.15.31) оказываются сходящимися. При этом каждый из коэффициентов (3.15.32) домножается на  $e^{-\Omega_N^0 \Delta_t}$ , что и обеспечивает сходимость, поскольку  $\Omega_N^0 = 2\pi N / t_A$ . Отметим, что при использовании модели источника (3.15.34) исчезают ограничения на применимость



формул (3.15.31) по масштабу локализации и времени действия источника. Характерные амплитуды колебаний  $\bar{B}_x$  и  $\bar{B}_y$  при этом имеют вид

$$\bar{B}_x = \bar{B} \sqrt{\alpha_T \alpha_P} \cos \chi / \sqrt{g_2^{(i)}}, \quad \bar{B}_y = -\bar{B} / \sqrt{g_1^{(i)}},$$

где

$$\bar{B} = \frac{\cos^2 \chi}{\pi^2 \sqrt{\alpha_T \alpha_P}} \frac{\Delta_y \Delta_t}{\Delta_1^{(i)}} \frac{c}{v_A^{(i)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{j}_{\parallel}(x)}{\Sigma_P(x)} dx, \quad (3.15.35)$$

$$\alpha_P = 2 \int_{x_-^3}^{x_+^3} \sqrt{\frac{g_1 g_3}{g_2}} \frac{dx^3}{v_A^2}, \quad \alpha_T = 2 \int_{x_-^3}^{x_+^3} \sqrt{\frac{g_2 g_3}{g_1}} \frac{dx^3}{v_A^2}.$$

Здесь  $c$  — скорость света в вакууме, а индекс  $(i)$  обозначает величины параметров на верхней границе ионосферы.

**3.15.5. Расчет поля альфвеновских колебаний в эксперименте «МАССА».** Рассмотрим структуру поля отдельной стоячей альфвеновской волны единичной амплитуды (у которой  $\bar{B} = 1$ ). Выберем для расчетов  $\Delta_y = 0,1 \Delta_1^{(i)}$ ,  $\Delta_t = 0,1 / \Omega_1^0$ . Распределение амплитуды альфвеновских колебаний ( $\sqrt{|B_x|^2 + |B_y|^2}$ ) в начальном режиме ( $\tau_N \ll 1$ ) в плоскости безразмерных поперечных координат  $(\xi, \eta)$  представлено на рис. 3.52. Видно, что амплитуда имеет максимум в точке локализации источника ( $\xi = 0, \eta = 0$ ) и убывает по степенному закону ( $1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ) при удалении от этой точки.

Распределение амплитуды колебаний стоячей альфвеновской волны в асимптотическом режиме ( $\tau_N \gg 1$ ) в плоскости  $(\xi, \eta)$  представлено на рис. 3.53. В распределении амплитуды в этом режиме отчетливо проявляется структура типа «крыльев бабочки». Напомним, что термин «крылья бабочки» используется здесь для обозначения области,

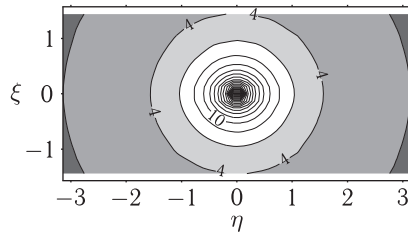


Рис. 3.52. Распределение амплитуды отдельной гармоники стоячей альфвеновской волны в начальном режиме колебаний в плоскости безразмерных поперечных координат  $(\xi, \eta)$ . Сектора с наименьшим значением амплитуды показаны градиациями серого

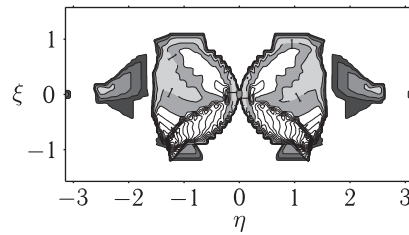


Рис. 3.53. Распределение амплитуды отдельной гармоники стоячей альфвеновской волны в асимптотическом режиме колебаний в плоскости безразмерных поперечных координат  $(\xi, \eta)$ . Сектора с наименьшим значением амплитуды показаны градиациями серого

занимаемой в плоскости поперечных координат колебаниями стоячей альфвеновской волны в асимптотическом режиме. В отличие от колебаний в начальном режиме, максимум амплитуды в асимптотическом режиме смещается от точки локализации источника в экваториальную часть «крыльев бабочки» (нижняя их часть на рис. 3.53). В этих же секторах имеет место резкий градиент амплитуды между областями внутри «крыльев бабочки» и снаружи, где колебания практически отсутствуют. Ширина переходной зоны между этими областями в принятой здесь модели, когда колебания вне «крыльев бабочки» отсутствуют, равна нулю. В действительности она имеет некоторую малую ширину, которая определяется интенсивностью затухания колебаний во внешней области. В асимптотическом режиме в большей части «крыльев бабочки» доминирующей оказывается  $V_y$ -компонента поля. Поэтому дальнейшие расчеты будут выполнены для этой компоненты поля колебаний.

Полное поле колебаний, возбуждаемых в магнитосфере широкополосными источниками, включает в себя все возможные гармоники стоячих альфвеновских волн. Поэтому необходимо определить какие из гармоник к выбранному моменту времени колеблются в начальном, а какие — в асимптотическом режиме. Для каждой гармоники это определяется величиной параметра  $\tau_N = \Delta\Omega_N t$ . Наибольшую относительную величину  $\Delta\Omega_N/\Omega_N$  имеет основная гармоника колебаний. На рассматриваемой магнитной оболочке  $L = 1,5$  имеем  $\Delta\Omega_1/\Omega_1 \simeq 0,3$ . Для других гармоник это отношение резко уменьшается с ростом номера  $N$ :  $\Delta\Omega_2/\Omega_2 \simeq 0,01$ ,  $\Delta\Omega_3/\Omega_3 \simeq 0,002$ . Таким образом, уже после первого периода колебаний  $t = t_A$  первая гармоника стоячих волн переходит в асимптотический режим. Все остальные гармоники могут колебаться в начальном режиме в течение многих периодов колебаний основной гармоники. Дальнейшие расчеты проведены для полного поля колебаний, в котором основная гармоника колеблется в асимптотическом режиме, а все остальные — в начальном.

Поскольку при использовании модели источника (3.15.34) ряды (3.15.31) сходятся, при их суммировании можно ограничиться конечным числом слагаемых. В представленных ниже расчетах использованы 10 первых слагаемых, хотя тестовые расчеты показывают, что общая картина колебаний мало меняется при учете более трех членов ряда.

Сравним, рассчитанную картину полного поля МГД-колебаний с данными, зарегистрированными на спутнике «Ореол-3» в эксперименте «МАССА». Для этого мы проведем расчет  $V_y$ -компоненты полного поля колебаний вдоль траектории движения спутника. Распределение амплитуды полного поля, включающего все гармоники стоячих альфвеновских волн, представлено на рис. 3.54. Основным результатом этих расчетов является то, что колебания первой гармоники практически полностью определяют волновое поле в экваториальных (в нижней части рис. 3.54) областях «крыльев бабочки», занятых этой гармоникой. Амплитуда колебаний первой гармоники в этих областях многократно

превосходит амплитуду колебаний всех других гармоник вместе взятых. Кроме того, в области локализации источника появляется максимум амплитуды, который определяется колебаниями других гармоник в начальном режиме. Поле колебаний в удаленных от точки локализации источника областях также определяется колебаниями высших гармоник стоячих волн (в основном второй гармоники).

Данные о движении спутника в этом эксперименте приведены в работе [219]. Максимальное сближение траектории с проекцией точки наземного взрыва на высоту движения спутника (прицельный параметр) составляло 40 км. Скорость движения спутника вдоль траектории равнялась 7,8 км/с. «Альфвеновский бросок» (апериодическое МГД-колебание длительностью около 20 с с поляризацией, типичной для альфвеновских волн) был зарегистрирован на борту спутника на расстоянии 750 км от проекции точки взрыва на высоту движения спутника. Если предположить, что этот импульс связан с пересечением спутником экваториальной границы левого «крыла бабочки», то траектория спутника в плоскости  $(x, y)$  должна проходить так, как изображено на рис. 3.54. Наклон траектории к осям координат существенно зависит от формы области, занимаемой колебаниями основной гармоники в реальной магнитосфере (т.е. насколько она похожа на рассчитанные «крылья бабочки»). Также существенна величина  $\Delta_1^{(i)}$ , определяющая размер этой области. В приведенных расчетах используется величина  $\Delta_1^{(i)} = 600$  км, к которой, однако, следует относиться только как к оценке по порядку величины. Для уточнения этой величины требуются специальные целенаправленные эксперименты, принцип которых изложен в разделе 3.14.

Поскольку неизвестен точный момент времени начального импульса продольных токов в ионосфере, предположим, что до пересечения спутником границы «крыльев бабочки» (характеристики  $\eta_4$ ) прошел по крайней мере один период колебаний основной гармоники стоячих альфвеновских волн. Такое время необходимо для установления структуры стоячих альфвеновских волн вдоль магнитных силовых линий. В разд. 3.15.2 показано, что эта граница для гармоники  $N = 1$  колеблется по закону  $\cos[(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1)t - \pi/4]$ . На рис. 3.55 представлены 6 различных вариантов поведения компоненты поля колебаний  $B_y$  при пролете спутника через границу «крыла бабочки». Были выбраны следующие моменты времени пересечения спутником границы, отсчитываемые от момента начального импульса:

$$\begin{aligned} t_1 &= (2\pi n - \pi/4)/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1), & t_2 &= 2\pi n/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1), \\ t_3 &= (2\pi n + \pi/2)/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1), & t_4 &= 2\pi(n + \pi)/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1), \\ t_5 &= (2\pi n + 3\pi/2)/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1), & t_6 &= (2\pi n + 7\pi/4)/(\Omega_1^0 - \Delta\Omega_1). \end{aligned} \quad (3.15.36)$$

Здесь  $n$  — целое число периодов основной гармоники, прошедших от момента импульсного возбуждения стоячей альфвеновской волны.

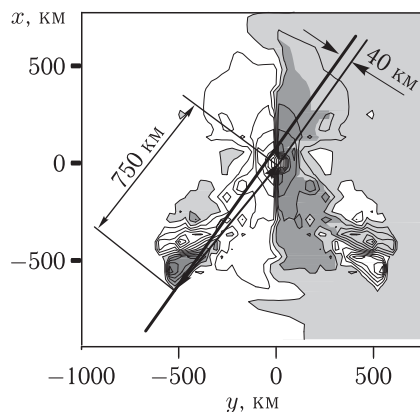


Рис. 3.54. Распределение в горизонтальной плоскости  $(x, y)$  амплитуды  $B_y$ -компоненты полного поля стоячих альфвеновских волн, возбуждаемых импульсным источником вблизи ионосферы. Возможный вид траектории спутника «Ореол-3» в эксперименте «МАССА» относительно области, занимаемой альфвеновскими колебаниями

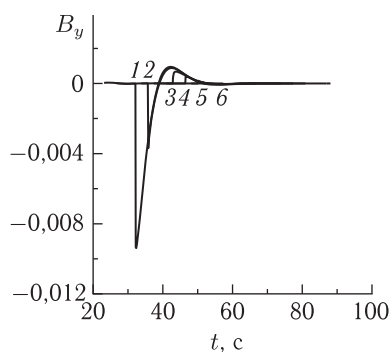


Рис. 3.55. Поведение  $B_y$ -компоненты полного поля альфвеновских колебаний на борту спутника, пересекающего экваториальную границу «крыла бабочки», в случае сильного затухания колебаний. Варианты 1–6 соответствуют пересечению границы спутником в моменты времени (3.15.36)

Практически вдоль всего рассматриваемого отрезка траектории спутника расчет проводился с шагом 1 с. Исключение составляет отрезок времени за 1 с до пересечения границы и 1 с после пересечения, на котором шаг по времени был выбран 0,1 с. Из рис. 3.55 видно, что во всех вариантах в момент пересечения спутником границы «крыла бабочки» должен наблюдаться резкий скачок (в наших расчетах — мгновенный) компоненты поля  $B_y$  от почти фонового уровня до максимальной величины. Знак этой величины, естественно, зависит от того, в какой фазе колебаний пересекается граница. В моменты времени  $t_1, t_2, t_6$  величина  $B_y$  отрицательна, а в моменты времени  $t_3, t_4, t_5$  — положительна. При достаточно сильном затухании колебаний компонента  $B_y$  за один период  $t_A$  после пересечения границы затухает практически до фонового уровня. Такая картина колебаний очень близка к тому «альфвеновскому броску», что был зарегистрирован на спутнике «Ореол-3» в эксперименте «МАССА».

Если принять приведенное выше рассуждение относительно происхождения альфвеновского импульса в эксперименте «МАССА», можно попытаться объяснить и некоторые другие особенности этого эксперимента. В [219] указано, что такие импульсы никогда не наблюдались в более высоких или более низких широтах в других экспериментах «МАССА». Можно предположить, что в экспериментах, проведенных в более высоких широтах, поле возбуждаемых альфвеновских колеба-

ний имело недостаточно большую амплитуду, чтобы быть зарегистрированным спутником. Как следует из (3.15.35), амплитуда колебаний обратно пропорциональна объему магнитной трубки, площадь сечения которой в ионосфере совпадает с областью локализации источника (множитель  $\sqrt{\alpha_T \alpha_R}$  в знаменателе (3.15.35)). С увеличением широты, объем такой силовой трубки увеличивается. При уменьшении широты, амплитуда колебаний, возбуждаемых в магнитосфере, должна увеличиваться. Однако уменьшение геомагнитной широты сопровождается увеличением декремента затухания стоячих альфвеновских волн из-за их диссипации в ионосфере. Это означает, что такие колебания могут быть зарегистрированы только в течение очень короткого интервала времени после начального импульса. Возможно, что ни в одном из таких экспериментов спутник не пересекал область локализации колебаний в течение этого интервала.

Еще одной особенностью эксперимента «МАССА» является, то, что в момент регистрации «альфвеновского броска» наблюдалось резкое увеличение высокочастотных электромагнитных шумов, зарегистрированных спутником. Резкие изменения интенсивности этих шумов были также зарегистрированы на расстояниях 140 и 280 км от точки регистрации переднего фронта «альфвеновского броска», а также в области локализации источника. Согласно гипотезе, предложенной в [219], этот шум связан с развитием плазменных неустойчивостей в поле интенсивной альфвеновской волны. Тогда это явление можно интерпретировать следующим образом. Резкое увеличение шума во время регистрации передней кромки зарегистрированного импульса связано с пересечением спутником экваториальной границы «крыла бабочки». Шум в области локализации источника связан как с начальным импульсом, так и с колебаниями высоких гармоник стоячих альфвеновских волн. Резкие увеличения интенсивности в 140 км и 280 км от границы «крыла бабочки» могут быть связаны с пересечением спутником областей с максимальной амплитудой альфвеновских колебаний. Как можно видеть из рис. 3.53, поле колебаний основной гармоники имеет вдоль траектории спутника внутри «крыльев бабочки» некоторую периодическую структуру с пространственным периодом  $\sim 150$  км. Колебания самого поля альфвеновских волн не были зарегистрированы спутником из-за их быстрого затухания. Однако связанный с ними электромагнитный шум может иметь значительно меньший декремент затухания.

Такой сценарий генерации поля альфвеновских волн в магнитосфере дает возможность сделать следующее заключение, важное для понимания этого явления. Поскольку поле возбуждаемых колебаний сильно затухающее, интервал времени между импульсом внешних токов в ионосфере и регистрацией импульса альфвеновских колебаний на спутнике не может превышать одного периода колебаний основной гармоники стоячих волн на данной магнитной оболочке. На рассматриваемых магнитных оболочках,  $L \sim 1,5$ , этот период равен 15–25 с.

### 3.16. Баллонная неустойчивость альфвеновских и ММЗ-колебаний на силовых линиях, проходящих через токовый слой

В разд. 2.15, 2.16 было показано, что сдвиговое течение плазмы солнечного ветра на магнитопаузе неустойчиво относительно БМЗ-колебаний (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца). По принятой в физике плазмы классификации эта неустойчивость относится к классу МГД-неустойчивостей, характеризующихся самыми большими инкрементами колебаний. Далее за ними следуют дрейфовые неустойчивости, связанные с дрейфом заряженных частиц в неоднородных электрических и магнитных полях. Они характеризуются меньшими, чем МГД-неустойчивости, инкрементами. Наконец, наименьшие инкременты раскачиваемых МГД-колебаний дают микронеустойчивости, связанные с наличием в фоновой плазме потоков высокоэнергичных заряженных частиц.

В магнитосфере Земли имеется возможность развития МГД-неустойчивости еще одного вида. Это — баллонная неустойчивость альфвеновских и ММЗ-колебаний на магнитных силовых линиях, имеющих участки с высокой кривизной. Такие участки образуются, например, на силовых линиях, проходящих через токовый слой геомагнитного хвоста. Для развития этой неустойчивости необходимо сочетание сильной кривизны магнитных силовых линий и наличие градиента давления плазмы в направлении радиуса кривизны. Предполагается, что в периоды геомагнитных бурь эта неустойчивость может быть ответственной за начало магнитного пересоединения в ближней к Земле части токового слоя.

В данном разделе проведено исследование пространственной структуры и спектра неустойчивых альфвеновских и ММЗ-волн на силовых линиях геомагнитного поля, проходящих через токовый слой. Разработана аналитическая модель аксиально симметричной магнитосферы, описывающая геометрию вытянутых магнитных силовых линий и равновесные распределения плотности и давления плазмы. Проведено сравнение спектров альфвеновских и ММЗ-колебаний, полученных в локальном и ВКБ-приближениях, в моделях геомагнитного хвоста с толстым и тонким токовыми слоями.

**3.16.1. Уравнение для баллонных мод.** Для описания поля МГД-колебаний, как и в предыдущих разделах, используем ортогональную криволинейную систему координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , связанную с силовыми линиями магнитного поля, в которой координата  $x^3$  направлена вдоль силовой линии,  $x^1$  — поперек магнитных оболочек, а  $x^2$  — дополняет систему координат до правосторонней. Смоделируем магнитное поле с вытянутыми в магнитный хвост замкнутыми силовыми линиями как векторную сумму дипольного магнитного поля и поля азимутального тока, локализованного вблизи экваториальной поверхности (см. рис. 3.56).

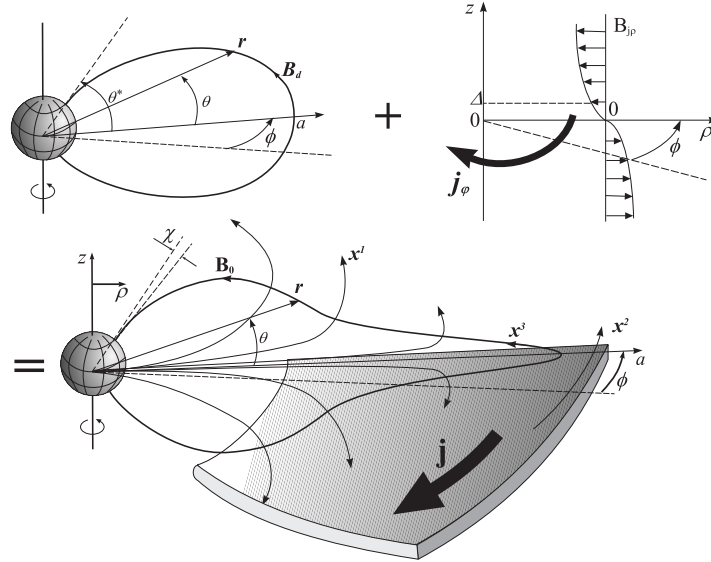


Рис. 3.56. Модель аксиально симметричного магнитного поля с вытянутыми силовыми линиями, образованного векторной суммой дипольного магнитного поля и поля аксиально-симметричного токового слоя. Системы координат, использованные в расчетах:  $(x^1, x^2, x^3)$  — ортогональная,  $(a, \phi, \theta)$  — неортогональная криволинейные системы координат,  $(\rho, \phi, z)$  — цилиндрическая система координат

В Приложении Д получены уравнения (Д.6) и (Д.7) на скалярный  $\varphi$  и векторный  $\psi$  потенциалы поля МГД-колебаний:

$$\begin{aligned} \nabla_1 B_0 \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 B_0 \widehat{L}_P \varphi = \\ = ik_2 \left( \nabla_1 B_0 \widehat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi - B_0 \widehat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi - B_0 \frac{\varkappa_{1g}}{\sqrt{g_3}} \widetilde{\Delta}_\perp \psi \right), \end{aligned} \quad (3.16.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_0 \sqrt{g_3}}{4\pi\rho_0} \widehat{L}_0 \frac{B_0}{\sqrt{g_3}} \widetilde{\Delta} \psi + v_s^2 \overline{\Delta} \psi - \widehat{L}_2 \psi = \\ = -i \frac{B_0 \sqrt{g_3}}{4\pi k_2 \rho_0} \widehat{L}_0 B_0 \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi + ik_2 v_s^2 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \widehat{L}_1 \varphi, \end{aligned} \quad (3.16.2)$$

где  $g_i$  — диагональные компоненты метрического тензора ( $i = 1, 2, 3$ ),  $g = g_1 g_2 g_3$ ,  $\nabla_i \equiv \partial/\partial x^i$ ,  $v_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$  — скорость звука в плазме,  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  — альфвеновская скорость, продольные операторы  $\widehat{L}_T$  и  $\widehat{L}_P$  определяются выражениями (3.1.6) и (3.1.7),

$$\widehat{L}_0 = \frac{v_s^2}{\omega^2} \frac{\rho_0}{P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 + 1,$$

— продольный оператор для магнитозвуковых волн ( $\sigma = 1/\gamma$ ),

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} &= \bar{\Delta}_\perp + \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{\rho_0}{B_0 \sqrt{g_3}}, \\ \bar{\Delta}_\perp &= \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \left( \nabla_1 \frac{p P_0^\sigma}{B_0} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{p} \frac{P_0^\sigma}{B_0} \right), \\ \tilde{\Delta} &= \tilde{\Delta}_\perp + \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}}, \\ \tilde{\Delta}_\perp &= \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{g_2}\end{aligned}$$

— аналоги оператора Лапласа,  $p = \sqrt{g_2/g_1}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 &= \frac{B_0}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{\varkappa_{1B} v_A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 - \varkappa_{1P}, \\ \hat{L}_2 &= \frac{B_0 v_s^2}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_1 g_2}} \nabla_3 \frac{\varkappa_{1B} v_A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \omega^2\end{aligned}$$

— операторы, связанные с поперечными градиентами параметров фонового магнитного поля и плазмы:

$$\begin{aligned}\varkappa_{1g} &= \nabla_1 (\ln g_3), \quad \varkappa_{1B} = \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} B_0), \\ \varkappa_{1P} &= \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} P_0^\sigma / B_0).\end{aligned}\tag{3.16.3}$$

Уравнения (3.16.1) и (3.16.2) образуют замкнутую относительно потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$  систему уравнений. Отметим, что для бессилового магнитного поля ( $\text{rot} \mathbf{B}_0 = 0$  — плазма без тока), например такого, как дипольное,  $\varkappa_{1B} = 0$  и, соответственно,  $P_0 = \text{const}$ ,  $\varkappa_{1P} = \varkappa_{1g}$ .

В дальнейших расчетах будем рассматривать азимутально-мелкомасштабные МГД-колебания, у которых  $|k_2 L / \sqrt{g_2}| \sim m \gg 1$ , где  $L$  — характерный масштаб неоднородности магнитосферной плазмы. Как мы увидим, в направлении вдоль силовых линий рассматриваемые колебания имеют вид стоячих между магнитосопреженными ионосферами волн. Длина волны основных гармоник таких стоячих волн  $\sim L$ . Их характерная длина волны поперек магнитных оболочек достаточно мала:  $L |\nabla_1 \ln(\varphi) / \sqrt{g_1}| \sim L |\nabla_1 \ln(\psi) / \sqrt{g_1}| \gg 1$ . В этом случае операторы  $\Delta_\perp$  в уравнениях (3.16.1)–(3.16.2) можно приближенно представить в виде

$$\bar{\Delta}_\perp \approx \tilde{\Delta}_\perp \approx \Delta_\perp = \nabla_1^2 / g_1 - k_2^2 / g_2.$$

Оставляя в правой части уравнения (3.16.1) наибольшее ( $\sim \Delta_\perp \psi$ ) слагаемое, получаем

$$\Delta_\perp \psi = \frac{i \sqrt{g_3}}{k_2 B_0 \varkappa_{1g}} \left( \nabla_1 B_0 \hat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 B_0 \hat{L}_P \varphi \right).\tag{3.16.4}$$

Подставим это выражение в левую часть уравнения (3.16.2) и, оставляя в нем наибольшие слагаемые, получим



$$\widehat{L}_s \nabla_1 \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 (\widehat{L}_s \widehat{L}_P + \widehat{L}_C) \varphi = 0, \quad (3.16.5)$$

где обозначено

$$\widehat{L}_C = \frac{\varkappa_{1g} \omega^2}{v_A^2 \sqrt{g_1 g_2}} \widehat{L}_1,$$

$$\widehat{L}_s = \frac{\varkappa_{1g} \rho_0}{B_0 P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{B_0}{\varkappa_{1g}} + \frac{\omega^2}{c_s^2}$$

— продольный оператор для ММЗ-волн,  $c_s = v_A v_s / \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$  — скорость ММЗ-волн в плазме. Уравнение (3.16.5) описывает пространственную структуру азимутально-мелкомасштабных МГД-колебаний, в том числе и «баллонные моды». Уравнение для них получается в предельном случае  $|k_2 / \sqrt{g_2}| \gg |\nabla_1 \ln(\varphi) / \sqrt{g_1}| \gg L^{-1}$ , если в (3.16.5) пренебречь слагаемыми  $\sim \nabla_1^2 \varphi$ ,  $\nabla_1 \varphi$ . В результате получаем уравнение для описания продольной структуры «баллонных мод» МГД-колебаний:

$$\widehat{L}_s \widehat{L}_P \varphi + \widehat{L}_C \varphi = 0. \quad (3.16.6)$$

Легко проверить, что при переходе к модели однородной плазмы (3.16.6) дает дисперсионные уравнения для альфвеновских ( $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$ ) и ММЗ- ( $\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2$ ) волн. «Баллонными модами» эти колебания называют когда они переходят в режим «баллонной неустойчивости».

Уравнение (3.16.6) следует дополнить граничными условиями на концах замкнутых силовых линий, которые пересекают ионосферу в северном ( $x^3 = x_+^3$ ) и южном ( $x^3 = x_-^3$ ) полушариях. В нулевом приближении будем считать ионосферу идеально проводящей. Это означает что в точках пересечения силовой линии с ионосферой обращаются в нуль тангенциальные компоненты электрического поля колебаний (при  $E_3 \equiv 0$  имеем  $E_1(x_{\pm}^3) = E_2(x_{\pm}^3) = 0$ ). В пределе  $k_2 \rightarrow \infty$  это дает следующие граничные условия для потенциала  $\varphi$

$$\varphi(x_{\pm}^3) = 0, \quad \widehat{L}_P \varphi|_{x^3=x_{\pm}^3} = 0. \quad (3.16.7)$$

Последнее граничное условие получается из (3.16.4) с учетом  $\psi(x_{\pm}^3) = 0$ . Проанализируем возможные решения уравнения (3.16.6) в двух приближениях по координате  $x^3$ . Одно из них — это так называемое «локальное приближение», основанное на предположении о том, что решение (3.16.6) можно искать, используя фурье-разложение по гармоникам вида  $\varphi \sim \exp(ik_3 x^3)$ . Чаще говорят о решении в приближении эйконала  $\varphi \sim \exp(i \int k_3 dx^3)$ , но с фиксированным значением  $k_3$ , которое выбирается в вершине силовой линии магнитного поля. Однако это то же самое, что искать решение в виде  $\varphi \sim \exp(ik_3 x^3)$ .

При этом коэффициенты уравнения (3.16.6) следует считать постоянными (см. например [229, 234]). В результате получается локальное дисперсионное уравнение для рассматриваемых МГД-колебаний. Обычно выбирают значения фоновых параметров плазмы, соответствующие вершине силовой линии, где имеют место наибольшие градиенты этих параметров по поперечной координате  $x^1$ . Это обосновывает-

ся тем, что рост амплитуды рассматриваемых колебаний определяется именно приэкваториальной областью магнитосферы. Структура таких колебаний вдали от экваториальной поверхности не рассматривается.

Более подходящим для решения (3.16.6) представляется использование ВКБ-приближения. Оно хорошо описывает структуру и спектр продольных гармоник с большими волновыми числами, однако качественно применимо и для анализа основных гармоник. Точное решение (3.16.6) для основных гармоник можно найти только численным интегрированием. В данном разделе мы ограничимся анализом решений в «локальном» и ВКБ-приближениях и проведем их сравнение.

**3.16.2. Модель среды.** Смоделируем магнитное поле следующим образом. Будем в меридиональном сечении описывать форму магнитной силовой линии радиусом-вектором  $\mathbf{r}(a, \theta)$  с началом координат в центре Земли (см. рис. 3.56), где  $a$  — экваториальный радиус силовой линии,  $\theta$  — широта точки на силовой линии, отсчитываемая от экватора. Рассмотрим модель магнитосферы, симметричную относительно экваториальной плоскости. Форма силовой линии дипольного магнитного поля описывается уравнением вида  $r \equiv r_d = a \cos^2 \theta$ , а его напряженность

$$B_d = \bar{B}_d \left( \frac{R_E}{a} \right)^3 \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}{\cos^6 \theta},$$

где  $\bar{B}_d = 0,32$  Гс — напряженность геомагнитного поля на поверхности Земли на экваторе ( $R_E$  — радиус Земли). Для дальнейших расчетов используем также цилиндрическую систему координат  $(\rho, \phi, z)$  (см. рис. 3.56). Компоненты дипольного магнитного поля в этой системе координат  $\mathbf{B}_d = (B_{d\rho}, 0, B_{dz})$  имеют вид

$$B_{d\rho} = B_d \cos \tilde{\theta}, \quad B_{dz} = B_d \sin \tilde{\theta},$$

где  $\tilde{\theta} = \arccos(3 \sin \theta \cos \theta / \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta})$  — угол между касательной к дипольной силовой линии и осью  $\rho$ .

Для магнитного поля азимутального тока  $\mathbf{B}_j = (B_{j\rho}, 0, B_{jz})$  примем следующую модель компоненты:

$$B_{j\rho} = \frac{B_{j\infty}}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right] \operatorname{th} \frac{z}{\Delta},$$

где  $\tilde{\rho} \approx 10 R_E$  — ближняя к Земле граница плазменного слоя,  $\Delta_\rho \approx 2 R_E$  — характерная толщина переходного слоя,  $\Delta$  — характерная толщина токового слоя,  $B_{j\infty} \approx 20$  нТл — напряженность магнитного поля в долях геомагнитного хвоста вдали от токового слоя. Известно, что толщина токового слоя варьируется в очень широких пределах [301–303], от  $\Delta \sim 1-2 R_E$  в магнитоспокойных условиях (толстый токовый слой) до  $\Delta \sim 0,1-0,4 R_E$  в возмущенной магнитосфере (тонкий токовый слой). В дальнейших численных расчетах используются значения  $\Delta = 0,2 R_E$  для тонкого токового слоя и  $\Delta = 1,5 R_E$  — для толстого токового слоя.

Поскольку магнитное поле тока должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho B_{j\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial B_{jz}}{\partial z} = 0,$$

имеем

$$B_{jz} = -\frac{B_{j\infty} \Delta}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right) + \frac{1}{\Delta_\rho \operatorname{ch}^2[(\rho - \tilde{\rho})/\Delta_\rho]} \right] \ln \operatorname{ch} \frac{z}{\Delta}.$$

Компонента  $B_{jz}$  имеет особенность при  $\rho \rightarrow 0$  и  $z \rightarrow \infty$ , однако в интересующей нас области вытянутых силовых линий  $\Delta \ll \rho$ ,  $z < \rho$  вклад этой компоненты пренебрежимо мал. В реальной магнитосфере магнитное поле, конечно, особенностей не имеет, а его распределение определяется не только током в токовом слое, но и токами на магнитопаузе. Можно было бы добиться в области моделирования такого же распределения компонент фонового магнитного поля введя эквивалентные поверхностные токи на конечном расстоянии от токового слоя. Однако расчет пространственного распределения таких токов достаточно сложен и это выходит за рамки поставленной здесь задачи.

Основная компонента аксиально симметричного азимутального тока  $\mathbf{j} = (0, j_\phi, 0)$ , соответствующая заданным выше компонентам магнитного поля имеет вид

$$j_\phi = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B}_0)_\phi \approx \frac{c B_{j\infty}}{8\pi} \frac{1}{\Delta \operatorname{ch}^2(z/\Delta)} \left[ 1 + \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right].$$

Она описывает азимутальный ток при  $\rho > \tilde{\rho}$ , локализованный вблизи экваториальной поверхности на масштабе  $\Delta$ .

Таким образом, полное фоновое магнитное поле  $\mathbf{B}_0 = (B_{0\rho}, 0, B_{0z})$  имеет компоненты  $B_{0\rho} = B_{d\rho} + B_{j\rho}$ ,  $B_{0z} = B_{dz} + B_{jz}$ . Форма магнитной силовой линии этого поля определяется следующим уравнением (см. Приложение О)

$$r(a, \theta) = a \exp \left[ \int_0^\theta \frac{\sin \theta' \cos \theta' - \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sin^2 \bar{\theta} - \sin^2 \theta'} d\theta' \right], \quad (3.16.8)$$

где  $\bar{\theta}$  — угол между касательной к силовой линии и осью  $\rho$  ( $\sin \bar{\theta} = B_{0z}/B_0$ ,  $\cos \bar{\theta} = B_{0\rho}/B_0$ ). На рис. 3.57 представлены силовые линии геомагнитного поля в модели с тонким токовым слоем, рассчитанные по формуле (3.16.8).

Выражения для компонент метрического тензора в системе координат  $(a, \phi, \theta)$ , связанной с силовыми линиями магнитного поля, имеют вид (см. Приложение Р)

$$g_1 = \frac{r^2(a, \theta)}{r^2(a, \theta) + (\partial r / \partial \theta)^2} \left( \frac{\partial r}{\partial a} \right)^2, \quad g_2 = r^2(a, \theta) \cos^2 \theta. \quad (3.16.9)$$

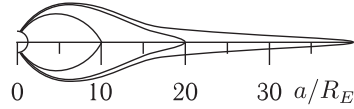


Рис. 3.57. Форма магнитных силовых линий, рассчитанных по формуле (3.16.8), в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем

Определение компоненты метрического тензора  $g_3$  более сложное. Однако точное выражение для нее в дальнейших расчетах не потребуется. В них используется только логарифмическая производная

$$\bar{\kappa}_{1g} = \frac{\kappa_{1g}}{\sqrt{g_1}} = \frac{\nabla_1(\ln g_3)}{\sqrt{g_1}} = 2/r_c, \quad (3.16.10)$$

где

$$r_c = \frac{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

— радиус кривизны силовой линии,  $r' \equiv \partial r / \partial \theta$ . Отметим, что координаты  $(a, \phi, \theta)$  не ортогональны, однако они однозначно связаны с координатами  $(x^1, x^2, x^3)$ . В частности, производные от произвольной функции  $f(a, \theta)$  по переменной  $x^1$  в системе координат  $(a, \theta)$  имеют вид

$$\nabla_1 f = \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)_\theta - \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_a \frac{(\partial r / \partial \theta)_a (\partial r / \partial a)_\theta}{r^2(a, \theta) + (\partial r / \partial \theta)_a^2},$$

где нижние индексы означают, что соответствующая производная берется при постоянном  $a$  или  $\theta$ .

Модель распределения альфвеновской скорости зададим следующим образом. В области, где доминирует дипольная составляющая магнитного поля ( $\rho < \tilde{\rho}$ , где  $\tilde{\rho} \approx 10 R_E$  — внутренняя граница плазменного слоя) положим  $v_A(a, \theta) \equiv v_{Ad} = v_{Ai}/r_d(a, \theta)$ , где  $v_{Ai} \approx 5000$  км/с — величина альфвеновской скорости на верхней границе ионосферы ( $r_i = R_E + 1500$  км),  $r_d$  — радиус дипольной силовой линии. Эта простая модель корректно моделирует усредненное распределение  $v_A$  вдоль силовой линии от ионосферы до экваториальной плоскости. Конечно, она не учитывает резкое изменение  $v_A$  на плазмопаузе, однако мы не будем рассматривать эту область магнитосферы.

В области токового слоя ( $\rho > \tilde{\rho}$ ) основное изменение  $v_A$  происходит по координате  $z$ . Скорость  $v_A$  меняется от значения  $v_{A0} \approx \approx 100$  км/с в токовом слое ( $z = 0$ ) до  $v_{A\infty} \approx 6000$  км/с в долях геомагнитного хвоста (где  $z \gg \Delta$ ). Примем в этой области следующую модель альфвеновской скорости:

$$v_A(z) \equiv v_{Ac} = v_{A0}[1 - (1 - (v_{A\infty}/v_{A0})) \text{th}(z/\Delta)].$$

Полную модель альфвеновской скорости можно представить в виде

$$v_A(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[ v_{Ad} + v_{Ac} - (v_{Ad} - v_{Ac}) \text{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right], \quad (3.16.11)$$

где  $\Delta_\rho \approx 2R_E$  — характерная толщина переходной области ближнего плазменного слоя. Модельное распределение альфвеновской скорости в меридиональной плоскости представлено на рис. 3.58, а для толстого токового слоя. При заданном распределении магнитного поля уравнение (3.16.11) определяет распределение плотности плазмы  $\rho_0$ .

Для определения скорости звука необходимо задать модель распределения давления плазмы. Аналогично тому, как было сделано

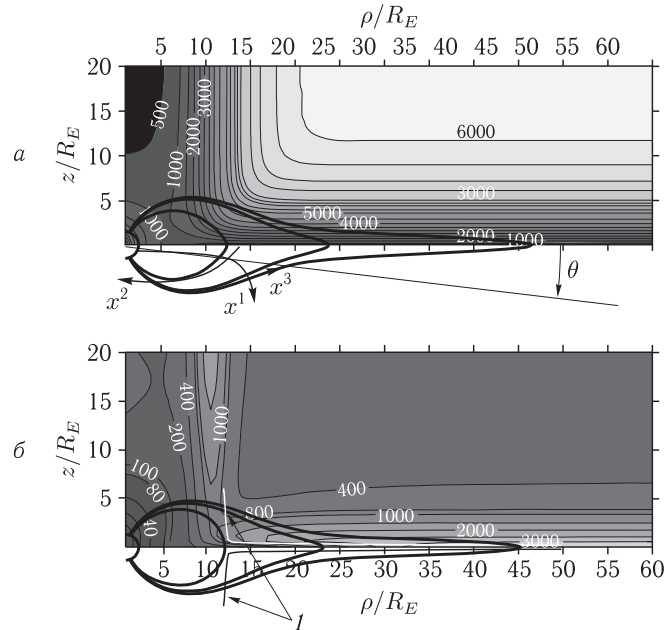


Рис. 3.58. Изолинии распределения: *a* — альфвеновской скорости  $v_A$ , км/с; *б* — скорости звука  $v_s$ , км/с, в меридиональной плоскости в модели магнитного хвоста с толстым токовым слоем. Линии *l* на панели *б* показывают меридиональные сечения поверхностей перегиба магнитных силовых линий

выше для альфвеновской скорости, зададим распределения давления отдельно для области  $\rho < \tilde{\rho}$ , где доминирует дипольное магнитное поле, и области  $\rho > \tilde{\rho}$ , где доминирующей компонентой поля является  $B_{j\rho}(z)$ . В первой из этих областей пренебрежем полем азимутального тока, а во второй — дипольным магнитным полем. Конечно, такое распределение равновесного давления плазмы можно рассматривать только как приближенное.

Из (1.0.1) в стационарном состоянии ( $\partial/\partial t = 0$ ) имеем условие равновесия плазменной конфигурации

$$\nabla P_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0], \quad (3.16.12)$$

откуда следует, что давление  $P_0$  сохраняется вдоль магнитных силовых линий. Если бы можно было задать точное распределение давления на какой-либо поверхности, пересекающей все силовые линии (например, вблизи ионосферы), оно было бы определено во всей модельной магнитосфере. К сожалению, задать такое распределение с хорошей точностью без учета токов на границе магнитосферы не представляется возможным. Поэтому в данной работе мы воспользуемся указанным

выше способом приближенного описания распределения равновесного давления плазмы.

При указанных предположениях в области  $\rho < \tilde{\rho}$ , где доминирует бессилое дипольное магнитное поле, имеем  $P_0 \equiv P_{0d} = \text{const}$ . В области  $\rho > \tilde{\rho}$  из условия равновесия плазменной конфигурации (3.16.12) имеем

$$P_0(z) \equiv P_{0j}(z) = P_{0j}(\infty) - \frac{B_{j\rho}^2(z)}{8\pi} + \frac{B_{j\rho}^2(\infty)}{8\pi},$$

где  $P_{0j}(\infty)$  — давление плазмы в долях геомагнитного хвоста вдали от токового слоя. Выберем его так, чтобы  $\beta_\infty = 8\pi P_{0j}(\infty)/B_{j\rho}^2(\infty) = 0,005$ . Полученное распределение  $P_0(z)$  соответствует модели слоя Харриса, которое считается достаточно хорошим приближением для описания токового слоя геомагнитного хвоста. А поскольку все эффекты, определяющие неустойчивость МГД-колебаний определяются поведением давления внутри и вблизи токового слоя, можно надеяться, что полученные далее результаты не слишком изменятся при переходе к более точной модели распределения  $P_0(\rho, z)$ . Для определенности положим также  $P_{0d} = B_{j\rho}^2(\infty)/8\pi$ . Полное распределение давления  $P_0(z)$  смоделируем формулой

$$P_0(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[ P_{0d} + P_{0j} - (P_{0d} - P_{0j}) \text{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta\rho} \right]. \quad (3.16.13)$$

Поскольку распределение  $\rho_0$  определено распределением альфвеновской скорости, мы можем построить распределение скорости звука в плазме. Для модели среды с толстым токовым слоем распределение  $v_s$  в меридиональной плоскости представлено на рис. 3.58, б.

**3.16.3. Исследование баллонной неустойчивости МГД-колебаний в локальном приближении.** Локальное приближение предполагает, что параметры плазмы заданы в вершине силовой линии и не меняются вдоль нее. Из условия равновесия фоновой плазмы (3.16.12) имеем следующее уравнение:

$$\nabla_1 P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \nabla_1 \ln(B_0 \sqrt{g_3}) = 0.$$

Используя введенные ранее параметры  $\varkappa_{1g}$ ,  $\varkappa_{1B}$  и  $\varkappa_{1P}$ , его можно переписать в виде

$$\varkappa_{1P} - \varkappa_{1g} + \left(1 + \frac{2\sigma}{\beta}\right) \varkappa_{1B} = 0, \quad (3.16.14)$$

где  $\sigma = 1/\gamma = 3/5$ ,  $\beta = 8\pi P_0/B_0^2$ . Используя это соотношение, можно определить возможные знаки  $\varkappa_{1g}$ ,  $\varkappa_{1B}$  и  $\varkappa_{1P}$ . В рассматриваемой модели среды в вершинах силовых линий, проходящих через токовый слой,  $\varkappa_{1g}, \varkappa_{1B} < 0$ ,  $\varkappa_{1P} > 0$ .

В локальном приближении будем искать решение уравнения (3.16.6) в виде  $\varphi \sim \exp(ik_3x^3)$ . В результате получается дисперсионное уравнение вида

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - v_A^2\right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - c_s^2\right) = \frac{\bar{\varkappa}_{1g}c_s^2}{k_{\parallel}^2} \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \bar{\varkappa}_{1P} + v_A^2 \bar{\varkappa}_{1B}\right), \quad (3.16.15)$$

где  $k_{\parallel} = k_3/\sqrt{g_3}$ ,  $\bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1/\sqrt{g_1}$  — физические компоненты рассматриваемых параметров. Для удобства сопоставления с результатами, полученными в работах других авторов (см. [227, 229, 234]), перепишем (3.16.15) в других обозначениях:

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - v_A^2\right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - c_s^2\right) = \frac{2\kappa_c c_s^2}{k_{\parallel}^2} \left[ \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \left(2\kappa_c - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\gamma}\right)\kappa_P\right) + v_A^2 \frac{\beta}{2} \kappa_P \right], \quad (3.16.16)$$

где  $\kappa_c = -\bar{\varkappa}_g/2 = 1/r_c$ ,  $r_c$  — радиус кривизны силовой линии,  $\kappa_P = g_1^{-1/2} \nabla_1 \ln(P_0)$ ,  $\kappa_B = g_1^{-1/2} \nabla_1 \ln(B_0)$ . Имеем  $\bar{\varkappa}_B = \kappa_B - \kappa_c$ ,  $\bar{\varkappa}_P = \kappa_P/\gamma - \kappa_B - \kappa_c$  и условие равновесия плазменной конфигурации в виде

$$\frac{\beta}{2} \kappa_P + \kappa_B - \kappa_c = 0.$$

Проанализируем качественно решения уравнения (3.16.15), полагая компоненту волнового вектора  $k_{\parallel}$  заданной. Используем для нее значения, соответствующие длинам стоячих вдоль магнитной силовой линии волн, когда решение (3.16.6) можно записать в виде

$$\varphi = C \sin(k_{\parallel} l),$$

где  $k_{\parallel} = \pi N/L$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники стоячей волны,  $L$  — длина магнитной силовой линии,  $l$  — координата точки на силовой линии, отсчитываемая от ионосферы южного полушария ( $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ ),  $C$  — произвольная константа. Решение (3.16.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right)_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( v_A^2 + c_s^2 + \frac{\bar{\varkappa}_{1g} \bar{\varkappa}_{1P} c_s^2}{k_{\parallel}^2} \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( v_A^2 + c_s^2 + \frac{\bar{\varkappa}_{1g} \bar{\varkappa}_{1P} c_s^2}{k_{\parallel}^2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{\varkappa}_{1g} \bar{\varkappa}_{1B} c_s^2}{k_{\parallel}^2} c_s^2 - 1 \right) v_A^2 c_s^2}. \end{aligned} \quad (3.16.17)$$

Уравнение (3.16.15) описывает две ветки МГД-колебаний. Выражение со знаком «+» перед радикалом описывает альфвеновскую, а со знаком «-» — ММЗ-моды МГД-колебаний. Для качественного представления о характере полученных решений используем метод их графического определения. На рис. 3.59 представлены графики левой и правой частей дисперсионного уравнения (3.16.15) как функции квадрата фазовой скорости волны  $\omega^2/k_{\parallel}^2$ . Левая часть описывается параболой, которая пересекается с осью  $\omega^2/k_{\parallel}^2$  в точках  $c_s^2$  и  $v_A^2$ ,

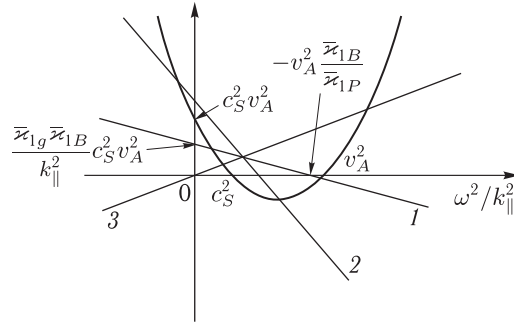


Рис. 3.59. Графическое решение дисперсионного уравнения (3.16.15). Решение определяется точками пересечения параболы и прямых линий, соответствующих правой части (3.16.15) при различных соотношениях параметров среды. Прямая 1 соответствует решениям для полоидальных альфвеновских и азимутально мелкомасштабных ММЗ-волн, прямая 2 — нейтральной альфвеновской и аperiodически неустойчивой ММЗ-волне, прямая 3 — нейтральным альфвеновской и ММЗ-волнам в бессиловом магнитном поле

а с вертикальной осью — в точке  $c_s^2 v_A^2$ . Правая часть представлена прямой, которая пересекается с горизонтальной осью в точке  $-v_A^2 \bar{x}_{1B} / \bar{x}_{1P}$ , а с вертикальной — в точке  $\bar{x}_{1g} \bar{x}_{1B} c_s^2 v_A^2 / k_{||}^2$ .

В [229, 234] показано, что решения для квадрата частоты колебаний  $\omega^2$ , описываемые (3.16.15), (3.16.16), могут быть только действительными. При этом решения, соответствующие альфвеновским волнам, всегда удовлетворяют условию  $\omega^2 > 0$ , а решения для ММЗ-волн могут при определенных условиях становиться аperiodически неустойчивыми, при этом  $\omega^2 < 0$ . В области действительных  $\omega^2$  решения (3.16.15) определяются точками пересечения прямой линии и параболы. Если  $\bar{x}_{1g} \bar{x}_{1B} < k_{||}^2$ , то решения (3.16.15) представляют собой обычную полоидальную альфвеновскую волну и азимутально-мелкомасштабную медленную магнитозвуковую волну (прямая 1 на рис. 3.59). При неограниченном увеличении радиуса кривизны ( $r_c \rightarrow \infty$ ,  $\bar{x}_{1g} \rightarrow 0$ ) решения (3.16.15) имеют вид  $\omega^2 = k_{||}^2 v_A^2$  и  $\omega^2 = k_{||}^2 c_s^2$ . Такие моды колебаний называются нейтральными (в отличие от неустойчивых — растущих, и устойчивых — затухающих).

При  $\bar{x}_{1g} \bar{x}_{1B} > k_{||}^2$  альфвеновская волна остается в области положительных значений  $\omega^2$ , а у ММЗ-волны  $\omega^2 < 0$  и одна из ее ветвей становится аperiodически неустойчивой (прямая 2 на рис. 3.59). Легко показать, что этот порог неустойчивости соответствует условию  $\kappa_{cK_P} > k_{||}^2$ , полученному в [229, 234]. Такую неустойчивость (и саму МГД-моду) называют «баллонной»: увеличивающаяся кривизна силовой линии ведет к увеличению инкремента возмущения, ведущего к увеличению кривизны и т. д.



Причиной рассматриваемых неустойчивых МГД-колебаний является ток в плазме. Точнее говоря — достаточно интенсивный и тонкий токовый слой, способный придать необходимую кривизну магнитным силовым линиям. Поэтому, строго говоря, следует говорить о неустойчивости МГД-волн в плазме с токовым слоем. В плазме без токового слоя ( $\bar{\mathcal{K}}_{1B} = 0$ ,  $\bar{\mathcal{K}}_{1P} = \bar{\mathcal{K}}_{1g}$ , например, в дипольном поле) решением (3.16.15) являются нейтральные полоидальные альфвеновские волны и азимутально-мелкомасштабные ММЗ-волны с  $\omega^2 > 0$  (прямая 3 на рис. 3.59).

В некоторых работах «баллонные моды» рассматривают как связанные альфвеновские и ММЗ-волны, а их неустойчивость трактуют как результат такой связи. Как показано в следующем разделе, в рассматриваемой плазменной конфигурации, альфвеновские и ММЗ-волны, действительно, могут образовывать связанные моды колебаний и их амплитуда также может расти под действием баллонной неустойчивости. Однако рассматривать эту связь как причину такой неустойчивости некорректно. Обе эти волны могут распространяться вдоль одних и тех же магнитных силовых линий. При этом они не всегда эффективно взаимодействуют между собой.

Посмотрим теперь какие из рассмотренных выше сценариев реализуются в рассматриваемой нами модели среды. На рис. 3.60 представлены рассчитанные распределения собственных частот стоячих альфвеновских и ММЗ-волн по магнитным оболочкам. Представлены решения уравнения (3.16.15) для модели «тонкого» (рис. 3.60, а) и «толстого» (рис. 3.60, б) токового слоя. Рассмотрены три первых нечетных гармоники ( $N = 1, 3, 5$ ) стоячих волн каждого типа. Видно, что частоты альфвеновских волн остаются действительными во всем диапазоне рассматриваемых магнитных оболочек ( $5 < a/R_E < 60$ ). ММЗ-волны на магнитных оболочках, проходящих через токовый слой, могут переходить в режим аperiодической неустойчивости. Чем выше номер гармоники и толще токовый слой, тем дальше в сторону хвоста происходит этот переход. Так 5-я гармоника ММЗ-волн в модели с толстым токовым слоем вообще не перешла в режим неустойчивости в рассматриваемом диапазоне магнитных оболочек. В модели с тонким токовым слоем первая гармоника оказывается аperiодически неустойчивой сразу после перехода через ближнюю границу слоя и остается неустойчивой во всем рассматриваемом диапазоне магнитных оболочек.

Интересно отметить, что собственные частоты альфвеновских и ММЗ-волн в рассматриваемом локальном приближении близки (но не равны) по порядку величины. Это связано с тем, что в токовом слое  $\beta \gg 1$  ( $v_s \gg v_A$ ,  $c_s \approx v_A$ ), что и дает в рассматриваемом локальном приближении близость собственных частот. Таким образом оказывается реализованным сценарий, представляемый на рис. 3.59 пересечением параболы и прямой 2. Исходя из этого сценария, на силовых линиях, проходящих через токовый слой, можно было бы ожидать нейтрально устойчивые полоидальные альфвеновские

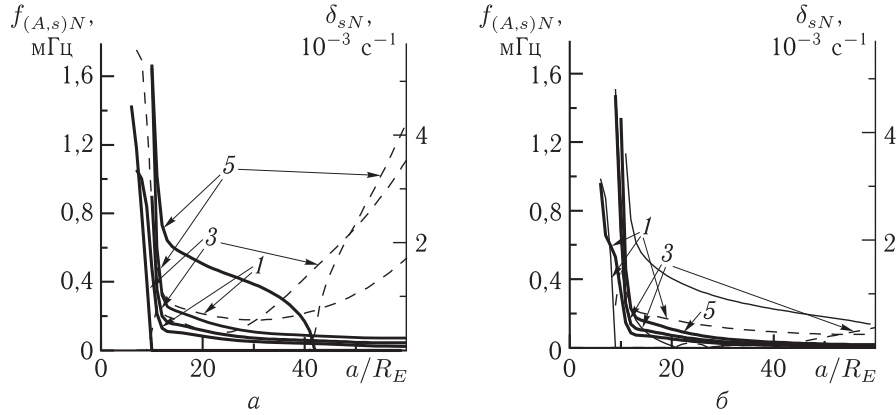


Рис. 3.60. Распределение собственных частот первых нечетных гармоник  $N = 1, 3, 5$  азимутально-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн ( $f_{AN} = \Omega_{PN}/2\pi$  — толстые сплошные линии) и частот и инкрементов стоячих ММЗ-волн ( $f_{sN} = \Omega_{sN}/2\pi$  — тонкие сплошные линии и  $\delta_{sN}$  — штриховые линии), рассчитанных в локальном приближении из дисперсионного уравнения (3.16.15):  $a$  — для модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем,  $b$  — для модели с толстым токовым слоем

и неустойчивые ММЗ-колебания. В следующем разделе рассмотрим структуру и спектр собственных частот стоячих альфвеновских и ММЗ-волн в ВКБ-приближении по продольной координате  $x^3$ .

#### 3.16.4. Расчет структуры и спектра стоячих альфвеновских и ММЗ-волн на вытянутых силовых линиях в ВКБ-приближении.

Как было показано в разделе 3.7, решение (3.16.6) в ВКБ-приближении для азимутально-мелкомасштабных колебаний можно искать в виде

$$\varphi = U(x^1) \exp(i\Theta(x^1, x^3)),$$

где функция  $U(x^1)$  описывает мелкомасштабную структуру решения по координате  $x^1$ , а  $\Theta(x^1, x^3)$  — большая квазиклассическая фаза, описывающая структуру решения по продольной координате. Характерный масштаб ее изменения по координате  $x^1$  порядка масштаба неоднородности среды. Будем искать решение в виде разложения  $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots$ , где  $|\Theta_0| \gg |\Theta_1| \gg |\Theta_2| + \dots$ . Подставляя это решение в (3.16.6), в главном порядке теории возмущений получаем уравнение для  $k_{\parallel} = g_3^{-1/2} \partial \Theta_0(x^1, x^3) / \partial x^3$ , аналогичное (3.16.15). Разрешив его относительно  $k_{\parallel}$ , получаем

$$k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2} + \frac{\omega^2}{2v_s^2} + \frac{\bar{\kappa}_{1g}\bar{\kappa}_{1B}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\omega^2}{v_s^2} + \bar{\kappa}_{1g}\bar{\kappa}_{1B} \right)^2 + \frac{\omega^2}{v_A^2} \bar{\kappa}_{1g}(\bar{\kappa}_{1P} + \bar{\kappa}_{1B})}. \quad (3.16.18)$$

Здесь знак «+» перед радикалом соответствует ММЗ-волне ( $k_{\parallel} \equiv k_{\parallel S}$ ), а знак «-» — полоидальной альфвеновской волне ( $k_{\parallel} \equiv k_{\parallel AP}$ ). В первом порядке теории возмущений имеем уравнение

$$4\Theta_0^3 \Theta_1' - i6\Theta_0^2 \Theta_0'' - i(2\kappa_{lB} + \kappa_{lP} - \kappa_{lg})\Theta_0^3 = 0,$$

где штрих обозначает производную  $\nabla_l \equiv \partial/\partial l$  и введены параметры  $\kappa_{lB} = \nabla_l \ln(B_0/p\kappa_{lg})$ ,  $\kappa_{lP} = \nabla_l \ln(\sqrt{g_1 g_2} P_0^\sigma/\rho_0)$ ,  $\kappa_{lg} = \nabla_l \ln p$ . Отсюда получаем

$$\Theta_1 = \frac{i}{4} \ln(k_{\parallel}^6 v_A^2 P_0^\sigma g_1^2/g_2).$$

Полное решение (3.16.6) в ВКБ-приближении можно представить в виде

$$\varphi = \frac{U(x^1)}{(v_A^2 P_0^\sigma g_1^2/g_2)^{1/4}} \left[ k_{\parallel AP}^{-3/2} \left( C_1 e^{i \int_{l_-}^l k_{\parallel AP} dl'} + C_2 e^{-i \int_{l_-}^l k_{\parallel AP} dl'} \right) + k_{\parallel S}^{-3/2} \left( C_3 e^{i \int_{l_-}^l k_{\parallel S} dl'} + C_4 e^{-i \int_{l_-}^l k_{\parallel S} dl'} \right) \right], \quad (3.16.19)$$

где  $C_{1,2,3,4}$  — произвольные константы, для определения которых используем граничные условия (3.16.7). Применяя эти граничные условия, в главном порядке ВКБ приближения получаем  $C_2 = -C_1$ ,  $C_3 = -C_4$  и следующее дисперсионное уравнение

$$(\kappa_{\parallel}^2 - 1)^2 \sin \Psi_{AP} \sin \Psi_s = 0, \quad (3.16.20)$$

где обозначено  $\kappa_{\parallel} = (k_{\parallel S}/k_{\parallel AP})_{l=l_{\pm}}$ ,  $l_{\pm}$  — координаты пересечения силовой линии с ионосферой северного (знак «+») и южного (знак «-») полушарий,

$$\Psi_{AP} = \int_{l_-}^{l_+} k_{\parallel AP} dl, \quad \Psi_s = \int_{l_-}^{l_+} k_{\parallel S} dl.$$

Из уравнения (3.16.20) следует, что решением (3.16.6) в ВКБ-приближении являются стоячие полоидальные альфвеновские волны вида

$$\varphi_{APN} = U_{PN}(x^1) P_N(x^1, x^3),$$

$$P_N(x^1, x^3) = C_{PN} \sin \left( \int_{l_-}^l k_{\parallel APN} dl \right) / k_{\parallel APN}^{3/2},$$

где  $C_{PN}$  — произвольная константа,  $k_{\parallel APN} \equiv k_{\parallel AP}(\Omega_{PN})$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники,  $\omega = \Omega_{PN}$  — собственная частота стоячей волны, определяемая из дисперсионного уравнения

$$\Psi_{AP}(\Omega_{PN}) = N\pi, \quad (3.16.21)$$

или стоячие ММЗ-волны

$$\varphi_{SN} = U_{SN}(x^1) \sin \left( \int_{l_-}^l k_{\parallel SN} dl \right) / k_{\parallel SN}^{3/2}, \quad (3.16.22)$$

собственные частоты которых определяются дисперсионным уравнением

$$\Psi_s(\Omega_{SN}) = N\pi. \quad (3.16.23)$$

Определим предварительно возможный тип решений полученных дисперсионных уравнений. Очевидно, что решения дисперсионных уравнений (3.16.21), (3.16.23) можно искать в области действительных значений  $\omega^2$  (в виде нейтральных,  $\omega^2 > 0$ , или аperiodических,  $\omega^2 < 0$ , мод) если  $k_{\parallel}^2 > 0$  на всей силовой линии при любых действительных  $\omega^2$ . Однако, если выражение под радикалом в (3.16.18) где-либо на силовой линии при действительном  $\omega^2$  проходит через нуль, решениями могут быть периодические неустойчивые моды с комплексным значением  $\omega^2$ . Анализ (3.16.18) показывает, что для того, чтобы выражение под радикалом при любых действительных  $\omega^2$  оставалось положительным необходимо, чтобы на всей силовой линии выполнялось условие,

$$\bar{\varkappa}_{1B}(\bar{\varkappa}_{1B} + \bar{\varkappa}_{1P}) < 0. \quad (3.16.24)$$

Если на силовой линии это условие нарушается, то более вероятным будет решение с комплексной частотой.

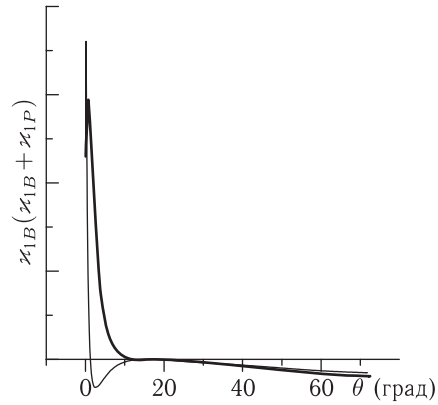


Рис. 3.61. Распределение вдоль силовой линии, расположенной на магнитной оболочке  $L = 20$ , параметра  $\bar{\varkappa}_{1B}(\bar{\varkappa}_{1B} + \bar{\varkappa}_{1P})$  в моделях среды с толстым (толстая линия) и тонким (тонкая линия) токовым слоем.  $\theta = 0$  в экваториальной плоскости

На рис. 3.61 представлено распределение параметра  $\bar{\varkappa}_{1B}(\bar{\varkappa}_{1B} + \bar{\varkappa}_{1P})$  на силовой линии  $a = 20R_E$  для моделей среды с тонким и толстым токовым слоем. Качественно такое распределение типично для всех силовых линий, проходящих через токовый слой. Видно, что, хотя на большей части силовой линии условие (3.16.24) выполняется, в области токового слоя  $\bar{\varkappa}_{1B}(\bar{\varkappa}_{1B} + \bar{\varkappa}_{1P}) > 0$ . Таким образом, вероятным типом решения дисперсионных уравнений (3.16.21), (3.16.23) в области силовых линий, проходящих через токовый слой, являются периодические неустойчивые моды колебаний. Для численного решения дисперсионных уравнений выбрана следующая про-

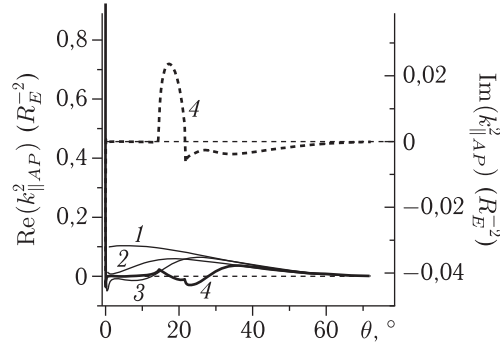


Рис. 3.62. Распределение вдоль различных силовых линий квадрата волнового числа ( $\text{Re } k_{\parallel}^2$  — сплошные линии,  $\text{Im } k_{\parallel}^2$  — штриховая линия) для основной гармоники ( $N = 1$ ) стоячих полоидальных альфвеновских волн в модели с тонким токовым слоем. Нейтрально устойчивые колебания ( $\delta_{P1} = 0$ ) на силовых линиях без точек поворота ( $\text{Re } k_{\parallel}^2 > 0$  на всей силовой линии): 1 — на магнитной оболочке  $L = 6$ , 2 —  $L = 8$ ; 3 — нейтрально устойчивые колебания на силовой линии с четырьмя точками поворота (где  $\text{Re } k_{\parallel}^2 = 0$ ) на силовой линии  $L = 10$ ; 4 — неустойчивые ( $\delta_{P1} > 0$ ) периодические колебания на магнитной оболочке  $L = 13$

цедура. Решения (3.16.21), (3.16.23) для продольной гармоники с номером  $N$  находятся в ближней к Земле части магнитосферы на одной из магнитных оболочек, не проходящих через токовый слой. Здесь решениями являются обычные полоидальные альфвеновские волны и азимутально-мелкомасштабные ММЗ-волны. Затем, при перемещении с малым шагом по магнитным оболочкам, находятся решения во всем рассматриваемом диапазоне оболочек.

На рис. 3.62 представлено распределение  $k_{\parallel}^2$  на различных магнитных оболочках для основной гармоники стоячих альфвеновских волн ( $N = 1$ ) в модели магнитосферы с тонким токовым слоем. На оболочках  $a = 6R_E$  и  $a = 8R_E$  вся силовая линия является областью прозрачности для рассматриваемых колебаний (здесь  $\text{Re } k_{\parallel}^2 > 0$ ). На силовой линии  $a = 10R_E$ , расположенной в ближней части токового слоя, область прозрачности на силовой линии разделяется на три — узкую приэкваториальную и две широких, прилегающих к ионосфере. Между ними расположены небольшие области непрозрачности. Известно, что в таких случаях происходит расщепление спектра собственных колебаний, тем большее, чем шире и глубже области непрозрачности [304]. Поскольку в нашем случае области непрозрачности небольшие, мы не будем рассматривать эффекты связанные с расщеплением спектра колебаний.

Интегрирование в (3.16.21) и (3.16.21) осуществляется только по областям прозрачности. В дисперсионном уравнении (3.16.21) полная фаза набирается из суммы интегралов по всем областям прозрачности

(их число на силовой линии может достигать 5). На силовой линии  $a = 10R_E$  колебание остается обычной полоидальной альфвеновской волной с действительной частотой. Однако на более удаленных силовых линиях, проходящих через токовый слой, решением, удовлетворяющим граничным условиям (3.16.7), является периодическая неустойчивая альфвеновская волна с  $\omega_N \equiv \Omega_{PN} = \bar{\Omega}_{PN} + i\delta_{PN}$ , где  $\bar{\Omega}_{PN}$  — реальная часть собственной частоты полоидальной альфвеновской волны,  $\delta_{PN} > 0$  — ее инкремент (рассматриваем здесь только неустойчивую ветвь колебаний). Это существенно отличается от результата, полученного в локальном приближении, в котором полоидальная альфвеновская волна является нейтрально устойчивой. На рис. 3.62 показано распределение  $\text{Re}(k_{\parallel AP}^2)$  и  $\text{Im}(k_{\parallel AP}^2)$  вдоль силовой линии  $a = 13R_E$ . Полный интеграл от  $\text{Im}(k_{\parallel AP}^2)$  вдоль всей силовой линии обращается в нуль.

На рис. 3.63 представлено распределение по магнитным оболочкам собственных частот первых пяти гармоник стоячих альфвеновских волн для моделей среды с толстым и тонким токовым слоем. В модели с тонким токовым слоем области, занимаемые неустойчивыми колебаниями, шире, а абсолютные значения инкрементов больше, чем в модели с толстым токовым слоем. Наибольшее значение инкремента имеет гармоника  $N = 2$  и достигается оно на магнитных оболочках  $a \approx 30R_E$ . Чем выше номер гармоники, тем меньше величина инкремента, и тем дальше в хвост происходит переход от нейтральных стоячих полоидальных альфвеновских волн к неустойчивым колебаниям. На этом же рисунке приведено распределение собственных частот тороидальных

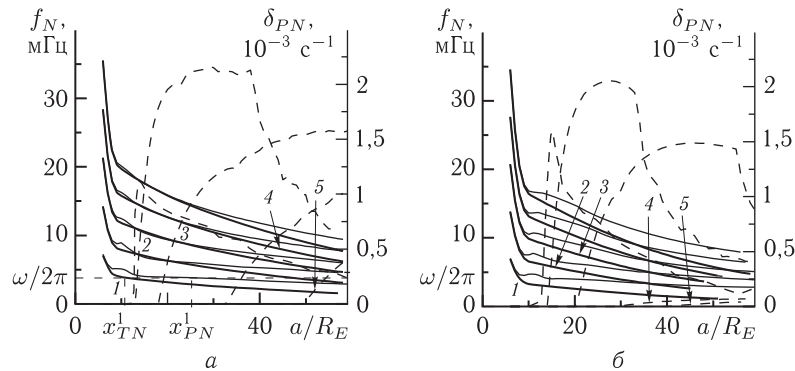


Рис. 3.63. Распределение собственных частот первых пяти гармоник  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  стоячих полоидальных ( $f_N = \text{Re}(\Omega_{PN})/2\pi \equiv \bar{\Omega}_{PN}/2\pi$  — тонкие сплошные линии,  $\delta_{PN} = \text{Im}\Omega_{PN}$  — штриховые линии) и тороидальных альфвеновских волн ( $f_N = \Omega_{TN}/2\pi$  — толстые сплошные линии) поперек магнитных оболочек:  $a$  — для модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем,  $b$  — для модели с толстым токовым слоем

альфвеновских колебаний магнитосферы, описываемых уравнением

$$\widehat{L}_T \varphi_{AT} = 0, \quad (3.16.25)$$

которое получается из (3.16.5) в пределе  $|\nabla_1 \ln \varphi_{AT}| \gg |k_2|$ . Граничные условия для него, которые в главном порядке определяются из условия идеальной проводимости ионосферы:  $\varphi_{AT}(l_{\pm}) = 0$ . Решение (3.16.25), описывающее стоячие тороидальные альфвеновские волны в ВКБ-приближении, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{ATN} &= U_{TN}(x^1) T_N(x^1, x^3), & (3.16.26) \\ T_N(x^1, x^3) &= C_{TN} \sin \left( \int_{l_-}^{l_+} k_{\parallel ATN} dl \right) / k_{\parallel ATN}^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $k_{\parallel AT} = \omega/v_A$ , а собственные частоты определяются дисперсионным уравнением

$$\Psi_{AT}(\Omega_{TN}) = \int_{l_-}^{l_+} k_{\parallel AT} dl = N\pi. \quad (3.16.27)$$

Интересно отметить, что графики собственных частот полоидальных и тороидальных альфвеновских колебаний, которые мало отличаются на магнитных оболочках в ближней к Земле части магнитного хвоста, при удалении в хвост существенно расходятся.

На рис. 3.64 представлен аналогичный расчет собственных частот азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн. Видно, что все гармоники колебаний переходят в режим неустойчивости практически в одной и той же области ближней части токового слоя. Следует отметить, что, в отличие от локального приближения, собственные частоты и инкременты ММЗ-волн много меньше частот и инкрементов альфвеновских волн. Это объясняется тем, что собственные частоты в ВКБ-приближении определяются интегралами вдоль силовой линии от скорости Альфвена  $v_A$  и скорости ММЗ-волн  $c_s$ , а на большей части силовых линий  $v_A \gg c_s \approx v_s$ . Еще одно существенное отличие неустойчивых стоячих ММЗ-волн состоит в том, что описывающие их решения, удовлетворяющие граничным условиям (3.16.7), существуют только в ограниченном диапазоне магнитных оболочек. На рис. 3.64 показаны распределения собственных частот только на оболочках, до которых удалось численно проследить каждую из гармоник рассматриваемых ММЗ-волн. Чем выше номер гармоники, тем дальше в хвост простирается область ее существования.

Еще одно замечание, касающееся ММЗ-волн, состоит в том, что реально они являются сильно затухающими модами — эффект, связанный с близостью их фазовой скорости к тепловой скорости ионов плазмы (см. гл. 1). Поэтому, учитывая очень малые инкременты стоячих

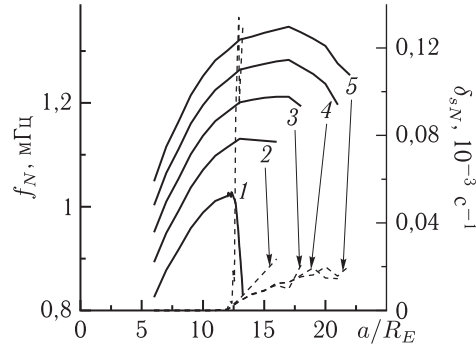


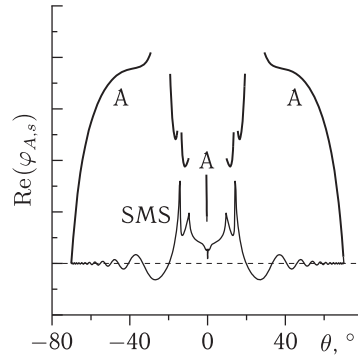
Рис. 3.64. Распределение собственных частот первых пяти гармоник  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  стоячих азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн ( $f_N = \text{Re}(\Omega_{sN})/2\pi$  — сплошные линии,  $\delta_{sN} = \text{Im}\Omega_{sN}$  — штриховые линии) поперек магнитных оболочек в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем

ММЗ-волн, вряд ли стоит ожидать их существенной раскачки в присутствии даже очень интенсивного и тонкого токового слоя.

Структура волнового поля вдоль силовой линии  $a = 13R_E$  для неустойчивой основной гармоники стоячих полоидальных альфвеновских волн ( $N = 1$ ) представлена на рис. 3.65. Распределение волновой функции  $\varphi_{A1}$  показано вдоль всей силовой линии, за исключением окрестностей точек поворота, где ВКБ-приближение неприменимо. Для точного определения структуры волновой функции необходимо численное решение уравнения (3.16.23). Из вида приведенной на рис. 3.65 волновой функции, полученной в ВКБ-приближении, можно сделать следующие выводы. На большей части силовой линии рассматриваемые колебания имеют структуру, аналогичную структуре обычной стоячей альфвеновской волны. Вблизи экваториальной поверхности в области токового слоя следует ожидать существенного измельчения структуры рассматриваемых колебаний вдоль силовой линии. Эти выводы справедливы и для других гармоник стоячих волн. Для сравнения, на том же рисунке приведена волновая функция  $\varphi_s$ , описывающая структуру ММЗ-волны на той же частоте  $\omega \equiv \Omega_{P1}$ . Показано распределение  $\varphi_s$  вдоль всей силовой линии, включая области непрозрачности (в точках поворота  $k_{\parallel s}^2$  регуляризована мнимой частью частоты). Она, конечно, не удовлетворяет граничным условиям (3.16.7). Видно, что ММЗ-волна на данной частоте имеет значительно меньшую длину волны на всей силовой линии, чем альфвеновская волна. Отметим, что развитие баллонной неустойчивости азимутально-мелкомасштабных МГД-колебаний может приводить к расслоению токового слоя на отдельные волокна, так же как это было показано в работах [305, 306].



Рис. 3.65. Продольная структура основной гармоники ( $N = 1$ ) неустойчивых полоидальных альфвеновских волн (А) на магнитной оболочке  $L = 13$  и, для сравнения, структура ММЗ-волны (SMS) с той же частотой (не удовлетворяющая граничным условиям на ионосфере). Разрывы в структуре альфвеновской волны соответствуют окрестностям точек поворота (где  $\text{Re}(k_{\parallel}^2) = 0$ )



В настоящем разделе исследована структура неустойчивых стоячих альфвеновских и ММЗ-волн вдоль силовых линий магнитного поля. Структура альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек аналогична структуре сцепленных альфвеновских и ММЗ-колебаний, рассмотренных в разд. 3.17.3.

### 3.17. Сцепленные альфвеновские и ММЗ-моды колебаний в геомагнитном хвосте

Как было показано в разд. 3.7, альфвеновские колебания с  $m \gg 1$  могут возбуждаться вблизи полоидальной резонансной поверхности сторонними токами в ионосфере. В спектре колебаний источника при этом должны присутствовать гармоники с частотами, соответствующими собственным частотам полоидальных стоячих альфвеновских волн. Источниками таких колебаний могут служить также потоки высокоэнергичных частиц в магнитосфере [307]. Если в ВКБ-приближении по координате  $x^1$  описывать структуру рассматриваемых колебаний в виде  $\varphi \sim \exp(i \int k_1(x^1) dx^1)$ , то вблизи полоидальной резонансной поверхности  $|k_1/k_2| \rightarrow 0$ . Сгенерированные вблизи этой поверхности колебания убегают поперек магнитных оболочек к тороидальной резонансной поверхности (где  $|k_1/k_2| \rightarrow \infty$ ), оставаясь при этом стоячими волнами вдоль силовых линий магнитного поля. В процессе такого перемещения поляризация колебаний меняется от полоидальной до тороидальной. В окрестности тороидальной резонансной поверхности (область альфвеновского резонанса) колебания полностью поглощаются из-за диссипации в ионосфере. Соответственно, нет отраженной от тороидальной поверхности волны.

В разд. 3.16 исследованы продольная структура и спектры стоячих между магнитосопряженными ионосферами азимутально-мелкомасштабных альфвеновских и ММЗ-волн. Однако использованное там ВКБ-приближение хотя и лучше подходит для их описания, чем локальное приближение, но также достаточно грубо описывает основные гармоники колебаний, длина волны которых сравнима с масштабами

неоднородности магнитосферной плазмы. А именно эти гармоники наиболее интересны, поскольку обладают наибольшими инкрементами неустойчивости.

В данном разделе проведено численное интегрирование уравнения, описывающего поле основных гармоник азимутально мелкомасштабных МГД-колебаний. Использована та же аксиально-симметричная модель геомагнитного хвоста, что и в разд. 3.16. Это дает возможность не только проверить результаты, полученные в ВКБ-приближении, но и рассчитать пространственное распределение поля сцепленных альфвеновских и ММЗ-волн. Проведено также аналитическое исследование условий сцепления альфвеновских и ММЗ-колебаний в токовом слое.

Частоты и инкременты ММЗ-колебаний на вытянутых в хвост магнитных силовых линиях много меньше соответствующих частот и инкрементов альфвеновских волн. В связи с этим, проявления неустойчивых альфвеновских колебаний должны быть в магнитосфере намного заметнее, чем ММЗ. Как будет показано далее, на магнитных оболочках, пересекающих токовый слой, альфвеновские волны сцепляются с ММЗ-колебаниями в области токового слоя. Поэтому в последующих расчетах будем обозначать их как сцепленные моды МГД-колебаний. В данном разделе мы ограничимся расчетом поля основной и первой гармоник сцепленных мод на частотах, близких к частотам стоячих полоидальных альфвеновских волн.

**3.17.1. Структура сцепленных мод вдоль силовых линий магнитного поля.** Как было показано в разд. 3.16, расстояние между полоидальной и тороидальной резонансными поверхностями для альфвеновских волн в области токового слоя, в отличие от случая «холодной плазмы», достаточно велико. Поэтому полоидальные колебания, скорее всего, будут поглощаться недалеко от полоидальной резонансной поверхности, где происходит их генерация. Для описания структуры таких колебаний вдоль силовых линий фонового магнитного поля вблизи полоидальной резонансной поверхности используем уравнение (3.16.5). Как было показано в предшествующих разделах, для описания пространственной структуры таких колебаний можно использовать метод разных масштабов, представляя скалярный потенциал МГД-колебаний в виде

$$\varphi = U(x^1)H(x^1, x^3)e^{ik_2x^2 - i\omega t}, \quad (3.17.1)$$

где  $U(x^1)$  описывает мелкомасштабную структуру колебаний поперек магнитных оболочек, а  $H(x^1, x^3)$  — их структуру вдоль магнитных силовых линий (здесь зависимость от  $x^1$  определяется изменением коэффициентов (3.16.5) на масштабах неоднородности магнитосферной плазмы).

Подставляя (3.17.1) в (3.16.5) и проводя дифференцирование, получаем уравнение для функции  $H(x^1, x^3)$ :

$$[\nabla_l^4 + \kappa_3 \nabla_l^3 + \kappa_2 \nabla_l^2 + \kappa_1 \nabla_l + \kappa_0]H = 0, \quad (3.17.2)$$

где  $\nabla_l \equiv \partial/\partial l = (g_3)^{1/2} \nabla_3$  — производная по продольной координате  $l$ , элемент длины которой в системе координат  $(a, \phi, \theta)$  имеет вид (см. (O.1) в Приложении O)

$$dl = \sqrt{r^2(a, \theta) + (\partial r/\partial \theta)^2} d\theta.$$

Радиус точки на силовой линии  $r(a, \theta)$  определяется как (3.16.8), а выражения для коэффициентов  $\kappa_i$  приведены в Приложении С.

Для численного интегрирования уравнения (3.17.2), его следует дополнить граничными условиями на ионосфере. В том же главном порядке теории возмущений, в котором было получено уравнение (3.17.2), будем считать ионосферу идеально проводящей. Поэтому граничные условия сводятся к требованию обращения в нуль на ионосфере тангенциальных компонент электрического поля колебаний, определяемых через  $E_1$  и  $E_2$ . Как следует из граничного условия (2.17.44), при  $(|k_1/k_2| \rightarrow 0)$  в главном порядке имеем

$$\varphi(l_{\pm}) = 0, \quad (3.17.3)$$

где  $l_{\pm}$  — координаты точек пересечения силовой линии с ионосферами северного и южного полушарий соответственно. Из граничного условия  $\psi(l_{\pm}) = 0$  имеем  $\hat{L}_P \varphi|_{l_{\pm}} = 0$  (см. (3.16.7)), или с учетом (3.17.3) —

$$\nabla_l^2 \varphi|_{l_{\pm}} = \varkappa_{lp} \nabla_l \varphi|_{l_{\pm}}, \quad (3.17.4)$$

где  $\varkappa_{lp} = \nabla_l(\ln p^{-1})$ . При численном интегрировании (3.17.2) значение  $\nabla_l \varphi|_{l_-}$  может быть выбрано произвольным, поскольку оно задает общую амплитуду получаемого решения и определяется выбранной нормировкой.

Для интегрирования уравнения четвертого порядка необходимо задать на ионосфере также третью производную  $\varphi''' \equiv \nabla_l^3 \varphi|_{l_-}$  (предполагаем, что интегрирование начинается от ионосферы южного полушария). Ни из каких других граничных условий  $\varphi'''(l_-)$  не определяется. Поскольку на противоположном конце силовой линии искомое решение также должно удовлетворять двум граничным условиям (3.17.3) и (3.17.4), оно определяется двумя собственными значениями параметров искомой задачи.

В качестве таких параметров выберем собственную частоту стоячих между ионосферами волн (обозначим ее  $\omega = \Omega_N$ , где  $N = 1, 2, 3$ , — продольное волновое число крупномасштабной стоячей сцепленной моды) и соответствующее ей значение третьей производной искомой функции на ионосфере  $\varphi'''_{N-} \equiv \varphi'''_{N-}(l_-)$ . Отметим, что собственное значение  $\Omega_N$  не следует рассматривать, как частоту собственных колебаний полной задачи (3.16.5). Собственные значения  $\Omega_N$  и  $\varphi'''_{N-}$  определяют пространственную структуру гармоник стоячих волн на рассматриваемой магнитной оболочке. Они являются функциями поперечной координаты  $\Omega_N \equiv \Omega_N(x^1)$ ,  $\varphi'''_{N-} \equiv \varphi'''_{N-}(x^1)$ , однако при решении продольной задачи на отдельной магнитной оболочке их можно считать константами.

Как будет видно из последующих расчетов,  $\text{Re}(\Omega_N(x^1))$  можно рассматривать как частоту, которая должна присутствовать в спектре источника, способного возбудить на рассматриваемой резонансной магнитной оболочке  $N$ -ю гармонику стоячих волн, а  $\text{Im}(\Omega_N(x^1))$  определяет распределение амплитуды таких колебаний поперек магнитных оболочек.

Для упрощения численных расчетов воспользуемся симметрией рассматриваемой модели относительно экваториальной плоскости. Тогда вторую пару граничных условий можно сформулировать не на магнитосопряженной ионосфере, а в экваториальной плоскости, следующим образом. Для четных мод (в используемых нами обозначениях  $N = 1, 3, 5, \dots$ ) это означает обращение в нуль всех нечетных производных от искомого функции. В рассматриваемой задаче достаточно требования  $\nabla_l \varphi|_{l_e} = \nabla_l^3 \varphi|_{l_e} = 0$ , где  $l = l_e$  — координата экваториальной плоскости. Для нечетных мод ( $N = 2, 4, 6, \dots$ ) аналогичное граничное условие имеет вид  $\varphi(l_e) = \nabla_l^2 \varphi|_{l_e} = 0$ .

На рис. 3.66 представлена структура двух первых гармоник стоячих вдоль магнитных силовых линий волн, полученная методом численного интегрирования уравнения (3.17.2) с граничными условиями (3.17.3), (3.17.4) на ионосфере. Представлены структуры стоячих волн на двух магнитных силовых линиях, одна из которых находится во внутренней магнитосфере на магнитной оболочке  $L = a/R_E = 6$ , где  $a$  — экваториальный радиус силовой линии (рис. 3.66, *a* и *б*), а вторая пересекает токовый слой — на оболочке  $L = 15$  (рис. 3.66, *в* и *г*). Расчет параметров колебаний в токовом слое (рис. 3.66, *в* и *г*) производился

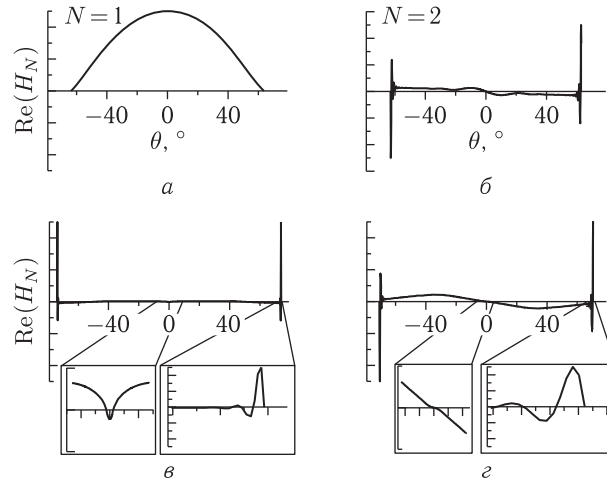


Рис. 3.66. Распределение вдоль силовой линии скалярного потенциала электрического поля основной ( $N = 1$ ) и первой ( $N = 2$ ) гармоник сцепленных мод: *a* и *б* — во внутренней магнитосфере на оболочке  $L = 6$ ; *в* и *г* — в области токового слоя на магнитной оболочке  $L = 15$

путем постепенной трансформации решений, найденных во внутренней магнитосфере (рис. 3.66, *a* и *b*), при переходе с малым шагом поперек магнитных оболочек в область токового слоя.

Наиболее интересно здесь наличие мелкомасштабной структуры собственных функций рассматриваемых колебаний вблизи ионосферы, которая является проявлением мелкомасштабной ММЗ-волны, сцепленной с крупномасштабной альфвеновской волной. Необычным здесь является то, что она проявляется не только в токовом слое, как это ожидалось в некоторых предшествующих работах (см. [236, 308]), но и вблизи ионосферы. Подобная же структура получалась в численных расчетах в [226, 309, 310], где она, однако, проявлялась только в отдельных компонентах поля колебаний. Согласно приведенным выше расчетам, эта особенность должна проявляться во всех компонентах волнового поля, поскольку все они выражаются через скалярный потенциал  $\varphi$ .

Измельчение пространственной структуры рассматриваемых колебаний происходит и в токовом слое. Однако колебания здесь имеют меньшую амплитуду, чем вблизи ионосферы. Это также связано со сцеплением крупномасштабной альфвеновской и мелкомасштабной ММЗ-мод, которое происходит в токовом слое. Внутри токового слоя определение принадлежности рассматриваемых колебаний к одной из гармоник стоячих волн, по форме их крупномасштабной составляющей, становится достаточно сложным из-за наличия мелкомасштабной структуры колебаний.

На рис. 3.67 представлены распределения вдоль магнитных силовых линий компонент электромагнитного поля колебаний  $E_y, B_x, B_z$  для основной гармоники стоячих волн ( $N = 1$ ) на тех же магнитных оболочках  $L = 6$  и  $L = 15$ . Проявление мелкомасштабной составляющей в этих компонентах вблизи ионосферы еще более заметно. Это происходит из-за особенностей распределения параметров плазмы в магнитном поле со сходящимися к ионосфере магнитными силовыми линиями (см. [311]).

Измельчение пространственной структуры рассматриваемых колебаний в токовом слое носит более сложный характер. В нижней части рис. 3.67 показано с увеличенным разрешением распределение  $B_z$ -компоненты поля на большей части силовой линии, за исключением области вблизи ионосферы. Резкие изменения структуры поля колебаний на силовых линиях, проходящих через токовый слой, связаны с тем, что в рассматриваемой области параметр  $\mathcal{H}_{1g}$  проходит через нуль. Это происходит в точках перегиба силовой линии, где ее кривизна обращается нуль. Эти точки в сумме образуют поверхности перегиба, сечения которых в меридиональной плоскости представлены на рис. 3.58.

Как видно из рис. 3.58 и 3.67, всего на силовой линии имеется четыре таких точки, две из которых расположены вблизи токового слоя, а две другие — в переходной области. Для регуляризации сингу-

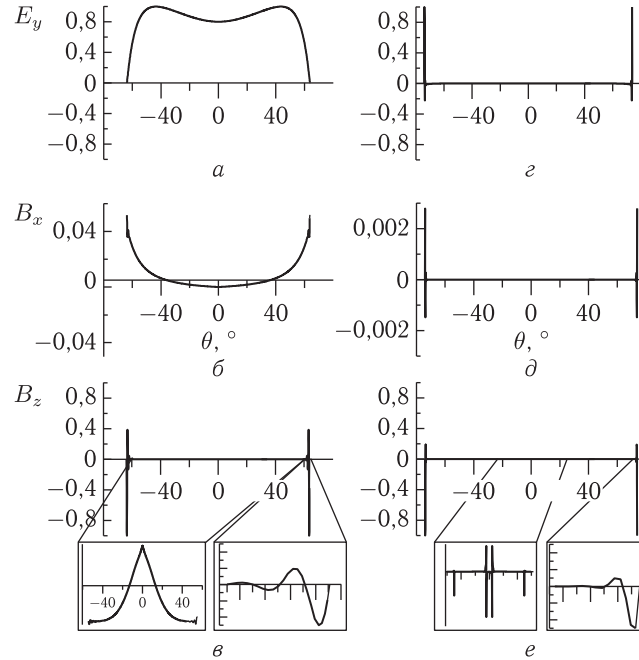


Рис. 3.67. Распределение вдоль силовой линии основных компонент электромагнитного поля колебаний ( $E_y$ ,  $B_x$ ,  $B_z$ ) основной гармоники сцепленных мод ( $N = 1$ ), нормированных на единичную амплитуду:  $a$ ,  $б$  и  $в$  — во внутренней магнитосфере на оболочке  $L = 6$ ;  $г$ ,  $д$  и  $е$  — в области токового слоя на магнитной оболочке  $L = 15$

лярности в этих точках в уравнении (3.16.4), связывающем потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , требуется учесть малые поправки более высокого порядка. Эту особенность в структуре компонент поля колебаний можно использовать для определения точек перегиба силовых линий геомагнитного поля по спутниковым наблюдениям УНЧ-колебаний. Например, для определения условных границ токового слоя.

Как было показано в гл. 1, ММЗ-волны сильно диссипативны, что не учитывается в рамках идеальной МГД, использованной в представленных выше расчетах. Поэтому в реальной магнитосфере сильное доминирование мелкомасштабной составляющей рассматриваемых колебаний вблизи ионосферы не настолько велико, как в рассчитанных здесь структурах. Изменение структуры колебаний в токовом слое с учетом реальной диссипации ММЗ-волн будет более гладким. Однако в какой-то мере эти особенности все равно будут проявляться и их можно использовать для идентификации сцепленных мод в УНЧ-колебаниях, наблюдаемых на спутниках.

На рис. 3.68 представлена расчетная зависимость частот двух первых гармоник стоячих волн  $\Omega_1, \Omega_2$  рассматриваемых сцепленных

мод колебаний от параметра магнитной оболочки  $L = a/R_E$ . Отметим сложность численного поиска собственных решений уравнения (3.17.2). Каждый корень  $\Omega_N(L)$ , соответствующий во внутренней магнитосфере крупномасштабной стоячей альфвеновской волне, в переходной области токового слоя расщепляется на множество «ветвей», отличающихся структурой их мелкомасштабных составляющих. Градиентный метод Ньютона, использованный здесь для поиска решений по двум собственным значениям, очень чувствителен к используемым начальным параметрам задачи. Поэтому проследить непрерывно поведение каждого такого решения во всей расчетной области не удастся. Однако соответствующим подбором начальных параметров можно свести к минимуму число перескоков с одной ветви на другую. Области существования всех возможных ветвей, полученных путем интегрирования решений для разных крупномасштабных гармоник стоячих волн, могут перекрываться. Представленные на рис. 3.68 решения нейтрально устойчивы вне токового слоя ( $\text{Im}(\Omega_{1,2}) = 0$ ), а внутри него становятся неустойчивыми ( $\text{Im}(\Omega_{1,2}) > 0$ ). Это проявление баллонной неустойчивости полоидальных альфвеновских колебаний на магнитных оболочках, пересекающих токовый слой. Рассматриваемая неустойчивость не связана со сцеплением альфвеновских и ММЗ-колебаний, как это предполагается в [227, 229]. Сцепленные альфвеновские и ММЗ-моды становятся неустойчивыми только внутри токового слоя, где реализуются условия для баллонной неустойчивости

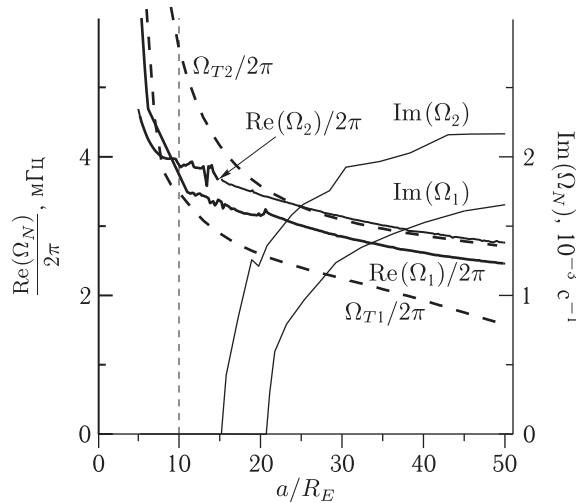


Рис. 3.68. Распределение поперек магнитных оболочек собственных частот основной ( $N = 1$ ) и первой ( $N = 2$ ) гармоник тороидальных альфвеновских (толстые штриховые линии) и сцепленных мод МГД-колебаний (толстые сплошные линии), а также их инкрементов в области токового слоя (тонкие сплошные линии)

полоидальных альфвеновских волн. В разд. 3.16 (см. также [236]) аналогичная задача решена в ВКБ приближении. В этом приближении нет сцепления альфвеновских и ММЗ-колебаний. В рассматриваемой модели геомагнитного хвоста как альфвеновские, так и ММЗ-волны могут становиться неустойчивыми в области токового слоя независимо друг от друга.

В следующем разделе мы покажем, что сцепление мод, происходящее в токовом слое, имеет вид их линейной трансформации. Из-за высокой диссипативности ММЗ-волн это сцепление должно увеличивать затухание альфвеновских волн, конкурируя с их баллонной неустойчивостью. Отметим, что эту неустойчивость нельзя рассматривать как неустойчивость собственных мод колебаний рассматриваемой плазменной конфигурации. Наличие этой неустойчивости может приводить к тому, что при удалении поперек магнитных оболочек от полоидальной резонансной поверхности амплитуда рассматриваемых колебаний будет возрастать.

На рис. 3.68, для сравнения, представлены распределения частот тороидальных альфвеновских волн  $\Omega_{T1}, \Omega_{T2}$ , являющихся собственными значениями задачи (3.16.25). Сравнение собственных частот  $\Omega_1, \Omega_2$  с  $\Omega_{T1}, \Omega_{T2}$  показывает, что резонансные оболочки для тороидальных и полоидальных стоячих альфвеновских волн с одинаковой частотой в рассматриваемой модели геомагнитного хвоста сильно разнесены. Волны, сгенерированные на полоидальной резонансной поверхности, не смогут добежать до тороидальной резонансной поверхности без заметного затухания. Они будут поглощены за счет диссипации в ионосфере недалеко от полоидальной резонансной поверхности. Поэтому при решении задачи о структуре таких колебаний поперек магнитных оболочек можно ограничиться рассмотрением их структуры только в некоторой окрестности полоидальной резонансной поверхности.

**3.17.2. Линейная трансформация альфвеновских и ММЗ-волн в токовом слое.** Проведем качественное исследование особенностей пространственной структуры рассматриваемых колебаний в токовом слое. Как было показано в предшествующем разделе, на большей части силовой линии эта структура определяется крупномасштабной составляющей, связанной с полоидальной альфвеновской волной. Вне токового слоя  $c_s^2 \approx v_s^2 \ll v_A^2$  и  $|\kappa_0 \bar{L}^4|, |\kappa_1 \bar{L}^3|, |\kappa_2 \bar{L}^2| \gg |\kappa_3 \bar{L}| \sim 1$ , где  $\bar{L}$  — характерная длина силовой линии. Поэтому при качественном исследовании этой структуры в уравнении (3.17.2) можно почти на всем протяжении силовой линии пренебрегать вкладом двух первых слагаемых со старшими производными, полагая

$$[\kappa_2 \nabla_l^2 + \kappa_1 \nabla_l + \kappa_0]H \approx 0, \quad (3.17.5)$$

и в главном порядке оно сводится к хорошо известному уравнению для полоидальных альфвеновских волн  $\hat{L}_P H \approx 0$ . Решение (3.17.5)



в ВКБ-приближении имеет вид

$$H \approx \frac{1}{(\kappa_0/\kappa_2)^{1/4}} \exp \left[ \pm i \int \sqrt{\kappa_0/\kappa_2} dl - \frac{1}{2} \int \frac{\kappa_1}{\kappa_2} dl \right]. \quad (3.17.6)$$

Рассмотрим распределение параметра  $\kappa_2$  вдоль всей силовой линии. На рис. 3.69 такое распределение представлено для основной гармоники сцепленных мод ( $N = 1$ ) на двух рассмотренных выше магнитных оболочках  $L = 6$  и  $L = 15$ . В области токового слоя  $v_s^2 \gg c_s^2 \approx v_A^2$  и характерной особенностью коэффициента  $\kappa_2$  является то, что он проходит через нуль в некоторых точках  $l = l_0$ . Очевидно, что в окрестности  $l_0$  ВКБ-приближение становится неприменимым и в (3.17.2) необходимо учитывать старшие производные. Точки  $l_0$  являются особыми точками уравнения (3.17.6) и представляют собой сингулярные точки поворота.

Для качественного исследования решения в окрестности точек  $l = l_0$  можно оставить в (3.17.2) старшую производную, которая обеспечивает регуляризацию искомого решения. Учет третьей производной приводит к небольшому смещению этих точек. Проводя линеаризацию коэффициентов такого уравнения вблизи  $l = l_0$ , запишем его в виде

$$[\nabla_z^4 + z\nabla_z^2 + \alpha_1\nabla_z + \alpha_0]H_N \approx 0, \quad (3.17.7)$$

где обозначено  $z = (l - l_0)/\lambda + i\lambda^2 \text{Im}(\kappa_2(l_0))$ ,  $\lambda = (\partial \text{Re}(\kappa_2)/\partial l)_{l_0}^{-1/3}$ ,  $\alpha_1 = \kappa_1(l_0)\lambda^3$ ,  $\alpha_0 = \kappa_0(l_0)\lambda^4$ . Уравнение (3.17.7) имеет стандартный вид для поиска его решений методом контурных интегралов (см. [203, 283]). Будем искать решение (3.17.7) в виде

$$H_N(x^1, z) = \int_{\tilde{C}} \tilde{H}_N(s) e^{sz} ds, \quad (3.17.8)$$

где  $\tilde{C}$  — некоторый путь интегрирования в плоскости комплексного  $s$ . Подставляя (3.17.8) в (3.17.7) и проводя во втором слагаемом интегрирование по частям, получаем для  $\tilde{H}_N$  уравнение

$$s^2 \tilde{H}_N - \frac{\partial s^2 \tilde{H}_N}{\partial s} + \alpha_1 s \tilde{H}_N + \alpha_0 \tilde{H}_N = 0 \quad (3.17.9)$$

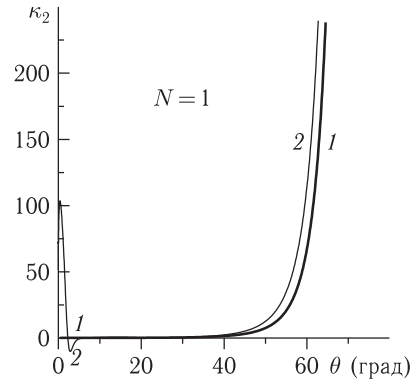


Рис. 3.69. Распределение вдоль силовой линии параметра  $\kappa_2$  для основной гармоники сцепленных мод ( $N = 1$ ) на магнитных оболочках  $L = 6$  (толстая линия 1) и  $L = 15$  (тонкая линия 2)

при условии обращения в нуль внеинтегрального члена

$$s^2 \tilde{H}_N e^{sz} \Big|_{\tilde{C}} = 0, \quad (3.17.10)$$

которое служит условием выбора контуров интегрирования  $\tilde{C}$ . Как отсюда видно, контуры  $\tilde{C}$  должны быть такими, чтобы либо на их концах выражение (3.17.10) обращалось в нуль, либо начальная и конечная точки контура совпадали. Решение (3.17.9) имеет вид

$$\tilde{H}_N = \frac{1}{s^{2-\alpha_1}} \exp\left(\frac{s^3}{3} - \frac{\alpha_0}{s}\right), \quad (3.17.11)$$

а соответствующее ему решение (3.17.8) —

$$H_N(x^1, z) = \int_{\tilde{C}} \exp\left(\frac{s^3}{3} - \frac{\alpha_0}{s} + sz\right) \frac{ds}{s^{2-\alpha_1}}, \quad (3.17.12)$$

и условие выбора контуров  $\tilde{C}$  —

$$s^{\alpha_1} \exp\left(\frac{s^3}{3} - \frac{\alpha_0}{s} + sz\right) \Big|_{\tilde{C}} = 0.$$

Представим комплексную переменную  $s$  в виде  $s = r_s e^{i\psi_s}$ . Как отсюда следует, выражение (3.17.10) при  $s \rightarrow 0$  обращается в нуль в секторе  $-\pi/2 < \psi_s < \pi/2$  при  $\text{Re } \alpha_0 > 0$  и в секторе  $\pi/2 < \psi_s < 3\pi/2$  при  $\text{Re } \alpha_0 < 0$ . При  $s \rightarrow \infty$  — это сектора  $\pi/6 < \psi_s < \pi/2$ ,  $5\pi/6 < \psi_s < 7\pi/6$  и  $3\pi/2 < \psi_s < 11\pi/6$ , которые на рис. 3.70 незаштрихованы. Мы не будем строить полную систему решений (3.17.7), как это сделано в [203, 283]. Ограничимся теми контурами  $\tilde{C}$ , интегралы (3.17.8) по которым соответствуют решениям, описывающим сцепление рассматриваемых альфвеновских и ММЗ колебаний.

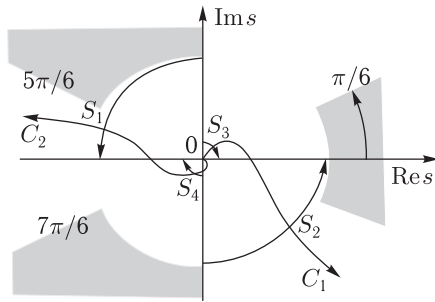


Рис. 3.70. Изменения азимутов точек перевала  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) в (3.17.12) при переходе от  $\text{Re } z \rightarrow \infty$  к  $\text{Re } z \rightarrow -\infty$  и контуры интегрирования  $\tilde{C}_{1,2}$  для решений уравнения (3.17.7) при  $\text{Re } \alpha_0 > 0$

Для этого оценим интегралы (3.17.8) при  $|z| \rightarrow \infty$  методом перевала (см. [281]). Седловые точки в (3.17.8) определяются нулем производной от показателя экспоненты под интегралом:

$$s^2 + \frac{\alpha_0}{s^2} + z = 0.$$

Отсюда имеем

$$s^2 = -\frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - \alpha_0}.$$

При  $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$  имеем четыре седловые точки  $S_{1,2} = \pm i\sqrt{z}$  и  $S_{3,4} = \pm \pm i\sqrt{\alpha_0/z}$  (при  $\operatorname{Re} \alpha_0 > 0$ ). Величина  $z$  в общем случае комплексная, мнимая часть которой определяется комплексной частотой  $\omega$ . Правило обхода особой точки  $z = 0$  при переходе от  $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$  к  $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$  определяется так, как это имеет место при  $\operatorname{Im} \omega > 0$ , т.е. фаза  $z$  меняется от 0 до  $\pi$ . Таким образом, при  $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$  седловые точки переходят в  $S_{1,2} = \mp \sqrt{-z}$ ,  $S_{3,4} = \pm \sqrt{-\alpha_0/z}$ , как показано на рис. 3.70.

Выберем контуры интегрирования  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  как показано на рис. 3.70. Оба эти контура пересекают по две седловые точки и описывают сцепленные альфвеновские и ММЗ-моды. Обозначим  $\alpha_0 = r_\alpha e^{i\nu}$ . Используя стандартные формулы для оценки интегралов методом седловой точки и учитывая в каждом решении вклад от двух таких точек, получаем следующие выражения для решений (3.17.8) на асимптотиках:

$$H_N^{(1)} = \begin{cases} \frac{z^{1/4-\alpha_1/2}}{\alpha_0^{3/4-\alpha_1/2}} \exp[2i\sqrt{\alpha_0 z} + i\varphi_{A1}] + \\ \quad + \frac{\exp[-\frac{2}{3}iz^{3/2} + i\varphi_{s1}]}{z^{5/4-\alpha_1/2}}, & \operatorname{Re} z \rightarrow \infty, \\ \frac{(-z)^{1/4-\alpha_1/2}}{\alpha_0^{3/4-\alpha_1/2}} \exp[-2\sqrt{-\alpha_0 z} + i\varphi_{A2}] + \\ \quad + \frac{\exp[-\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + i\varphi_{s2}]}{(-z)^{5/4-\alpha_1/2}}, & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (3.17.13)$$

$$H_N^{(2)} = \begin{cases} \frac{z^{1/4-\alpha_1/2}}{\alpha_0^{3/4-\alpha_1/2}} \exp[-2i\sqrt{\alpha_0 z} + i\varphi_{A3}] + \\ \quad + \frac{\exp[\frac{2}{3}iz^{3/2} + i\varphi_{s3}]}{z^{5/4-\alpha_1/2}}, & \operatorname{Re} z \rightarrow \infty, \\ \frac{(-z)^{1/4-\alpha_1/2}}{\alpha_0^{3/4-\alpha_1/2}} \exp[2\sqrt{-\alpha_0 z} + i\varphi_{A4}] + \\ \quad + \frac{\exp[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + i\varphi_{s4}]}{(-z)^{5/4-\alpha_1/2}}, & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где обозначено:  $\varphi_{A1} = (\pi + \nu)/4$ ;  $\varphi_{A2} = \nu/4 - \alpha_1\pi/2$ ;  $\varphi_{A3} = \nu/4 + \alpha_1\pi + 3\pi/4$ ;  $\varphi_{A4} = \nu/4 + \alpha_1\pi/2 + \pi/2$ ;  $\varphi_{s1} = \alpha_1\pi + 3\pi/4$ ;  $\varphi_{s2} = 3\alpha_1\pi/2$ ;  $\varphi_{s3} = \pi/4$ ;  $\varphi_{s4} = (\alpha_1 - 1)\pi/2$ . Верхние строки в (3.17.13) описывают поле альфвеновской и ММЗ-волн в области прозрачности ( $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ ), а нижние — в области непрозрачности ( $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$ ).

Линеаризуя в (3.17.5) коэффициенты  $\kappa_{0,1,2}$  вблизи  $l = l_0$ , можно представить ВКБ-решение для альфвеновских волн при ( $\text{Re } z \rightarrow 0$ ) в виде

$$H_N \sim z^{1/4 - \alpha_1/2} \exp(\pm 2i\sqrt{\alpha_0 z}).$$

Видно, что внутренняя асимптотика ВКБ-решений (3.17.6) сшивается с внешней асимптотикой первых слагаемых в (3.17.13). Таким образом, первые слагаемые в (3.17.13) соответствуют полю альфвеновской волны, а вторые — полю ММЗ.

В окрестности точек  $l = l_0$  происходит частичная линейная трансформация альфвеновских волн в ММЗ-волны. Таких точек в области токового слоя может быть несколько. Отметим, что линейная трансформация отличается от резонансного взаимодействия мод, как это имеет место в альфвеновском и магнитозвуковом резонансах. В токовом слое  $c_s \approx v_A$  и характерная пространственная структура альфвеновских и ММЗ-волн становится похожей, но не происходит заметного увеличения амплитуды колебаний.

Линейная трансформация может происходить даже при отсутствии точек трансформации. Как видно из рис. 3.70, коэффициент  $\kappa_2$  на магнитной оболочке  $L = 6$  нигде не проходит через нуль. Однако мелкомасштабная составляющая в рассматриваемых решениях, представленных на рис. 3.66 и 3.67, все-таки присутствует. Это происходит потому, что линейная трансформация происходит даже в том случае, когда коэффициент  $\kappa_2$  где-либо на силовой линии становится достаточно малым. Как видно из рис. 3.69, на магнитной оболочке  $L = 6$  это происходит в приэкваториальной области. Таким образом, можно полагать, что весь токовый слой является областью линейной трансформации рассматриваемых альфвеновских и ММЗ-волн.

Использовать изложенный здесь формализм для точного расчета волновых полей нельзя, так как в расчетной области невозможно уйти на реальную асимптотику рассматриваемых функций. Однако он дает возможность понять механизм зацепления альфвеновских и ММЗ-колебаний.

**3.17.3. Структура сцепленных МГД-мод поперек магнитных оболочек.** Определим пространственную структуру рассматриваемых колебаний поперек магнитных оболочек. Для этого необходимо найти решение полного уравнения (3.16.5) с заданными граничными условиями не только на ионосфере, но и на асимптотиках по поперечной координате  $x^1$ . Сформулируем эти граничные условия. Если на какой-либо магнитной оболочке  $x^1 = x_{PN}^1$  найдено решение уравнения (3.17.2) с определенными выше граничными условиями на ионосфере, то естественным является требование ограниченности амплитуды волнового поля рассматриваемых колебаний при удалении от этой оболочки. Можно показать, что в областях монотонного изменения функций  $\Omega_N(x^1)$  для собственных (без внешнего источника) монохроматических колебаний невозможно построить решения уравнения (3.16.5),

удовлетворяющие граничным условиям сразу на двух асимптотиках  $(x^1 - x_{PN}^1) \rightarrow \pm\infty$ . Решение, ограниченное на одной асимптотике, обязательно растёт на другой.

Однако, если имеется широкополосный источник альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$ , в спектре которого присутствует частота  $\omega = \text{Re}(\Omega_N)$ , то он возбуждает на магнитной оболочке  $x^1 = x_{PN}^1$  полоидальную стоячую альфвеновскую волну. В области токового слоя альфвеновская волна частично трансформируется в ММЗ-волну, в результате чего вдоль силовой линии формируется поле сцепленной МГД-моды. Магнитная оболочка  $x^1 = x_{PN}^1$  является поверхностью поворота, разделяющей области прозрачности и непрозрачности такой волны по координате  $x^1$ . Область прозрачности волны расположена между полоидальной ( $x^1 = x_{PN}^1$ ) и тороидальной ( $x^1 = x_{TN}^1$ ) резонансными поверхностями  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн (см. рис. 3.63). Расстояние между этими поверхностями на магнитных оболочках, расположенных в области токового слоя, достаточно велико, так, что возбуждаемая сцепленная мода, скорее всего, диссипирует в окрестности полоидальной резонансной поверхности (принимая во внимание также высокую диссипативность составляющей ее ММЗ-волны). Поэтому можно ограничиться исследованием ее структуры в окрестности полоидальной резонансной поверхности.

Возбуждаемая на полоидальной резонансной поверхности волна убегает в области прозрачности к тороидальной резонансной поверхности. Поверхность  $x^1 = x_{TN}^1$  является сингулярной поверхностью поворота, в окрестности которой волна полностью поглощается. В области прозрачности такая волна является бегущей поперек магнитных оболочек, оставаясь при этом стоячей волной вдоль магнитных силовых линий.

Построим решение, описывающее структуру (в общем случае неустойчивых) азимутально-мелкомасштабных сцепленных альфвеновских и ММЗ-волн в окрестности полоидальной резонансной поверхности. В главном порядке теории возмущений структура рассматриваемых колебаний вдоль силовых линий магнитного поля была определена с использованием идеальных граничных условий на ионосфере. Ее структура поперек магнитных оболочек описывается в следующем, первом, порядке теории возмущений. При этом в граничных условиях на ионосфере учтем ее конечную проводимость и наличие сторонних токов (см. (2.17.44)).

Будем искать решение (3.16.5) для  $N$ -й гармоники стоячих сцепленных мод в виде

$$\varphi_N = U_N(x^1)[H_N(x^1, x^3) + h_N(x^1, x^3)], \quad (3.17.14)$$

где функция  $H_N(x^1, x^3)$  описывает продольную структуру стоячей волны в нулевом приближении, а  $h_N(x^1, x^3)$  — поправка 1-го приближе-

ния. Для нее граничные условия на ионосфере имеют вид

$$h_N(x^1, l_{\pm}) = \mp i \frac{v_{p\pm}}{\omega} \left. \frac{\partial H_N}{\partial l} \right|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{\pm}}{V_{p\pm}} U_N^{-1}(x^1). \quad (3.17.15)$$

В главном порядке теории возмущений решалось уравнение

$$\widehat{L}_s(\Omega_N) \widehat{L}_P(\Omega_N) H_N + \widehat{L}_C(\Omega_N) H_N = 0.$$

Подставляя в (3.16.5) решение в виде (3.17.14), в первом порядке теории возмущений имеем

$$\nabla_1^2 U_N(x^1) \widehat{L}_T(\Omega_N) H_N - k_2^2 U_N(x^1) \frac{(\omega^2 - \Omega_N^2)}{pv_A^2} H_N - k_2^2 U_N(x^1) \widehat{L}_P(\Omega_N) h_N \approx 0.$$

Здесь учтено, что на большей части силовой линии  $c_s \ll v_A$  и  $|\widehat{L}_s(H_N + h_N)| \approx |\Omega_N^2(H_N + h_N)/c_s^2| \gg |\widehat{L}_C(\Omega_N)(H_N + h_N)|$ . Домножая это уравнение слева на  $H_N$  и интегрируя вдоль силовой линии между магнитосопряженными ионосферами, получаем

$$\beta_N \nabla_1^2 U_N + k_2^2 [\alpha_N (\omega^2 - \Omega_N^2) + \bar{\delta}_N] U_N = 0, \quad (3.17.16)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \int_{l_-}^{l_+} \frac{H_N^2}{pv_A^2} dl, \\ \beta_N &= - \int_{l_-}^{l_+} H_N \widehat{L}_T(\Omega_N) H_N dl, \\ \bar{\delta}_N &= \int_{l_-}^{l_+} H_N \widehat{L}_P(\Omega_N) h_N dl = - \frac{h_N}{p} \left. \frac{\partial H_N}{\partial l} \right|_{l_-}^{l_+}. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия (3.17.15) и выбирая нормировку собственных функций  $H_N$  так, что  $\alpha_N = 1$ , получаем уравнение

$$\nabla_1^2 U_N + \frac{k_y^2}{\omega^2} [(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_N^2] U_N = I_{\parallel N}, \quad (3.17.17)$$

описывающее структуру стоячих сцепленных мод по координате  $x^1$  вблизи полоидальной резонансной поверхности. Здесь  $k_y^2 = k_2^2 \omega^2 / \beta_N$ ,

$$\gamma_N = \frac{1}{2\omega^2} \left[ \frac{v_{p+}}{p_+} \left( \frac{\partial H_N}{\partial l} \right)_+^2 + \frac{v_{p-}}{p_-} \left( \frac{\partial H_N}{\partial l} \right)_-^2 \right]$$

— декремент затухания альфвеновских волн за счет конечной проводимости ионосферы вблизи полоидальной поверхности,

$$I_{\parallel N} = \frac{k_y^2}{\omega^2} \left[ \frac{J_{\parallel}^+}{p_+ V_{p+}} \left( \frac{\partial H_N}{\partial t} \right)_+ - \frac{J_{\parallel}^-}{p_- V_{p-}} \left( \frac{\partial H_N}{\partial t} \right)_- \right]$$

— функция, описывающая источник альфвеновских волн, связанный со сторонними токами в ионосфере.

Запишем  $\Omega_N = \bar{\Omega}_N + i\delta_N$ , где  $\bar{\Omega}_N \equiv \text{Re}(\Omega_N)$ ,  $\delta_N \equiv \text{Im}(\Omega_N)$ . Используем вблизи резонансной поверхности  $x^1 = x_{PN}^1$  следующее приближенное линейное разложение:

$$\bar{\Omega}_N^2 \approx \omega^2 \left( 1 - \frac{x^1 - x_{PN}^1}{a_N} \right),$$

где  $a_N = (\nabla_1 \ln \bar{\Omega}_N^2)^{-1}$  — характерный масштаб изменения  $\bar{\Omega}_N$  в точке  $x^1 = x_{PN}^1$ . Подставляя это разложение в уравнение (3.17.17) и переходя к безразмерной поперечной координате  $\xi = (x^1 - x_{PN}^1)/\Delta_N$  (где  $\Delta_N = a_N^{1/3}/k_y^{2/3}$ ), можно его представить в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_N + (\xi + i\varepsilon_N) U_N = \frac{a_N^{2/3}}{k_y^{4/3}} I_{\parallel N}, \quad (3.17.18)$$

где  $\varepsilon_N = 2(\gamma_N - \delta_N)(k_y a_N)^{2/3}/\omega$ . Будем считать, что масштаб локализации источника волн в ионосфере много больше их характерной поперечной длины волны. Тогда на масштабе локализации решения (3.17.18) правую часть здесь можно считать практически постоянной. Решением (3.17.18), удовлетворяющим заданным граничным условиям (ограниченность амплитуды колебаний на асимптотиках) является

$$U_N(x^1) = \frac{a_N^{2/3}}{k_y^{4/3}} I_{\parallel N} G(\xi + i\varepsilon_N), \quad (3.17.19)$$

где  $G(\zeta)$  — функция, являющаяся решением неоднородного уравнения Эйри (2.7.20), которая имеет интегральное представление (2.7.21) и асимптотики (2.7.22).

В области непрозрачности амплитуда решения (3.17.19) убывает по степенному закону, а в области прозрачности оно описывает убегающую от резонансной поверхности волну. Структура этого решения поперек магнитных оболочек представлена на рис. 3.71. Если инкремент баллонной неустойчивости рассматриваемых сцепленных мод больше, чем их декремент, связанный с диссипацией в ионосфере ( $\varepsilon_N > 0$ ), то при удалении от резонансной поверхности амплитуда колебаний возрастает (рис. 3.71, а). Конечно, это происходит только на тех магнитных оболочках, где выполняется условие существования неустойчивых мод (т. е. пока  $|k_2| > |k_1|$ ). По мере удаления от резонансной поверхности  $k_1$  увеличивается и где-то происходит переход структуры волны к состоянию с  $|k_2| < |k_1|$ . Дальше амплитуда волны убывает вплоть

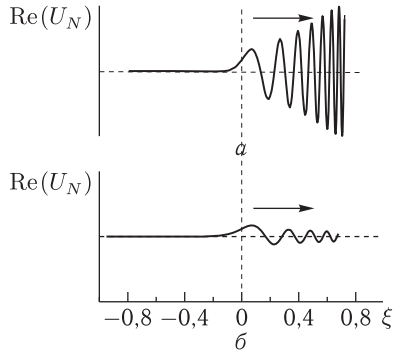


Рис. 3.71. Структура сцепленных альфвеновских и ММЗ-мод колебаний поперек магнитных оболочек вблизи резонансной поверхности для полоидальных альфвеновских волн: *a* — колебания с инкрементом неустойчивости, превышающим их декремент из-за затухания на ионосфере ( $\varepsilon_N > 0$ ); *b* — колебания с инкрементом неустойчивости, меньшим их декремента затухания ( $\varepsilon_N < 0$ )

до тороидальной резонансной поверхности. Если  $\varepsilon_N < 0$ , то убывание амплитуды колебаний происходит от самой резонансной поверхности (рис. 3.71, б).

Обсудим теперь полученные выше результаты с точки зрения энергетического принципа. В работе [312] было показано, что в неподвижной плазме, ограниченной идеально проводящими стенками, собственные колебания могут существовать либо в форме периодических нейтральных мод с  $\omega^2 > 0$  (если при возмущении плазмы изменение ее потенциальной энергии положительно,  $\Delta W > 0$ ), либо аperiodических неустойчивых мод с  $\omega^2 < 0$  (если  $\Delta W < 0$ ). При этом предполагается, что силовые линии магнитного поля замкнуты и не пересекают ограничивающую плазму стенку, а сама плазма рассматривается как бездиссипативная среда.

В работах [228, 313] эти результаты были обобщены на случай магнитного поля, подобного тому, что имеется в магнитосферах планет — когда магнитные силовые линии пересекают высокопроводящую ионосферу. Однако при этом также предполагалось наличие идеально проводящих стенок, ограничивающих рассматриваемый объем плазмы. Это, конечно, не соответствует реальной ситуации в магнитосфере, которая имеет свободную внешнюю границу, частично проницаемую для МГД-волн. Однако при рассмотрении баллонных мод, сильно локализованных поперек магнитных оболочек, наличие идеально проводящих стенок вдали от области локализации колебаний рассматривается как несущественное.

При решении задачи об устойчивости баллонных мод, как правило, ограничиваются решением задачи о структуре колебаний вдоль магнитных силовых линий. В результате решения соответствующей задачи с заданными граничными условиями на ионосфере определяется спектр собственных частот таких колебаний. Эти частоты рассматриваются как частоты собственных колебаний всей рассматриваемой плазменной системы. Частоты собственных альфвеновских и ММЗ-колебаний, полученные в локальном приближении в разд. 3.16 и в некоторых предшествующих работах, вполне укладываются в указанные выше пред-



ставления. В тоже время, комплексные частоты азимутально-мелкомасштабных стоячих волн, полученные в ВКБ-приближении в разд. 3.16 и в настоящем разделе, не соответствуют им.

Рассмотрим причины такого расхождения на примере азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн. Основной причиной, по видимому, является ошибочное отождествление гармоник стоячих вдоль силовых линий волн, удовлетворяющих граничным условиям на ионосфере, с собственными колебаниями всей плазменной системы. Дело в том, что в криволинейном магнитном поле у альфвеновских волн появляется поперечная дисперсия, связанная с кривизной магнитных силовых линий, которая приводит к расщеплению резонансных магнитных оболочек. При наличии внешнего источника раскачка альфвеновских колебаний с тороидальной ( $m = 0$ ) и полоидальной ( $m \rightarrow \infty$ ) поляризацией происходит на разных магнитных оболочках.

При изучении структуры азимутально-мелкомасштабных ( $m \gg 1$ ) альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек выяснилось, что невозможно построить решения для собственных мод таких колебаний, удовлетворяющих условию ограниченности их амплитуды сразу на двух асимптотиках вдали от резонансных поверхностей. Эта особенность азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн не связана с наличием или отсутствием токового слоя и конечного давления плазмы, а обусловлена только кривизной силовых линий магнитного поля. Такие решения удастся построить только для колебаний, возбуждаемых внешним источником. В качестве такого источника могут выступать сторонние токи в ионосфере.

Распределенный монохроматический источник возбуждает азимутально-мелкомасштабную альфвеновскую волну на полоидальной резонансной магнитной оболочке. Эта оболочка является поверхностью поворота для рассматриваемых волн по поперечной координате  $x^1$ . Если в ВКБ-приближении ввести поперечную компоненту волнового вектора  $k_1(x^1)$ , то на полоидальной магнитной оболочке  $k_1^2(x_{PN}^1) = 0$ . С одной стороны от полоидальной оболочки расположена область прозрачности для рассматриваемых волн (где  $k_1^2(x^1) > 0$ ), а с другой стороны — область непрозрачности (где  $k_1^2(x^1) < 0$ ). Благодаря поперечной дисперсии, связанной с кривизной магнитных силовых линий, у альфвеновских волн появляется поперечная компонента групповой скорости поперек магнитных оболочек. Волна в области прозрачности убегает от полоидальной поверхности и достигает тороидальной резонансной оболочки, где ее энергия полностью поглощается за счет какого-либо механизма диссипации. Это может быть как диссипация, связанная с джоулевым нагревом ионосферной плазмы на концах магнитных силовых линий, так и измельчение пространственной структуры колебаний за счет других эффектов, приводящих к поперечной дисперсии альфвеновских волн [203], что также в конечном итоге приводит к полной диссипации волны.

Таким образом, азимутально-мелкомасштабная альфвеновская волна имеет сложную пространственную структуру поперек магнитных оболочек и является сильно диссипативной модой колебаний. Поэтому ее нельзя рассматривать как собственную моду МГД-колебаний всей плазменной системы. Такие колебания могут существовать в рассматриваемой системе только как вынужденные колебания при наличии внешнего источника. Если баллонная неустойчивость, возникающая при наличии токового слоя, превосходит локальный декремент таких колебаний, связанный с диссипацией в ионосфере, то их амплитуда увеличивается при удалении от области генерации на полоидальной резонансной оболочке. Однако в окрестности тороидальной резонансной оболочки колебания полностью поглощаются.

Этот пример показывает, что при исследовании баллонной неустойчивости недостаточно найти решение только продольной задачи, описывающей структуру колебаний вдоль магнитных силовых линий и определить спектр их собственных частот. Необходимо также исследовать их полную пространственную структуру, включая структуру волнового поля поперек магнитных оболочек. Собственные моды колебаний продольной задачи не являются собственными модами всей плазменной системы.

## Глава 4

# МГД-КОЛЕБАНИЯ В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЯХ МАГНИТОСФЕРЫ

### 4.1. Особенности МГД-колебаний в неоднородных моделях магнитосферы разной размерности

В гл. 2 и 3 представлена теория МГД-колебаний в одно- и двумерно-неоднородных моделях магнитосферы. Однако реальная магнитосфера представляет собой трехмерно-неоднородную плазменную систему, все особенности которой выявляются только в трехмерно-неоднородных моделях среды. К сожалению, при использовании трехмерно-неоднородных моделей трудности аналитического исследования МГД-колебаний возрастают многократно. Поэтому чаще всего используются модели меньшей размерности, которые позволяют изучить отдельные особенности МГД-колебаний магнитосферы. Так, одномерно-неоднородные модели позволяют исследовать эффекты, связанные с неоднородностью магнитосферной плазмы в радиальном (поперек магнитных оболочек) направлении (см. [33–36]). Двумерно-неоднородные модели, например аксиально-симметричная модель, позволяют изучить МГД-колебания гораздо подробнее. Такие модели позволяют исследовать особенности колебаний, связанные как с радиальной, так и с продольной (вдоль направления магнитного поля) неоднородностью плазмы, а также эффекты кривизны магнитных силовых линий (см. [179, 181, 182, 197, 201, 225, 292]).

Хотя в трехмерно-неоднородных моделях не удалось пока изучить МГД-колебания так же подробно, как и в моделях с неоднородностью меньшей размерности, но и в этом направлении также получен ряд интересных результатов. Так, в работах [314–316] было показано, что альфвеновский резонанс (раскачка альфвеновской волны на резонансной поверхности монохроматической БМЗ-волной) присутствует не только в одномерно-неоднородной плазме, но и в двух- и трехмерно-неоднородной плазменной среде. Отметим также работу [317], где проведен расчет спектров стоячих альфвеновских волн в трехмерно-неоднородной модели магнитосферы Земли. Эти исследования выполнены для крупномасштабных в азимутальном направлении волн. В случае аксиально-симметричной модели это соответствует азимутальным гармоникам колебаний с  $m \sim 1$ . Именно такие колебания часто регистрируются в дневной части магнитосферы [195, 286–289, 318].

Однако достаточно часто на спутниках регистрируются и азимутально-мелкомасштабные МГД-колебания [319–322]. В аксиально-симметричных моделях эти колебания соответствуют гармоникам с азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$ . Поэтому важно понять закономерности распространения таких колебаний и в трехмерно-неоднородной плазме. В работе [28] рассчитывался спектр азимутально-мелкомасштабных сцепленных мод колебаний в трехмерно-неоднородной модели магнитосферы, однако там не рассматривалась структура колебаний поперек магнитных силовых линий.

В данной главе мы рассмотрим закономерности распространения азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн поперек магнитных силовых линий в трехмерно-неоднородной модели магнитосферы. В представленных ниже расчетах определены фазовые траектории<sup>1)</sup> распространения азимутально-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн в такой модели (см. [323]). Зная фазовые траектории поперечно-мелкомасштабных альфвеновских волн, можно определить, куда попадут и где на тороидальной резонансной поверхности будут поглощены колебания, сгенерированные на полоидальной резонансной поверхности.

Напомним, что в аксиально-симметричной магнитосфере такие альфвеновские колебания имеют следующие особенности. Монохроматический источник возбуждает в магнитосфере полоидальную стоячую альфвеновскую волну на полоидальной резонансной поверхности, где его частота совпадает с локальной частотой одной из гармоник стоячих волн. Эта волна убегает поперек магнитных оболочек к тороидальной резонансной поверхности, где полностью поглощается. Механизм диссипации при этом не важен. В реальной магнитосфере наибольшее поглощение энергии альфвеновских колебаний происходит на концах магнитных силовых линий, пересекающих проводящий слой ионосферы. Между двумя резонансными поверхностями лежит область прозрачности поперечно-мелкомасштабных альфвеновских волн, вне которой волны не распространяются. Представленное ниже исследование является обобщением расчета фазовых траекторий поперечно-мелкомасштабных альфвеновских волн, выполненного в разд. 3.7, на случай трехмерно-неоднородной модели магнитосферы.

**4.1.1. Система координат.** Для вывода волновых уравнений необходимо задать систему координат, которая будет использована в дальнейших расчетах. Естественным требованием к такой системе является то, что она должна быть удобной для описания альфвеновских волн в трехмерно-неоднородной магнитосфере. Такая система координат должна удовлетворять двум следующим условиям:

---

<sup>1)</sup> Фазовые траектории — линии, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением фазовой скорости распространения колебаний.

- 1) силовые линии магнитного поля  $\mathbf{V}_0$  являются координатными линиями;
- 2) если допускает конфигурация магнитного поля, то система координат должна быть ортогональной, т. е. координатные поверхности  $x^1 = c_1, x^2 = c_2$  и  $x^3 = c_3$  (где  $c_{1,2,3} = \text{const}$ ) образуют триортогональную систему <sup>1)</sup>.

Обоснования такого выбора следующие. Во-первых, в приближении идеальной МГД электрическое поле гидромагнитных колебаний имеет в такой системе координат только две поперечные компоненты ( $E_1$  и  $E_2$ ). Во-вторых, если фоновое магнитное поле образует замкнутые магнитные оболочки и не имеет шира (это означает отсутствие продольных токов, см. [324]), то недиагональные компоненты метрического тензора исчезают. Это существенно упрощает проведение аналитических расчетов.

Рассмотрим модель магнитосферы, которая позволяет ввести систему координат, удовлетворяющую этим условиям. Очевидно, что аксиально-симметричные модели магнитосферы, рассмотренные в гл. 3, позволяют это сделать. Определение такой системы координат основывается на известной из дифференциальной геометрии теореме Дюпена (Dupin) (см. [325]). Согласно этой теореме, линии по которым поверхности одного семейства триортогональной системы пересекаются с поверхностями двух других семейств являются линиями максимальной и минимальной кривизны этих поверхностей (см. Приложение П). Таким образом, координатные линии рассматриваемой системы координат являются линиями кривизны координатных поверхностей. В качестве координатных поверхностей  $x^3 = \text{const}$  выберем поверхности, везде ортогональные к магнитным силовым линиям (см. рис. П.1 в Приложении П).

Линии максимальной кривизны будут координатными линиями  $x^1$ , а линии минимальной кривизны — координатными линиями  $x^2$  <sup>2)</sup>. Как следует из теоремы Дюпена, силовые линии являются линиями кривизны поверхностей  $x^1 = \text{const}$  и  $x^2 = \text{const}$ , поскольку они являются линиями их пересечения. Построенная таким образом система координат удовлетворяет сформулированным выше условиям. Отметим, что линии кривизны определены однозначно, с точностью до преобразований  $x^1 = f(x^1), x^2 = f(x^2), x^3 = f(x^3)$ , которые не меняют форму координатных линий и координатных поверхностей, что является важным элементом последующего обсуждения. Одновременное задание координат  $x^1$  и  $x^2$  определяет силовую линию, а  $x^3$  определяет точку на ней. Элемент длины в этой системе координат  $ds$  задается

<sup>1)</sup> Три семейства изогнутых поверхностей образуют триортогональную систему, если любые две поверхности из разных семейств пересекаются под прямыми углами.

<sup>2)</sup> Координатные линии  $x^i$  — это линии, на которых две другие координаты, за исключением  $x^i$ , постоянны.

квадратичной формой

$$ds^2 = g_1 dx^1{}^2 + g_2 dx^2{}^2 + g_3 dx^3{}^2,$$

где  $g_i = g_{ii}(x^1, x^2, x^3)$  — диагональные компоненты метрического тензора (все остальные компоненты равны нулю из-за ортогональности). В частном случае аксиально-симметричной магнитосферы введенная выше координата  $x^1$  является радиальной координатой (например параметр Мак-Илвейна  $L$ ), а координата  $x^2$  — азимутальной (например, азимутальный угол  $\phi$ ).

В [326] построена система координат, которая удовлетворяет условию 1), сформулированному выше. В ней поверхности постоянного давления являются координатными поверхностями  $x^1 = \text{const}$ , а линии тока и силовые линии — координатными линиями  $x^2$  и  $x^3$ . Очевидно, что при  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}) = 0$  эта система удовлетворяет также условию 2) (поскольку  $\nabla P = [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$ ). Как следует из предшествующих рассуждений, поверхности  $x^i = c_i$  определены однозначно, откуда следует, что при  $\mathbf{J} \neq 0$  линии кривизны поверхностей  $x^3 = \text{const}$  должны совпадать с линиями постоянного давления и линиями тока.

**4.1.2. Основные уравнения.** Теперь перейдем непосредственно к теории поперечно-мелкомасштабных МГД-колебаний. Представим в приближении идеальной МГД выражение для электрического поля альфвеновских колебаний в виде

$$\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi, \quad (4.1.1)$$

где  $\nabla_\perp = (\nabla_1, \nabla_2)$ . Подставляя эти выражения в уравнение (2.7.1), где в приближении идеальной МГД компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\widehat{\varepsilon}_{11} = \widehat{\varepsilon}_{22} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad \widehat{\varepsilon}_{33} = -\infty$$

(в данном случае  $\widehat{\varepsilon}_{11} = \widehat{\varepsilon}_{xx}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{22} = \widehat{\varepsilon}_{yy}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{33} = \widehat{\varepsilon}_{zz}$ ), получим следующее уравнение для скалярного потенциала альфвеновских колебаний:

$$\nabla_1 \widehat{L}_T(\omega) \nabla_1 \varphi + \nabla_2 \widehat{L}_P(\omega) \nabla_2 \varphi = 0, \quad (4.1.2)$$

где

$$\widehat{L}_T(\omega) = \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2}$$

и

$$\widehat{L}_P(\omega) = \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{p} \frac{\omega^2}{v_A^2}$$

— операторы, описывающие продольную структуру тороидальных и полоидальных альфвеновских волн. В отличие от уравнений, полученных в разд. 3.1, 3.7, в (4.1.2) не предполагается аксиальная симметрия среды и, соответственно, оставлены производные по азимутальной

координате  $\nabla_2 = \partial/\partial x^2$ . Здесь  $l$  — физическая длина силовой линии, элемент которой  $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ , кроме того использовано обозначение

$$p = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}$$

— параметр, играющий ключевую роль в дальнейших расчетах. Будем также в главном порядке теории возмущений предполагать ионосферу идеально проводящей:

$$\varphi|_{x_{\pm}^3} = 0, \quad (4.1.3)$$

где  $x_{\pm}^3$  — координаты пересечения силовой линии с ионосферами северного и южного полушарий.

Особое значение в рассматриваемой теории имеет то, что величина параметра  $p$  варьируется вдоль магнитных силовых линий. Если бы это было не так, то операторы  $\widehat{L}_P$  и  $\widehat{L}_T$  были бы пропорциональны друг другу. Именно зависимость  $p$  от  $l$  (необходимое условие кривизны магнитных силовых линий, за исключением круговых) определяет распространение рассматриваемых колебаний поперек магнитных оболочек (см. подробнее в [282]). Поскольку  $p$  и  $v_A$  являются функциями координат, то операторы  $\widehat{L}_P$  и  $\widehat{L}_T$  также являются функциями  $x^1, x^2$  и  $l$ . Собственные функции этих операторов  $P_N$  и  $T_N$  удовлетворяют граничным условиям на ионосфере, аналогичным (4.1.3)

$$T_N, P_N |_{l_{\pm}} = 0,$$

где  $N$  — число полуволн, укладывающихся на отрезке силовой линии между магнитосопряженными ионосферами.

Кроме того, обозначим собственные значения частот тороидально-го и полоидально-го операторов как  $\Omega_{TN}(x^1, x^2)$  и  $\Omega_{PN}(x^1, x^2)$  соответственно. Поверхности, определяемые уравнениями

$$\omega = \Omega_{TN}(x^1, x^2), \quad \omega = \Omega_{PN}(x^1, x^2), \quad (4.1.4)$$

назовем соответственно тороидальной и полоидальной резонансными поверхностями. В магнитосфере Земли вблизи экватора расстояние между этими поверхностями варьируется от нескольких сотен до нескольких тысяч километров. Отметим, что если  $p$  не зависит от продольной координаты, то эти поверхности совпадают (в частности в магнитном поле с круговыми силовыми линиями).

Вернемся к уравнению (4.1.2). Представим возмущение, связанное с альфвеновской волной, в виде

$$\varphi = \exp [iQ(x^1, x^2, l)].$$

Поскольку для поперечно-мелкомасштабных волн выполняются соотношения

$$\left| \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|, \quad \left| \frac{1}{\sqrt{g_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right| \gg \left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|,$$

решение задачи (4.1.2), (4.1.3) можно искать в ВКБ-приближении по координатам  $x^1, x^2$ . В этом случае квазиклассическую фазу можно представить в виде следующего асимптотического разложения:

$$Q(x^1, x^2, l) = Q_0(x^1, x^2) + Q_1(x^1, x^2, l),$$

где слагаемое главного порядка  $Q_0$  является функцией только поперечных координат. Обозначая  $\exp(iQ_1) = H$ , можно представить возмущение как

$$\varphi = H(x^1, x^2, l) \exp[iQ_0(x^1, x^2)]. \quad (4.1.5)$$

Компоненты квазиклассического волнового вектора имеют вид

$$k_1(x^1, x^2) = \frac{\partial Q_0}{\partial x^1}, \quad k_2(x^1, x^2) = \frac{\partial Q_0}{\partial x^2}. \quad (4.1.6)$$

Введем величину

$$\kappa(x^1, x^2) = k_1/k_2.$$

Подставляя (4.1.6) в (4.1.2) и (4.1.3), легко получить уравнение

$$\left[ \kappa^2 \widehat{L}_T(\omega) + \widehat{L}_P(\omega) \right] H = 0 \quad (4.1.7)$$

и соответствующие граничные условия

$$H|_{l_{\pm}} = 0. \quad (4.1.8)$$

При заданных  $x^1, x^2$  и  $\omega$ , эти уравнения можно рассматривать как задачу на собственные значения значения параметра  $\kappa^2$ . Соответственно, зависимость собственных функций  $H = H_N(x^1, x^2, l, \omega)$  от  $l$  описывает продольную структуру стоячей альфвеновской волны. Обозначим далее собственные величины  $\kappa^2$  как  $\kappa_N^2(x^1, x^2, \omega)$ , т.е.  $\kappa = \pm \kappa_N$  (величину  $\kappa_N$  выберем положительной). Из (4.1.6) следует дифференциальное уравнение первого порядка для фазы  $Q_0$

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x^1} \mp \kappa_N \frac{\partial Q_0}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1.9)$$

Характеристики этого уравнения, т.е. линии в многообразии  $\{x^1, x^2\}$ , вдоль которых  $Q_0 = \text{const}$ , определяются обыкновенным дифференциальным уравнением (см. [327])

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \pm \kappa_N(x^1, x^2), \quad (4.1.10)$$

откуда следует соотношение

$$k_1 dx^1 + k_2 dx^2 = 0, \quad (4.1.11)$$

где дифференциалы  $dx^1$  и  $dx^2$  берутся вдоль характеристик.

Легко понять физический смысл линий постоянной фазы. Для этого найдем компоненты вектора поперечной групповой скорости рассматриваемых колебаний. Введем функции  $\omega_N = \omega_N(x^1, x^2, \kappa)$ , обратные



функциям  $\kappa_N = \kappa_N(x^1, x^2, \omega)$ . Дифференцируя их, получим по определению

$$v_N^1 = \frac{\partial}{\partial k_1} \omega_N(x^1, x^2, k_1/k_2) = \frac{1}{k_2} \frac{\partial \omega_N}{\partial \kappa},$$

$$v_N^2 = \frac{\partial}{\partial k_2} \omega_N(x^1, x^2, k_1/k_2) = -\frac{k_1}{k_2^2} \frac{\partial \omega_N}{\partial \kappa}.$$

Отсюда следует

$$v_N^1 k_1 + v_N^2 k_2 = 0, \quad (4.1.12)$$

т.е. характеристики — это линии, вдоль которых направлен вектор групповой скорости поперечно-мелкомасштабных альфвеновских волн. В разд. 3.7 показано, что поперечные контравариантные компоненты вектора Пойнтинга, проинтегрированные по объему силовой трубки единичного размера по координатам  $x^1$  и  $x^2$ , пропорциональны  $v^1$  и  $v^2$ . Это означает, что характеристики представляют собой лучи в многообразии  $\{x^1, x^2\}$ , вдоль которых переносится поток энергии рассматриваемых волн. Знаки плюс и минус в (4.1.9), (4.1.10) соответствуют волнам, переносящим энергию в противоположных направлениях по координате  $x^2$ , если их направление по координате  $x^1$  определено. Еще раз подчеркнем, что рассматриваемые волны являются стоячими вдоль силовых линий магнитного поля (по координате  $x^3$ ).

#### 4.1.3. Качественное исследование уравнения характеристик.

Чтобы решить уравнение характеристик (4.1.10) надо решить задачу (4.1.7), (4.1.8), но из-за сложной зависимости равновесных параметров от координат, лучше решать эту громоздкую задачу численно. Однако для того, чтобы дать качественное представление о поведении характеристик делать это необязательно. Сделаем следующее замечание. Задачу (4.1.7), (4.1.8) можно также рассматривать как задачу на собственные значения величины  $\omega$  при заданном  $\kappa$ . Рассмотрим два частных случая:  $\kappa \rightarrow 0$  и  $\kappa \rightarrow \infty$ . В последнем случае уравнение (4.1.7) имеет вид

$$\widehat{L}_P(\omega)H = 0.$$

Это уравнение (принимая граничное условие (4.1.8)) удовлетворяется при  $\omega = \Omega_{PN}(x^1, x^2)$ . Поскольку физическая постановка задачи такова, что рассматривается волна с заданной частотой, приходим к заключению, что  $\kappa$  равна нулю на пологой поверхности. Соответственно, при  $\kappa \rightarrow \infty$  уравнение (4.1.7) сводится к

$$\widehat{L}_T(\omega)H = 0.$$

Это равенство удовлетворяется на тороидальной поверхности.

Из (4.1.10) следует, что вблизи полоидальной поверхности характеристики направлены вдоль координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$ <sup>1)</sup>, а вблизи тороидальной — вдоль поверхности  $x^2 = \text{const}$ . Следует подчеркнуть еще раз, что положение координатных поверхностей, однозначно определяется геометрией магнитного поля. И наоборот, зная поведение характеристик вблизи резонансных поверхностей, можно определить основные особенности их поведения во всей области прозрачности.

В случае аксиально-симметричной магнитосферы тороидальная и полоидальная собственные частоты зависят только от координаты  $x^1$ , а резонансные поверхности совпадают с координатными линиями  $x^1 = \text{const}$ . Это приводит к достаточно простой картине потоков энергии: энергия волны генерируется на полоидальной резонансной поверхности, утекает от нее под прямым углом и течет дальше к тороидальной поверхности меняя свое направление так, что волновые потоки входят в тороидальную поверхность вдоль тангенциальной к ней линии. Распространение волн с  $m > 0$  при возрастании  $x^2$  ничем не отличается от распространения волн с  $m < 0$  при убывании  $x^2$ . Соответствующие линии постоянной фазы (характеристики) имеют одинаковую форму (см. рис. 3.28 и 4.1). Картина волнового поля не зависит от азимутальной координаты.

Однако, если аксиальная симметрия отсутствует, то картина становится более сложной. В этом случае полоидальная и тороидальная собственные частоты зависят не только от координаты  $x^1$ , но и от  $x^2$  и, таким образом, резонансные поверхности не совпадают с поверхностями  $x^1 = \text{const}$ . Магнитосфера при этом состоит из секторов, которые отличаются друг от друга знаками угла наклона  $\mu$  между тороидальной резонансной поверхностью и поверхностью  $x^1 = \text{const}$  (см. рис. 4.1, б).

Важность различий между секторами становится понятной если вспомнить, что вблизи тороидальной резонансной поверхности характеристики тангенциальны к линии  $x^1 = \text{const}$ . Рассмотрим распространение волны с  $\kappa > 0$  в секторе магнитосферы с  $\mu < 0$ . Как следует из (4.1.11), соответствующие характеристики проходят в этом секторе между резонансными поверхностями справа налево, так как  $dx^1 > 0$  сохраняется вдоль всей характеристики. Эти волны постепенно меняют свое направление и входят в тороидальную поверхность вдоль линии  $x^1 = \text{const}$  (см. характеристику 1 на рис. 4.1, б).

Для волн с  $\kappa < 0$  картина распространения совершенно иная. Эти волны должны распространяться слева направо, поскольку  $dx^2 > 0$  при  $dx^1 > 0$ . Простой анализ показывает, что, оставаясь в секторе  $\mu < 0$ , волны с  $\kappa < 0$  не могут достигнуть тороидальной поверхности,

<sup>1)</sup> Здесь и далее рассматриваются проекции координатных и резонансных поверхностей на двумерное многообразие поперечных координат  $\{x^1, x^2\}$ , например на экваториальную поверхность.

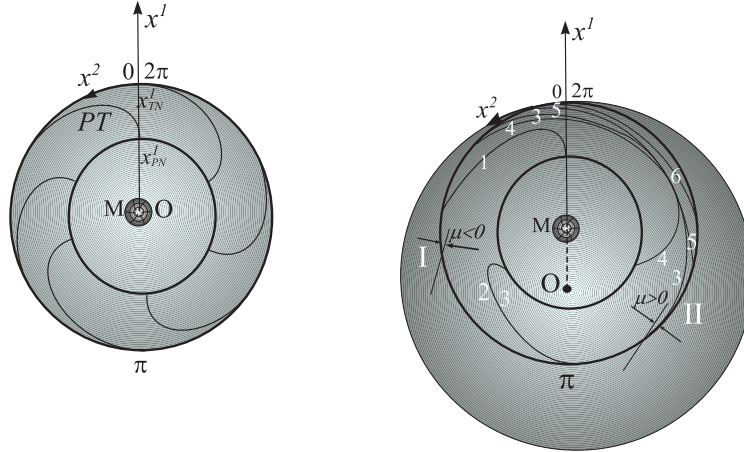


Рис. 4.1. *а* — характеристики (линии потока энергии) поперечно-мелкомасштабных альфвеновских волн при фиксированном знаке  $\kappa$  в аксиально-симметричной модели магнитосферы. Присутствуют только характеристики типа РТ. *б* — характеристики в трехмерно-неоднородной модели магнитосферы. Типы характеристик 1–6 описаны в тексте. Видна асимметрия поведения характеристик в секторах  $0^\circ$ – $180^\circ$  и  $180^\circ$ – $360^\circ$ . Присутствуют характеристики как типа РТ (с номерами 1–4), так и ТТ-типа (с номерами 5 и 6)

если не изменится знак  $\kappa$ . Это может произойти в двух случаях: 1) в некоторой точке  $\kappa$  пройдет через нуль или 2) на характеристике образуется излом. Однако, как было показано выше,  $\kappa$  на характеристике обращается в нуль только на полоидальной поверхности, положение которой определено однозначно уравнением (4.1.4). Таким образом, изменение направления распространения волны за счет изменения знака  $\kappa$  невозможно. Невозможен также и излом характеристик, поскольку такой разрыв соответствует сингулярности уравнения (4.1.10), чего фактически нет, поскольку его правая часть регулярна.

Таким образом, приходим к единственному возможному заключению: волна с  $\kappa < 0$  не может достигнуть тороидальной поверхности в секторе с  $\mu < 0$ . Соответственно, эта волна распространяется дальше в сектора с другим знаком  $\mu$ , где у нее появляется возможность войти в тороидальную поверхность вдоль координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$  без изменения в этом случае знака  $\kappa$ . С другой стороны, должны также существовать характеристики с  $\kappa > 0$ , которые входят в тороидальную поверхность в секторах с  $\mu < 0$ , поскольку они являются решениями уравнения (4.1.10). Для таких характеристик существует единственная возможность: выходя из тороидальной поверхности вдоль координатной линии  $x^1 = \text{const}$  в секторе с  $\mu > 0$ , они могут пройти дальше в сектор с  $\mu < 0$ , где войдут в тороидальную же поверхность тангенциально к координатной линии  $x^1 = \text{const}$  (см. характеристики 5 и 6 на рис. 4.1). Назовем характеристики, стартующие на полоидальной

поверхности и заканчивающиеся на тороидальной поверхности, характеристиками РТ-типа. Это единственный тип характеристик, возможный в аксиально симметричной модели магнитосферы. Характеристики, стартующие на тороидальной поверхности и на ней же заканчивающиеся, назовем характеристиками ТТ-типа. Они не имеют аналога в аксиально-симметричном случае. По отмеченным выше причинам, характеристики РТ- и ТТ-типов не соединяются и не пересекаются между собой.

Точно такая же интерпретация может быть дана и для секторов с положительным знаком угла  $\mu > 0$  между тороидальной и координатной поверхностью  $x^1 = \text{const}$ . Очевидно, что здесь волне с  $\kappa < 0$  соответствуют РТ характеристики, в то время как волне с  $\kappa > 0$  соответствует РТ-характеристики, стартующие в данном секторе, а заканчивающиеся в секторе с противоположным знаком  $\mu < 0$ , а также ТТ-характеристики.

Для иллюстрации выше сказанного на рис. 4.1, б представлен набор характеристик с  $\kappa > 0$ , рассчитанных для модели магнитосферы, линии координат которой представляют собой окружности, обе резонансные поверхности представляют собой концентрические окружности (вновь речь идет о многообразии  $\{x^2, x^2\}$ ) с общим центром  $M$ , но не совпадающим с началом координат  $O$ . Выбрана следующая модель  $\kappa$ :

$$\kappa_N = \left( \frac{r - r_P}{r_T - r} \right)^{1/2},$$

где  $r$  — координата, отсчитываемая от центра резонансных поверхностей, имеющая соответствующие значения  $r_T$  и  $r_P$  на тороидальной и полоидальной поверхностях. Такое поведение резонансных поверхностей соответствует уравнению (4.1.7), из которого, используя метод возмущений, можно получить

$$\kappa_N^2 \sim (\omega^2 - \Omega_{PN}^2)$$

вблизи полоидальной поверхности и

$$\kappa_N^2 \sim (\Omega_{TN}^2 - \omega^2)^{-1}$$

вблизи тороидальной.

На рис. 4.1, б показана причудливая картина характеристик, описанная выше. Обратим внимание на качественное отличие этой картины от той, что показана на левой панели этого рисунка, показывающей характеристики в аксиально-симметричной магнитосфере. На правом рисунке примеры линий постоянной фазы пронумерованы в порядке возрастания координаты  $x^2$  (обозначена на рисунке как угол  $\phi$ ). Характеристика 1, начинающаяся при  $\phi = 0$ , лежит полностью в секторе  $\mu < 0$  (сектор I) и относится к типу РТ. Характеристика 2 (типа РТ) также стартует в секторе I и заканчивается на тороидальной поверхности на границе сектора I, где  $\phi = \pi$ . Все характеристики, расположенные между характеристиками 1 и 2, относятся

к типу РТ. Характеристика 3 (типа РТ) стартует на полоидальной поверхности сразу за характеристикой 2. Она не заканчивается в секторе II (где  $\mu > 0$ ), а проходит через весь этот сектор и заканчивается в секторе I. Все последующие характеристики, которые стартуют на полоидальной поверхности между характеристиками 3 и 1, заканчиваются в секторе I и относятся к типу РТ. Характеристика 3 является сепаратрисой, разделяющей характеристики РТ и ТТ типов. Отметим, что хотя в некоторой области на правой панели характеристики 4 и 5 визуально сливаются с сепаратрисой, фактически они расположены по разные от нее стороны. Характеристика 6 (типа ТТ) проходит вдали от сепаратрисы. Конечно, в реальной магнитосфере число секторов с разными знаками  $\mu$  может быть больше двух и они могут иметь разные формы. Однако рассмотренный выше пример полностью иллюстрирует основные особенности поведения характеристик.

## Заключение

Суммируем кратко основные результаты, представленные в монографии. В неоднородной магнитосферной плазме различные ветви МГД-колебаний взаимодействуют между собой, порождая сложную картину волновых полей. В последние годы с запуском многоспутниковых миссий появилась возможность подробного исследования МГД-колебаний, генерируемых и распространяющихся в магнитосфере Земли (см. [328, 329]). Это, в свою очередь, требует более глубокого их теоретического изучения. Детальное сравнение представленной здесь теории с данными наблюдений ультранизкочастотных (УНЧ) волн в магнитосфере выходит за рамки настоящей монографии и должно быть предметом специального исследования. Однако мы можем определить, какие виды МГД-колебаний типичны для различных частей магнитосферы и каковы их характерные особенности.

На начальных этапах теоретических исследований магнитосферных МГД-колебаний было выдвинуто предположение о том, что вся магнитосферная полость представляет собой единый гигантский МГД-резонатор. Наиболее очевидны резонаторные свойства магнитосферы для альфвеновских волн. Эти волны распространяются вдоль магнитных силовых линий, дважды пересекающих высокопроводящую ионосферу (в северном и южном полушариях), которая является для них поверхностью отражения. Поэтому, согласно теоретическим представлениям, на замкнутых магнитных силовых линиях, ограниченных точками их пересечения с ионосферой, альфвеновские колебания формируют стоячие волны [18, 173, 330].

Это касается самых низкочастотных альфвеновских колебаний, длина волны которых сопоставима с размерами самой магнитосферы. Высокочастотные альфвеновские волны могут распространяться вдоль силовых линий геомагнитного поля в виде волновых пакетов (что не исключает их формирования из большого числа гармоник стоячих волн). Геомагнитные пульсации в частотном диапазоне Pc1 часто регистрируются в магнитосопряженных областях Земли в виде серий таких волновых пакетов. Максимум амплитуды этих колебаний расположен вблизи плазмопаузы. За необычную форму их записи на магнитограммах (напоминающую нитку жемчуга) они получили название «жемчужин» [331].

Однако каковы механизмы генерации альфвеновских волн в магнитосфере? Для высокочастотных колебаний Pc1 в качестве такого механизма рассматривается циклотронная неустойчивость высокоэнергичных протонов радиационного пояса в приэкваториальной области

магнитосферы (см. [332]). Особенностью такой неустойчивости является то, что она усиливает только квазипродольные альфвеновские волны (у которых  $|k_{\parallel}| \gg \sqrt{u} |k_{\perp}|$ , где  $u = \omega/\omega_i \ll 1$ ). Однако, как было показано во Введении, в поперечно-неоднородной плазме (что особенно важно вблизи плазмопаузы) поперечный волновой вектор альфвеновских волн быстро нарастает, и они должны быстро выходить из режима квазипродольного распространения. Единственная возможность эффективного усиления таких волн — удержать их в режиме квазипродольного распространения на протяжении многих периодов баунс-колебаний волновых пакетов между ионосферами. Это возможно, только если происходит захват альфвеновских волн в волновод, обусловленный их поперечной дисперсией, который препятствует нарастанию поперечной компоненты волнового вектора (см. разд. 2.9, 2.12). И такой волновод действительно образуется на внешней кромке плазмопаузы, а также в магнитосферных плазменных волокнах, отслаивающихся от вечернего выступа плазмосферы [69, 87].

Для низкочастотных альфвеновских волн в качестве механизма генерации рассматривается их резонансное взаимодействие (field line resonance — FLR) с быстрыми магнитозвуковыми волнами [33–36]. Отметим, что речь идет о крупномасштабных в азимутальном направлении волнах (в аксиально-симметричных моделях это соответствует азимутальным гармоникам с  $m \sim 1$ ). Для этого взаимодействия также важна поперечная неоднородность магнитосферной плазмы. Монохроматическая БМЗ-волна, распространяясь в поперечно-неоднородной плазме, раскачивает альфвеновскую волну на той магнитной оболочке, где ее частота совпадает с локальной частотой альфвеновских колебаний.

Представления о стоячих альфвеновских волнах и альфвеновском резонансе были первоначально получены в одномерно-неоднородных моделях магнитосферы. Достаточно долгое время альфвеновские волны, рассматриваемые в рамках этих моделей, воспринимались как совершенно различные типы магнитосферных колебаний. И только когда при теоретическом исследовании МГД-колебаний магнитосферы стали использовать двумерно-неоднородные модели, выяснилось, что теории, развитые в рамках одномерно-неоднородных моделей, описывают одно и то же явление — альфвеновский резонанс в неоднородной магнитосферной плазме. При этом структура резонансных альфвеновских колебаний вдоль силовых линий магнитного поля представляет собой стоячие волны, а их структура поперек магнитных оболочек описывается уравнениями, аналогичными тем, которые описывают резонансные альфвеновские колебания в поперечно-неоднородной плазме [56, 180–182].

Успешное применение одномерно-неоднородных моделей для описания резонансных колебаний в двумерно-неоднородной плазме объясняется сильным различием характерных масштабов этих колебаний вдоль магнитных силовых линий и поперек магнитных оболочек. Благодаря такому различию, аналитическое выражение, описывающее структуру

МГД-колебаний, факторизуется. При этом уравнение в частных производных для альфвеновских колебаний в двумерно-неоднородной плазме распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения, описывающих их структуру вдоль магнитного поля и поперек магнитных оболочек (см. разд. 3.1). Применение результатов теории альфвеновского резонанса позволило объяснить распределение средней амплитуды и спектра дневных геомагнитных пульсаций  $Pc3$ , постоянно наблюдающихся в дневном секторе магнитосферы. В частности, удалось объяснить гармоническую структуру и зависимость частоты регистрируемых колебаний от расположения магнитной оболочки — чем ближе к магнитопаузе, тем ниже частота каждой из гармоник.

Аналогична ситуация и для ММЗ-волн. Они также могут раскачиваться на резонансных магнитных оболочках БМЗ-колебаниями, распространяющимися в магнитосфере [50, 243], или генерироваться токами в ионосфере при прохождении по ней солнечного терминатора [27, 247]. Основное отличие резонансных ММЗ-колебаний от альфвеновских — их сильная диссипативность. ММЗ-волны затухают из-за взаимодействия с ионами фоновой плазмы (см. гл. 1).

Эта особенность ММЗ-волн лежит в основе одного из механизмов переноса импульса из солнечного ветра в магнитосферу. БМЗ-волны, проникающие из солнечного ветра в магнитосферу, возбуждают в области, прилегающей к магнитопаузе, резонансные ММЗ-волны. Из-за высокой диссипативности ММЗ-волн происходит эффективная передача их энергии и импульса ионам фоновой плазмы на резонансных магнитных оболочках. В результате этого в областях магнитосферы, прилегающих к магнитопаузе, могут сформироваться ячейки с обратной конвекцией плазмы [59]. Это фактически и наблюдается в прилегающих к магнитопаузе областях магнитосферы (и магнитосопреженных с ними областях высокоширотной ионосферы) в периоды, когда межпланетное магнитное поле имеет «северную» компоненту и отсутствует магнитное пересоединение на магнитопаузе [102].

Возникает вопрос об источниках и структуре БМЗ-колебаний в магнитосфере. В качестве одного из таких источников рассматривается неустойчивость сдвигового течения солнечного ветра (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) на магнитопаузе [94, 124]. В результате этой неустойчивости на магнитопаузе раскачивается поверхностная БМЗ-волна. Поле этой волны, убывая по амплитуде, проникает внутрь магнитосферы, где может раскачивать альфвеновские волны на резонансных магнитных оболочках. Однако до последнего времени не было прямых наблюдений магнитосферных МГД-колебаний, которые можно было бы отождествить с такими неустойчивыми модами. Только недавно на спутниках THEMIS и Double Star были зарегистрированы колебания, которые можно рассматривать как поверхностные БМЗ-волны, раскачиваемые неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца [333]. Амплитуда этих колебаний убывает при удалении от магнитопаузы и увеличивается в направлении их распространения в геомагнитный хвост.



Аналогичные наблюдения представлены и в работе [263], где скорость распространения неустойчивых колебаний ( $\sim 200$  км/с) совпала с ожидаемой скоростью распространения поверхностной БМЗ-волны. Кроме того, на одном из спутников (THEMIS 5), находившемся внутри магнитосферы, был зарегистрирован узко локализованный скачок амплитуды колебаний, который был идентифицирован как резонансная альфвеновская волна, раскачиваемая механизмом FLR. Это можно рассматривать как первое прямое свидетельство существования магнитосферного альфвеновского резонанса (FLR), связанного с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе.

В большинстве теоретических работ, посвященных исследованиям неустойчивостей сдвигового течения на магнитопаузе, используются модели с тангенциальным разрывом параметров среды. В таких моделях изменение параметров происходит скачком при переходе из одного однородного полупространства с неподвижной плазмой в другое, в котором плазма движется. Однако плазма в магнитосфере сильно неоднородна. В связи с этим появились работы с моделями среды, в которых параметры плазмы в полупространстве, моделирующем магнитосферу, меняются в поперечном к сдвиговому слою направлении. Проще всего такая неоднородность моделируется установкой, отражающей стенки на некотором расстоянии от сдвигового слоя [127, 129, 334].

Одной из особенностей таких моделей является возникновение волновода для быстрых магнитозвуковых волн, распространяющихся между отражающей стенкой и магнитопаузой [335]. Поскольку магнитопауза является только частично отражающей границей, в таком волноводе основная гармоника является четвертьволновой, т. е. ее частота ниже, чем в волноводе с двумя идеально отражающими стенками. Ее частота ( $\sim 1$  мГц) попадает в область спектра «магических частот» (устойчивых колебаний с дискретным спектром в диапазоне  $\sim 1$  мГц, наблюдаемых в магнитосфере Земли). Для БМЗ-волн имеется нижний порог по величине сдвига скорости движения плазмы на магнитопаузе, при превышении которого развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Однако при определенных условиях этот порог исчезает (см. разд. 2.15, 2.16, а также [336]).

Более сложный вариант — это модели с монотонным изменением параметров среды в полупространстве, описывающем магнитосферу [337]. Такие модели гораздо лучше описывают распределение параметров плазмы в реальной магнитосфере. В этом случае роль отражающей стенки для БМЗ-волн играют поверхности отражения, разделяющие их области прозрачности и непрозрачности внутри магнитосферы. В области непрозрачности, расположенной за точкой поворота, появляется резонансная поверхность для альфвеновской волны, где происходит частичное поглощение энергии БМЗ-волны, распространяющейся в магнитосферном волноводе [338].

Такой волновод может возбуждаться БМЗ-волной, падающей на магнитопаузу из солнечного ветра. Коэффициент отражения волны в этом

случае имеет ярко выраженные пики на частотах, соответствующих частотам собственных мод магнитосферного волновода [339]. Максимальные значения коэффициента отражения могут превышать единицу. В этом случае отраженная от сдвигового слоя волна имеет большую амплитуду, чем падающая. Увеличение амплитуды происходит за счет энергии, передаваемой волне сдвиговым течением плазмы, а о самой волне говорят как о волне с отрицательной энергией [140, 335, 337, 340].

Волновод ограничивает распространение БМЗ-волн в направлении поперек магнитных оболочек и не препятствует их распространению в других направлениях. Однако поскольку плазма в магнитосфере неоднородна во всех направлениях, то при определенных условиях область прозрачности БМЗ-волн оказывается ограниченной со всех сторон поверхностями отражения. При этом образуется БМЗ-резонатор с дискретным спектром собственных частот. В ранних работах всю магнитосферную полость рассматривали как глобальный БМЗ-резонатор, ограниченный резкой границей — магнитопаузой (см. [196, 250]). Собственные колебания такого резонатора были названы «глобальными модами» магнитосферы. Были рассчитаны характерные частоты таких колебаний в дипольной модели магнитосферы [184, 192]. Частота основного тона колебаний в таком резонаторе равна приблизительно 10 мГц. При этом оказалось, что область, занимаемая таким резонатором, охватывает не всю магнитосферную полость, а только ее приэкваториальную часть, прилегающую к магнитопаузе. Условия его существования реализуются только в дневной части магнитосферы, поэтому сложно рассматривать его собственные моды как глобальные колебания магнитосферы. Существование еще одного БМЗ-резонатора, границей которого служит плазмопауза, было впервые обосновано в работах [193, 194]. Частоты его собственных колебаний — от 30 мГц и выше.

Поиски магнитосферных колебаний с дискретным спектром частот в указанных выше диапазонах велись на протяжении достаточно длительного периода времени. К сожалению, получить надежные экспериментальные доказательства существования таких колебаний не удалось. Однако были обнаружены очень похожие на них, но более низкочастотные колебания магнитосферы с дискретным спектром, зарегистрированные впервые на наземных сетях ВЧ-радаров и магнетометров [251, 252]. Из-за повторяемости спектра частот (0,8, 1,3, 1,9, 2,6 ... мГц) в различных сеансах наблюдений и их стабильности в каждом из этих наблюдений они получили название «магических частот». Такие колебания регистрируются, как правило, в полуденно-утреннем секторе магнитосферы на широтах от 60° до 80°. Колебания с аналогичными спектральными характеристиками были недавно обнаружены на спутниках в окрестности дневной магнитопаузы [341, 342] и даже в области солнечного ветра [343].

Имеется несколько теоретических концепций, предложенных для объяснения природы этих колебаний. В [252] выдвинуто предположение, что наблюдаемые колебания с дискретным спектром частот являются собственными модами БМЗ-волновода в долях геомагнитного хвоста. Есть, однако, некоторые трудности в рамках такого подхода. Основной из них является то, что регистрируемые колебания имеют поляризацию, характерную для стоячих волн, а не для волн, распространяющихся в волноводе [71].

В [264, 343] предлагается механизм прямого проникновения колебаний со спектром «магических частот» из солнечного ветра в магнитосферу. В [341, 342] эти колебания рассматриваются как собственные моды альфвеновских колебаний, возбуждаемых на магнитопаузе импульсами давления солнечного ветра, связанными с его неоднородностями. Отметим трудности, присущие этим двум концепциям. Поскольку дневная магнитосфера для рассматриваемых колебаний является областью непрозрачности, амплитуда таких колебаний экспоненциально убывает от магнитопаузы внутрь магнитосферы (см. разд. 3.5, а также [191]). Поэтому трудно объяснить наличие таких колебаний в полуночно-утреннем секторе внутренней магнитосферы, где они были первоначально обнаружены.

В работах [110, 143] (см. также разд. 3.6.3 настоящей монографии) была предложена модель магнитосферного резонатора, позволяющая объяснить большинство особенностей регистрируемых колебаний со спектром «магических частот». Этот резонатор для БМЗ-волн формируется в ближней к Земле части плазменного слоя, где имеется глобальный минимум в распределении альфвеновской скорости в магнитосфере. Рассчитанный спектр частот такого резонатора достаточно хорошо совпадает со спектром наблюдаемых «магических частот», которые, особо отметим, не эквидистантны. Область локализации резонатора в проекции (вдоль силовых линий геомагнитного поля) на ионосферу совпадает с областью, где регистрируются колебания (полуночно-утренний сектор магнитосферы на широтах от  $60^\circ$  до  $80^\circ$ ). Формирование резонатора происходит только в условиях слабой возмущенности магнитосферы, когда параметры плазменного слоя приблизительно одинаковы. Этим объясняется стабильность спектра наблюдаемых частот.

Исходя из всего выше сказанного, можно сделать следующий вывод. В магнитосфере Земли формируются несколько изолированных друг от друга резонаторов для БМЗ-волн. Самый крупномасштабный и низкочастотный из них находится в ближней к Земле части плазменного слоя. Но даже он занимает только относительно небольшую часть магнитосферы. Поэтому от представления о глобальных модах колебаний магнитосферной полости лучше отказаться совсем и не использовать его в дальнейшем.

Наиболее сложную структуру из МГД-колебаний магнитосферы имеют азимутально-мелкомасштабные альфвеновские волны (в акси-

ально-симметричных моделях магнитосферы — это волны с большими азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$ ). В направлении вдоль магнитного поля на замкнутых силовых линиях эти колебания также образуют стоячие волны между магнитосопряженными ионосферами северного и южного полушарий. Структура монохроматической альфвеновской волны с  $m \gg 1$  существенно зависит от профиля альфвеновской скорости поперек магнитных оболочек. В области с монотонным распределением альфвеновской скорости структура альфвеновской волны следующая. Монохроматический источник (например, сторонние токи в ионосфере) генерирует стоячую альфвеновскую волну с полоидальной поляризацией на полоидальной резонансной поверхности. Эта волна убегает от полоидальной поверхности поперек магнитных оболочек к другой резонансной поверхности, — тороидальной, где полностью поглощается из-за диссипации в проводящем слое ионосферы. В процессе такого перемещения поляризация волны меняется от полоидальной до тороидальной (см. разд. 3.7, а также [201]). Волны с такой пространственно-временной структурой были недавно зарегистрированы при пересечении плазмопаузы спутником Van Allen Probes [344].

В области, где профиль альфвеновской скорости имеет минимум, образуется резонатор для полоидальных стоячих альфвеновских волн [202]. Только альфвеновские волны, захваченные в такой резонатор, способны сохранять свою полоидальную поляризацию на протяжении многих периодов колебаний. Немонотонное распределение плазменных параметров типично для внутренней кромки плазмопаузы. Именно здесь на спутниках чаще всего и регистрируются полоидальные альфвеновские волны (см. [345]).

Ультранизкочастотные (УНЧ) колебания в геомагнитном хвосте имеют свои особенности. Наличие здесь токового и плазменного слоев накладывает свой отпечаток на структуру и спектры альфвеновских волн (см. [13, 346, 347]). Во время геомагнитных суббурь происходит разрыв токового слоя [348], что порождает импульс БМЗ-волн, который на резонансных магнитных оболочках трансформируется в альфвеновские волны [349]. Генерируемая в таком процессе альфвеновская волна выглядит как импульс продольных токов, который регистрируется в магнитосфере и на Земле в виде суббуревых геомагнитных пульсаций  $Pi2$  [350, 351]. Альфвеновские волны, сгенерированные в этом и других аналогичных магнитосферных процессах, могут приводить к ускорению заряженных частиц в авроральную ионосферу и возникновению там структурированных полярных сияний [45, 352].

ММЗ-волны, как и альфвеновские, распространяются почти вдоль силовых линий геомагнитного поля. На тех магнитных оболочках, которые пересекают токовый слой геомагнитного хвоста, альфвеновские и ММЗ-волны могут взаимодействовать между собой, формируя особый тип колебаний — сцепленные моды (см. [224, 225, 227], а также разд. 3.17 настоящей монографии). При наличии кривизны магнитных силовых линий и направленного наружу градиента давления фоновой

плазмы такие сцепленные колебания могут становиться неустойчивыми [226, 228, 229]. Такая (баллонная) неустойчивость развивается при достаточно больших кривизне магнитных силовых линий и градиенте давления плазмы, которые достигаются в токовом слое геомагнитного хвоста в условиях, близких к суббуревым (см. разд. 3.16, 3.17). Предполагается, что баллонная неустойчивость может приводить к процессу пересоединения магнитных силовых линий и разрыву токового слоя геомагнитного хвоста на начальной стадии магнитосферных суббурь [353–356].

До недавнего времени исследования сцепленных мод были, в основном, предметом теоретического изучения, поскольку их достаточно трудно выделить в наблюдениях среди других мод МГД-колебаний. С началом работы многоспутниковых систем, таких как THEMIS, Cluster, Double Star, появилась возможность анализа колебаний, регистрируемых в различных близко расположенных точках пространства. Это позволило выделять разные моды МГД-колебаний и анализировать их связи между собой.

В [355] подробно проанализированы низкочастотные МГД-колебания, наблюдаемые вблизи экватора на спутнике Geotail, сразу после суббурового взрыва. Показано, что в наблюдениях достаточно хорошо выделяется БМЗ-мода колебаний, однако трудно разделить альфвеновские и ММЗ-волны. В [357] на спутниках Cluster наблюдалась ММЗ-волна с периодом 30 с, связанная с периодическими пересоединениями в геомагнитном хвосте. Эти наблюдения можно рассматривать как первые свидетельства существования неустойчивых сцепленных МГД-мод.

В [358] вблизи токового слоя (удаление от Земли  $\sim 11R_E$ ) на спутниках THEMIS впервые обнаружены одновременные альфвеновские и ММЗ-колебания в одном диапазоне частот (с периодом  $\sim 100$  с). При этом не наблюдалось существенного градиента давления плазмы, поэтому вряд ли рассматриваемые колебания были неустойчивыми. Явления, связанные с подобными колебаниями, наблюдаются и на Земле. Часто они проявляются в виде структурированных полярных сияний [359]. В [360] на изображениях, полученных камерой всего неба, расположенной в Dawson City ( $65,7^\circ$  ILAT) на подготовительной стадии суббури наблюдались волнообразные структуры с азимутальными волновыми номерами  $m \approx 76$  и периодами  $T \sim 120$  с, характерными для сцепленных МГД-мод.

Для того чтобы выделить в наблюдениях сцепленные альфвеновские и ММЗ-колебания, можно использовать особенности их пространственной структуры. В работах [236, 361] была исследована полная пространственная структура таких колебаний на магнитных оболочках с вытянутыми в хвост замкнутыми магнитными силовыми линиями. В качестве источника колебаний рассматривались сторонние токи в ионосфере. Благодаря высокой проводимости ионосферы эти колебания представляют собой стоячие вдоль геомагнитного поля волны. При этом на вытянутых в хвост магнитных силовых линиях в точках их

перегиба должны появляться резкие узко локализованные пики в распределении амплитуды колебаний. На каждой такой силовой линии имеется четыре точки перегиба: две — вблизи токового слоя, по разные от него стороны, а две другие — в области перехода от дипольного магнитного поля к полю с вытянутыми током хвоста магнитными силовыми линиями.

В направлении поперек магнитных оболочек эти сцепленные моды могут распространяться в области прозрачности, расположенной между полоидальной и тороидальной резонансными поверхностями для альфвеновских волн. Вне этой области расположены области непрозрачности, внутрь которых амплитуда колебаний убывает. В области прозрачности сцепленные моды, как и азимутально-мелкомасштабные альфвеновские волны, бегут от полоидальной резонансной поверхности к тороидальной. Вблизи тороидальной поверхности происходит их полное поглощение, связанное с конечной проводимостью ионосферы.

Реальная магнитосфера представляет собой трехмерно-неоднородную среду. В такой среде имеются свои особенности распространения альфвеновских волн. В трехмерно-неоднородной магнитосфере имеются сектора, в которых поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны с разными знаками азимутального волнового числа распространяются по-разному. Распространение волн в секторах с одинаковыми знаками поперечной фазовой скорости и угла наклона градиента альфвеновской скорости к магнитным оболочкам качественно подобно их распространению в аксиально-симметричной магнитосфере. Волны генерируются на полоидальной поверхности, бегут к тороидальной поверхности, где и поглощаются в том же секторе магнитосферы. Что касается волн с противоположным знаком фазовой скорости, то они проходят значительно больший путь до своего поглощения вблизи тороидальной поверхности в секторе, где угол ее наклона к координатной поверхности, определяемой геометрией магнитного поля, также имеет обратный знак. В трехмерно-неоднородной магнитосфере, в отличие от аксиально-симметричной, поперечно-мелкомасштабные альфвеновские волны могут генерироваться не только на полоидальной, но и на тороидальной резонансной поверхности.

Отметим основные достижения и оставшиеся нерешенными проблемы аналитической теории МГД-колебаний магнитосферы. В одномерно-неоднородных моделях, как представляется, исследованы все основные особенности МГД-колебаний. Основным достижением этих моделей является то, что в них достаточно просто исследуется резонансное взаимодействие и трансформация различных мод МГД-колебаний однородной плазмы. Изучены пространственная структура резонансных альфвеновских и ММЗ-волн. Пока только в таких моделях удается проводить аналитическое исследование неустойчивости сдвигового течения плазмы солнечного ветра на магнитопаузе. Развитие теории в рамках простых одномерно-неоднородных моделей, по-видимому, близко к завершению.

К основным достижениям теории МГД-колебаний в двумерно-неоднородных моделях магнитосферы можно отнести синтез исследований пространственной структуры гидрируемых мод МГД-колебаний (альфвеновских и ММЗ-волн) вдоль силовых линий магнитного поля и поперек магнитных оболочек, полученных ранее в рамках простых одномерно-неоднородных моделей. В рамках двумерно-неоднородных, аксиально-симметричных моделей удалось построить подробную картину БМЗ-резонаторов в магнитосфере Земли и провести исследование их собственных колебаний. Оказалось, что магнитосфера не является глобальным МГД-резонатором, а состоит из нескольких крупномасштабных резонаторов для БМЗ-волн.

Только в двумерно-неоднородных моделях геомагнитного хвоста появляется сцепление альфвеновских и ММЗ-колебаний, которые при определенных условиях становятся неустойчивыми. Эти неустойчивые моды МГД-колебаний могут играть существенную роль в механизмах развития магнитосферной суббури. Основным пробелом аналитических исследований в рамках аксиально-симметричных моделей, по нашему мнению, является отсутствие теории неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе. Эта проблема вполне назрела и ждет своего решения. Да и во всех других направлениях исследований возможны существенные продвижения.

Наконец, практически белым пятном остается область исследований МГД-колебаний в трехмерно-неоднородных моделях магнитосферы. Все основные достижения в этой области в настоящее время связаны с численным моделированием колебаний в рамках таких моделей. Но, как отмечалось выше, численное моделирование не может заменить аналитических исследований, дающих понимание полной картины волновых полей в магнитосфере. Только аналитическое исследование позволяет выявить все связи различных мод колебаний в неоднородной плазме. С этой точки зрения теория только приоткрыла дверь в обширную область исследований МГД-колебаний трехмерно-неоднородной плазмы. Основные теоретические достижения здесь еще впереди.

Приложение А

**ПОПЕРЕЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ МГД-ВОЛН  
В ХОЛОДНОЙ И ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ**

Решение дисперсионного уравнения (1.0.19) можно представить в виде

$$q^2 = \frac{1}{2\nu} \left[ (1 + \nu)(\alpha - 1) \pm \sqrt{(1 - \nu)^2(\alpha - 1)^2 + 4u^2\nu\alpha} \right].$$

Оно описывает две ветки МГД-колебаний, альфвеновские и БМЗ-волны, общее представление о поведении которых дает рис. А.1.

Точки  $\alpha_{01} = 1 - u$  и  $\alpha_{02} = 1 + u$ , где  $q^2(\alpha) = 0$ , определяют переход от состояния свободного распространения волн в плазме в направлении поперек магнитных силовых линий ( $q^2 > 0$ ) к колебаниям, для которых плазма непрозрачна ( $q^2 < 0$ ). Рисунок А.1, а показывает поведение колебаний в случае «холодной» дисперсии альфвеновских волн ( $\nu = -\mu^4 < 0$ ). В этом случае функция  $q^2(\alpha)$  имеет точки ветвления на действительной оси  $\alpha_{1,2} = 1 \mp 2u\mu^2$ , между которыми  $q^2(\alpha)$  комплексна. При аналитическом продолжении через эти точки ветвь БМЗ переходит в крупномасштабную альфвеновскую ветвь А1, поперечная дисперсия которой определяется уравнением (1.0.21). Мелкомасштабная ветвь альфвеновских колебаний А2, дисперсия которой при  $\beta \ll m_e/m_i$  определяется (1.0.22), переходит в ветвь А3, для которой плазма непрозрачна. Если доминирует «горячая» дисперсия альфвеновских волн ( $\nu = \varkappa^4 > 0$ ), то точки ветвления функции  $q^2(\alpha)$  находятся в комплексной плоскости и на действительной оси она особенностей не имеет (см. рис. А.1, б).

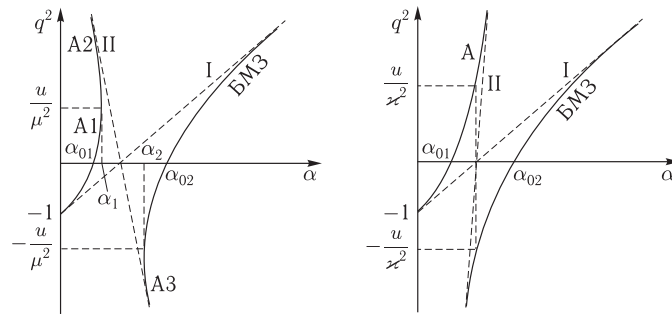


Рис. А.1. Зависимость  $q^2(\alpha)$ : а — для случая «холодной» дисперсии альфвеновских волн ( $\beta \ll m_e/m_i$ ). Уравнения асимптот:  $q^2 = \alpha - 1$  (I) и  $q^2 = -(\alpha - 1)/\mu^4$  (II); б — для случая «горячей» дисперсии альфвеновских волн ( $\beta \ll m_e/m_i$ ), уравнения асимптот:  $q^2 = \alpha - 1$  (I) и  $q^2 = (\alpha - 1)/\varkappa^4$  (II)



## Приложение Б

### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МГД-КОЛЕБАНИЙ В ОДНОМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

Распишем покомпонентно уравнения (1.0.5), предполагая, что плазма движется вдоль оси  $z$  (направленной вдоль  $\mathbf{B}_0$ ) со скоростью  $v_0(x)$  ( $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0(x))$ ). В плазме, неоднородной по координате  $x$ , для колебаний вида  $\Phi = \tilde{\Phi}(x)e^{(ik_y y + ik_z z - i\omega t)}$ , где  $\Phi$  — любая из компонент волнового поля,  $k_y$  и  $k_z$  — компоненты волнового вектора по координатам  $y$  и  $z$ ,  $\omega$  — частота колебаний, имеем

$$-i\bar{\omega}\rho_0 v_x = -\nabla_x P + \frac{B_0}{4\pi}(ik_z B_x - \nabla_x B_z) - \frac{B_z}{4\pi}\nabla_x B_0, \quad (\text{Б.1})$$

$$-i\bar{\omega}\rho_0 v_y = -ik_y P - i\frac{B_0}{4\pi}(k_y B_z - k_z B_y), \quad (\text{Б.2})$$

$$-i\bar{\omega}\rho_0 v_z = -\rho_0 v_x \nabla_x v_0 - ik_z P + \frac{B_x}{4\pi}\nabla_x B_0, \quad (\text{Б.3})$$

$$-i\bar{\omega}B_x = ik_z B_0 v_x, \quad (\text{Б.4})$$

$$-i\bar{\omega}B_y = ik_z B_0 v_y, \quad (\text{Б.5})$$

$$-i\bar{\omega}B_z = \nabla_x(v_0 B_x - v_x B_0) + ik_y(v_0 B_y - v_y B_0), \quad (\text{Б.6})$$

$$-i\frac{\bar{\omega}}{\rho_0}P = -v_s^2(\nabla_x v_x + ik_y v_y + ik_z v_z) - v_x \frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dx}, \quad (\text{Б.7})$$

где  $v_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$  — скорость звука в плазме. Из (Б.4) и (Б.5) имеем

$$B_x = -\frac{k_z B_0}{\bar{\omega}} v_x, \quad (\text{Б.8})$$

$$B_y = -\frac{k_z B_0}{\bar{\omega}} v_y. \quad (\text{Б.9})$$

Подставляя (Б.8) и (Б.9) в (Б.2) и (Б.6), получаем

$$v_y K_A^2 = \frac{k_y}{\rho_0 \bar{\omega}} P + \frac{k_y B_0}{4\pi \rho_0 \bar{\omega}} B_z,$$

$$B_z = -i\nabla_x \left( \frac{B_0}{\bar{\omega}} v_x \right) + \frac{k_y B_0}{\bar{\omega}} v_y,$$

где  $K_A^2 = 1 - k_z^2 v_A^2 / \bar{\omega}^2$ ,  $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$  — альфвеновская скорость. Таким образом, получаем

$$v_y = k_y K_s^{-2} \left[ -i\frac{v_A^2}{\bar{\omega}} \nabla_x \left( \frac{1}{\bar{\omega}} v_x \right) - i\frac{B_0 \nabla_x (B_0)}{4\pi \rho_0 \bar{\omega}^2} v_x + \frac{1}{\rho_0 \bar{\omega}} P \right], \quad (\text{Б.10})$$

$$B_z = -i\frac{K_A^2}{K_s^2} \nabla_x \left( \frac{B_0}{\bar{\omega}} v_x \right) + \frac{k_y^2 B_0}{\bar{\omega}^2 \rho_0 K_s^2} P, \quad (\text{Б.11})$$

где  $K_s^2 = K_A^2 - k_y^2 v_A^2 / \bar{\omega}^2$ . Выражая  $v_z$  из (Б.3) и подставляя полученное выражение и (Б.10) в (Б.7), имеем

$$P = -i \frac{K_A^2 \rho_0 v_s^2}{\chi_s^2 \bar{\omega}} \times \left[ \nabla_x v_x + \left( \frac{k_z \nabla_x (v_0)}{\bar{\omega}} + (1 - K_s^2 (1 + \frac{v_A^2}{v_s^2 K_A^2})) \nabla_x (\ln B_0) \right) v_x \right], \quad (\text{Б.12})$$

где  $\chi_s^2 = 1 - (k_z^2 + k_y^2)(v_A^2 + v_s^2 - k_z^2 v_A^2 v_s^2 / \bar{\omega}^2) / \bar{\omega}^2$ . Выражая теперь компоненту скорости  $v_x$  через смещение  $\xi$  ( $v_x = d\xi/dt = \partial\xi/\partial t + (\mathbf{v}_0 \nabla)\xi = -i\bar{\omega}\xi$ ) и подставляя ее в полученные выше выражения для компонент волнового поля, получаем

$$v_x = -i\bar{\omega}\xi, \quad v_y = -\frac{1}{K_s^2} \left( v_A^2 + \frac{K_A^2 v_s^2}{\chi_s^2} \right) \frac{k_y}{\bar{\omega}} \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad (\text{Б.13})$$

$$v_z = -\frac{k_z K_A^2 v_s^2}{\bar{\omega} \chi_s^2} \frac{\partial\xi}{\partial x} - \xi \frac{dv_0}{dx},$$

$$B_x = ik_z B_0 \xi, \quad B_y = -\frac{k_z B_0}{\bar{\omega}} v_y, \quad (\text{Б.14})$$

$$B_z = -\frac{K_A^2 B_0}{\chi_s^2} \left( 1 - \frac{k_z^2 v_s^2}{\bar{\omega}^2} \right) \frac{\partial\xi}{\partial x} - \xi \frac{dB_0}{dx},$$

$$P = -\gamma P_0 \frac{K_A^2}{\chi_s^2} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \xi \frac{d}{dx} \left( \frac{B_0^2}{8\pi} \right), \quad (\text{Б.15})$$

где обозначено

$$K_A^2 = 1 - \frac{k_z^2 v_A^2}{\bar{\omega}^2}, \quad K_s^2 = K_A^2 - \frac{k_y^2 v_A^2}{\bar{\omega}^2},$$

$$\chi_s^2 = 1 - \frac{k_y^2 + k_z^2}{\bar{\omega}^2} \left( v_A^2 + v_s^2 - \frac{k_z^2 v_A^2 v_s^2}{\bar{\omega}^2} \right).$$

Используя также условие вмороженности (1.0.6) для компонент возмущенного электрического поля колебаний, имеем

$$E_x = \frac{k_y \omega}{c \bar{\omega}^2} \frac{B_0}{K_s^2} \left( v_A^2 + \frac{K_A^2 v_s^2}{\chi_s^2} \right) \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad E_y = -i \frac{\omega B_0}{c} \xi, \quad E_z = 0. \quad (\text{Б.16})$$

Уравнение (Б.1) с учетом (Б.8) и (Б.11) может быть записано как

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( P + \frac{B_0 B_z}{4\pi} \right) - K_A^2 \xi = 0, \quad (\text{Б.17})$$

где выражение в скобках  $(P + B_0 B_z / 4\pi)$  является полным возмущенным давлением. Подставляя  $P$  и  $B_z$  из (Б.14) и (Б.15) в это выражение, получаем основное уравнение (2.2.2).

## Приложение В

### МОДЕЛЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ БМЗ-КОЛЕБАНИЙ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

В настоящее время имеются многочисленные наблюдения колебаний параметров солнечного ветра, полученные на космических аппаратах. В [362–364] показано, что колебания солнечного ветра имеют характер стохастического «белого шума», а их корреляционные функции представляют собой  $\delta$ -функцию от частот и волновых векторов.

В литературе представлены два типа статистических наблюдений спектров таких колебаний. В ряде работ представлены спектры плотности энергии колебаний  $W$  как функции их частоты  $\omega$ . Согласно этим данным (см. [362]), в большей части диапазона частот  $W(\omega)$  может быть аппроксимирована степенной функцией вида  $W \sim \omega^{-\alpha}$ , где показатель степени лежит в диапазоне  $1 \lesssim \alpha \lesssim 3$ . Среднее значение  $\alpha$  близко к  $\alpha = 5/3$ , что соответствует спектру Колмогорова для развитых турбулентных колебаний. Ниже частоты  $\omega = \omega_i$ , где  $\omega_i$  — гирочастота ионов солнечного ветра, спектр  $W(\omega)$  резко обрывается из-за резонансного ионно-циклотронного поглощения волн.

В работах других авторов (см. [363]) приведены данные о спектре колебаний концентрации плазмы солнечного ветра в зависимости от длины волны, т. е. фактически функция  $\bar{\rho}(k_t)$ . Здесь черта сверху означает некоторое усредненное значение, поскольку речь идет о турбулентных колебаниях. Обозначая отдельную фурье-гармонику плотности колебаний как  $\rho(\mathbf{k}_t, \omega)$ , для функции  $\bar{\rho}(k_t)$  имеем

$$\bar{\rho}(k_t) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \rho^2(k_t, \theta, \omega) d\omega \right]^{1/2}.$$

Из наблюдений [363] следует, что  $\bar{\rho}(k_t)$  может быть аппроксимирована функцией вида  $\bar{\rho} \sim k_t^{-\beta}$ , где значение  $\beta$  близко к показателю спектра Колмогорова,  $\beta \approx 5/3$ .

Плотность энергии колебаний является квадратичной функцией их амплитуды, поэтому для Фурье-гармоники среднего квадрата плотности колебаний плазмы можно предложить следующее модельное выражение:

$$\rho^2 = C \omega^{-\alpha} k_t^{-2\beta}, \quad (\text{В.1})$$

где  $C$  — некоторая амплитуда, которую можно найти, выполнив обратное фурье-преобразование по всему спектру частот и волновых векторов. Спектр (В.1) следует обрезать при  $k_t \rightarrow 0$ . Как показано

в [362], существует максимальный корреляционный масштаб  $\widehat{l}$ , связанный с неоднородной структурой солнечного ветра. Для колебаний магнитного поля он составляет  $\widehat{l} = 1,12 \cdot 10^6$  км. Можно предполагать, что этот масштаб является максимальным и для магнитозвуковых колебаний, и ограничить спектр колебаний (В.1) снизу минимальным значением  $\widehat{k}_t = 2\pi/\widehat{l}$ . Соответственно, можно ввести и минимальную частоту колебаний  $\widehat{\omega} = \widehat{k}_t v_0$ , ограничивающую частотный спектр колебаний снизу. Следует учесть также наличие в спектре колебаний «зон прозрачности», описанных в разд. 2.13. Можно показать, что удовлетворяющая этим требованиям амплитуда  $C$  в спектральной функции (В.1) имеет вид

$$C = \widetilde{C} \bar{\rho}^2 \Phi(\mathbf{k}_t, \omega), \quad (\text{В.2})$$

где  $\bar{\rho}^2$  — средний квадрат амплитуды колебаний плотности, падающих на переходной слой волн,  $\Phi(\mathbf{k}_t, \omega)$  — функция фильтра, учитывающая характерные масштабы обрезания спектра и наличие «зон прозрачности»:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}_t, \omega) = & \Theta(\omega - \widehat{\omega}) \Theta(\omega_i^I - \omega) \left[ \Theta(\theta - \pi + \theta^*) \Theta(k_t - \widehat{k}_t) + \right. \\ & + \Theta(\theta^* - \theta) \left( \Theta(k_t - \widehat{k}_t) \Theta(k_t^{(1)} - k_t) + \Theta(k_t - k_t^{(2)}) \right) + \\ & \left. + \Theta(\pi - \theta^* - \theta) \Theta(\theta - \theta^*) \Theta(k_t - \widehat{k}_t) \Theta(k_t^{(1)} - k_t) \right], \end{aligned}$$

$\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда ( $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\Theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ ), а  $\theta^*$  и  $k_t^{(1,2)}$  определены в разд. 2.13. Нормирующий множитель  $\widetilde{C}$  в (В.2) выбран так, что

$$\frac{2\widetilde{C}}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \omega^{-\alpha} d\omega \int_0^\infty \Phi(\mathbf{k}_t, \omega) k_t^{-2\beta+1} dk_t = 1.$$

## Приложение Г

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МГД-КОЛЕБАНИЙ СДВИГОВОГО СЛОЯ С $k_t \parallel V_0$ ПРИ $\beta^* < 1$ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Если перед одним из радикалов в дисперсионном уравнении (2.15.16) изменить знак, то вид решения (2.15.18) не изменится. Следовательно, решение (2.15.18) содержит в себе корни, относящиеся к двум разным знакам перед радикалами в (2.15.16). Чтобы определить какому знаку в (2.15.16) соответствует выбранное неустойчивое при  $\beta^* < 1$  решение (2.15.18), рассмотрим его вблизи нейтральной точки  $M = M_0$ , где  $c_i = 0$ . При этом  $c^2 = 1 + M_0^{-2}$ . Подставляя это выражение в (2.15.11) найдем, что  $k_x^2 > 0$  при  $M_0 < M_{01} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}/2$ , а при  $M_0 > M_{01}$  имеем  $k_x^2 < 0$ .

В первом случае среда прозрачна для рассматриваемых волн и для нее имеется «хорошо определенное» понятие групповой скорости, с которой происходит перенос волновой энергии. Отступив немного по  $M$  внутрь области, где появляется мнимая составляющая  $c_i > 0$  ( $M = M_0(1 - \varepsilon)$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), получим комплекснозначное выражение для  $k_x$ . Знак перед радикалом в (2.15.11) следует выбрать так, чтобы при  $x > 0$  было  $\text{Im}(k_x) > 0$ , а при  $x < 0$  было  $\text{Im}(k_x) < 0$ , что при удалении от сдвигового слоя соответствует экспоненциально убывающему по амплитуде решению. При этом знаки групповой скорости соответствуют колебаниям, уносящим энергию от слоя. Однако такой выбор знаков  $k_x$  приводит к дисперсионному уравнению, отличающемуся от (2.15.16) тем, что в нем будут одинаковые знаки перед радикалами. Следовательно, это решение не является решением дисперсионного уравнения (2.15.16).

Во втором случае ( $M_0 > M_{01}$ ) среда непрозрачна для рассматриваемых колебаний и выбор знаков  $k_x$  определяется в нейтральной точке  $M = M_0$  требованием экспоненциального убывания их амплитуды при удалении от сдвигового слоя. Групповая скорость для таких колебаний не определена. Отступим внутрь области  $M < M_0$ , где появляется положительная мнимая составляющая  $c_i > 0$  и связанная с ней малая составляющая групповой скорости  $\text{Re}(v_{gx})$ . Легко проверить, что, как и в предыдущем случае, знаки групповой скорости соответствуют колебаниям, уносящим энергию от слоя, однако знаки перед радикалами в полученном таким образом дисперсионном уравнении не соответствуют знакам в (2.15.16). Эти знаки можно согласовать, только выбрав с одной стороны от сдвигового слоя экспоненциально растущее решение, что противоречит физической постановке задачи.

Следовательно, в этих двух случаях групповую скорость следует считать «плохо определенной» и ее нельзя использовать для нахождения потока энергии волны.

## Приложение Д

### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НА ПОТЕНЦИАЛЫ $\varphi$ И $\psi$ ДЛЯ МГД-ВОЛН В «ТЕПЛОЙ» ПЛАЗМЕ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ $(x^1, x^2, x^3)$

Из разложения (2.7.4) имеем следующие уравнения для компонент возмущенного электрического поля в ортогональной системе криволинейных координат:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\nabla_1 \varphi + ik_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi, \\ E_2 &= -ik_2 \varphi - \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi, \\ E_3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

Используя эти выражения, второе уравнение (1.0.5) и условие вмерзности (1.0.6), получаем в неподвижной плазме ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ) для компонент возмущенного магнитного поля и поля скоростей

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{c}{\omega} \frac{g_1}{\sqrt{g}} \nabla_3 \left( k_2 \varphi - i \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right), \\ B_2 &= \frac{c}{\omega} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \left( i \nabla_1 \varphi + k_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right), \\ B_3 &= i \frac{c}{\omega} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \left( \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi - k_2^2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right), \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{cp^{-1}}{B_0} \left( ik_2 \varphi + \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right), \\ v_2 &= \frac{cp}{B_0} \left( \nabla_1 \varphi - ik_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right). \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

Из третьей компоненты первого векторного уравнения (1.0.5) имеем

$$v_3 = -\frac{i}{\omega \rho_0} \nabla_3 P + \frac{icB_0 \varkappa_{1B}}{4\pi \rho_0 \omega^2 \sqrt{g_1 g_2}} \left( k_2 \varphi - i \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right),$$

где обозначено  $\varkappa_{1B} = \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} B_0)$ . Из третьего уравнения (1.0.5) получаем следующее выражение для возмущенного давления:

$$P = -i \frac{v_s^2 \rho_0}{\omega P_0^\sigma \sqrt{g}} \left[ \nabla_1 \left( \frac{\sqrt{g}}{g_1} P_0^\sigma v_1 \right) + ik_2 \frac{\sqrt{g}}{g_2} P_0^\sigma v_2 + \nabla_3 \left( \frac{\sqrt{g}}{g_3} P_0^\sigma v_3 \right) \right], \quad (\text{Д.4})$$

где  $\sigma = 1/\gamma$ . Подставляя сюда полученные выше выражения для компонент поля скоростей, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{L}_0 P = & -i \frac{cB_0}{4\pi\omega\sqrt{g_3}} \frac{v_s^2}{v_A^2} \times \\ & \times \left[ i \frac{k_2 g_3}{\sqrt{g}} \widehat{L}_1 \varphi - \overline{\Delta}_\perp \psi + \frac{B_0}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_1 g_2}} \nabla_3 \frac{\varkappa_{1B} v_A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right], \quad (\text{Д.5}) \end{aligned}$$

определяющее возмущенное давление через скалярный и векторный потенциалы. Здесь введены следующие операторы:

$$\widehat{L}_0 = \frac{v_s^2}{\omega^2} \frac{\rho_0}{P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 + 1,$$

— продольный оператор для магнитозвуковых волн,

$$\widehat{L}_1 = \frac{B_0}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{\varkappa_{1B} v_A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 - \varkappa_{1P},$$

где  $\varkappa_{1P} = \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} P_0^\sigma / B_0)$ , и

$$\overline{\Delta}_\perp = \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \left( \nabla_1 \frac{p P_0^\sigma}{B_0} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{p} \frac{P_0^\sigma}{B_0} \right).$$

Если первую компоненту первого векторного уравнения (1.0.5) умножить слева на  $-ik_2 \rho_0$ , от второй компоненты этого уравнения после умножения слева на  $\rho_0$  взять производную  $\nabla_1$ , сложить полученные уравнения и выразить оставшиеся слагаемые через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , получим

$$\begin{aligned} \nabla_1 B_0 \widehat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 B_0 \widehat{L}_P \varphi = \\ = ik_2 \left( \nabla_1 B_0 \widehat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi - B_0 \widehat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi - B_0 \frac{\varkappa_{1g}}{\sqrt{g_3}} \widetilde{\Delta}_\perp \psi \right), \quad (\text{Д.6}) \end{aligned}$$

где  $\varkappa_{1g} = \nabla_1 (\ln g_3)$ , продольные тороидальный и полоидальный операторы  $\widehat{L}_T, \widehat{L}_P$  определяются выражениями (3.1.6) и (3.1.7), а оператор  $\widetilde{\Delta}_\perp$  — (3.1.9). При переходе к однородной плазме правая часть этого уравнения обращается в нуль, а в левой части получается дисперсионное уравнение для альфвеновских волн  $\omega^2 = k_\parallel^2 v_A^2$ . Таким образом, можно считать, что в неоднородной плазме уравнение (Д.6) описывает альфвеновские волны, источником которых могут быть магнитозвуковые волны, поле которых определяет правую часть этого уравнения.

Если на вторую компоненту первого векторного уравнения (1.0.5) подействовать слева оператором  $(i/k_2)\widehat{L}_0\rho_0$  и выразить слагаемые получившегося уравнения через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{B_0\sqrt{g_3}}{4\pi\rho_0}\widehat{L}_0\frac{B_0}{\sqrt{g_3}}\widetilde{\Delta}\psi + v_s^2\overline{\Delta}\psi - \widehat{L}_2\psi = \\ = -i\frac{B_0\sqrt{g_3}}{4\pi k_2\rho_0}\widehat{L}_0B_0\widehat{L}_T\nabla_1\varphi + ik_2v_s^2\frac{g_3}{\sqrt{g}}\widehat{L}_1\varphi, \quad (\text{Д.7}) \end{aligned}$$

где оператор  $\widetilde{\Delta}$  определяется как (3.1.8) и введены операторы

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} &= \overline{\Delta}_\perp + \frac{B_0}{P_0^\sigma}\frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\nabla_3\frac{\sqrt{g}}{g_3}\frac{P_0^\sigma}{\rho_0}\nabla_3\frac{\rho_0}{B_0\sqrt{g_3}}, \\ \widehat{L}_2 &= \frac{B_0v_s^2}{\omega^2P_0^\sigma\sqrt{g_1g_2}}\nabla_3\frac{\varkappa_{1B}v_A^2P_0^\sigma}{B_0\sqrt{g_3}}\nabla_3\frac{g_2}{\sqrt{g}}\nabla_1 - \omega^2. \end{aligned}$$

В однородной плазме в правой части (Д.7) получается дисперсионное уравнение для альфвеновских волн, а в левой части — уравнение для магнитозвуковых волн (1.0.8). В неоднородной плазме (Д.7) можно рассматривать как уравнение, описывающее воздействие альфвеновской волны на поле магнитозвуковых колебаний.



## Приложение Е

### ВКБ-РЕШЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БМЗ-ВОЛН, ИМЕЮЩИХ ДВЕ ТОЧКИ ПОВОРОТА НА СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим решения типа I на рис. 3.17. В области  $x_-^3 \leq x^3 < x_1^3$  общее решение (3.5.2) состоит из суммы растущей и падающей экспонент. Из граничного условия на ионосфере ( $H_n(x_-^3) = 0$ ) следует, что решение в этой области имеет вид

$$H_n = C f \operatorname{sh} \left( \int_{x_-^3}^{x^3} |k_3| dx^{3'} \right). \quad (\text{E.1})$$

Вблизи точки поворота  $x^3 = x_3^3$  (см. рис. 3.17) в уравнении (3.5.2) можно линеаризовать потенциал и представить его в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \xi H = 0, \quad (\text{E.2})$$

где  $\xi = \bar{f}(x^3 - x_1^3)$  — безразмерная продольная координата,  $\bar{f} = |\nabla_3 k_3^2|_{x^3=x_1^3}^{1/3}$ . Уравнение (E.2) является уравнением Эйри, общее решение которого есть

$$H = A_1 Ai(-\xi) + B_1 Bi(-\xi), \quad (\text{E.3})$$

где  $Ai(-\xi)$ ,  $Bi(-\xi)$  — функции Эйри. Переходя в этом решении к асимптотике  $\xi \rightarrow -\infty$  и производя сшивку с решением (E.1), получим

$$A_1 - 2B_1 e^{2\bar{\psi}} = \sqrt{\pi} f_1 C e^{\bar{\psi}},$$

где  $f_1 = (g_3 \sqrt{g} / \bar{f} g_1)_{x^3=x_1^3}^{3/2}$ ,

$$\bar{\psi} = \int_{x_-^3}^{x_1^3} |k_3| dx^3.$$

В области  $x_1^3 < x^3 < x_2^3$  ВКБ-решение (3.5.4) можно сшить с решением вблизи точки поворота  $x_1^3$ , в результате чего для коэффициентов  $A$  и  $B$  в (3.5.4) получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2} (e^{\bar{\psi}} - \frac{i}{2} e^{-\bar{\psi}}) e^{i\pi/4}, \\ B &= i \frac{A}{2} (e^{\bar{\psi}} + \frac{i}{2} e^{-\bar{\psi}}) e^{-i\pi/4}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Аналогично, вблизи второй точки поворота  $x^3 = x_2^3$  решение уравнения (3.5.2) можно представить в виде

$$H = A_2 Ai(\xi) + B_2 Bi(\xi), \quad (\text{E.5})$$

где  $\xi = \bar{f}(x^3 - x_2^3)$ . Сшивка с решением (3.5.4), в котором коэффициенты  $A, B$  выражены в виде (E.4), дает

$$A_2 = -\sqrt{\pi} C f_2 \left( e^{\bar{\psi}} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{e^{-\bar{\psi}}}{3} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

$$B_2 = \sqrt{\pi} C f_2 \left( e^{\bar{\psi}} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{e^{-\bar{\psi}}}{2} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

где  $f_2 = (g_3 \sqrt{g} / \bar{f} g_1)_{x^3=x_2^3}^{1/2}$ ,

$$\psi(x^3) = \int_{x_3^3}^{x^3} k_3 dx^{3'}.$$

В области  $x_2^3 < x^3 \leq x_+^3$  решение, удовлетворяющее граничному условию на ионосфере ( $H(x_+^3) = 0$ ), имеет вид

$$H_n = C_1 f \operatorname{sh} \left( \int_{x_2^3}^{x^3} |k_3| dx^{3'} \right).$$

Сшивка этого решения с решением (E.5) оказывается возможной только при выполнении условия квантования

$$\operatorname{tg}(\psi(x_2^3) + \frac{\pi}{2}) = 0,$$

или

$$\int_{x_1^3}^{x_2^3} k_3 dx^3 = \pi(n + \frac{1}{2}),$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . При этом  $C_1 = \pm C$  (знаки « $\pm$ » для четных и нечетных  $n$  соответственно), что дает общее решение вида (3.5.6).

Приложение Ж

**ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ  
ПОПЕРЕЧНУЮ СТРУКТУРУ СТОЯЧИХ  
АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН**

Для вычисления интеграла

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\eta + i\varepsilon)|^2 d\eta$$

используем интегральное представление функции  $G(z)$  (3.11.5). Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' \exp \left[ i(s-s')\eta - \varepsilon(s+s') - i\frac{s^3}{3} + i\frac{s'^3}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' \exp \left[ -i\frac{s^3}{3} + i\frac{s'^3}{3} - \varepsilon(s+s') \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp [i(s-s')\eta] = \\ &= 2 \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' \exp \left[ -i\frac{s^3}{3} + i\frac{s'^3}{3} - \varepsilon(s+s') \right] \delta(s-s') = 2 \int_0^{\infty} ds e^{-2\varepsilon s} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Аналогично, для вычисления

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\eta + i\varepsilon)|^2 d\eta$$

используем интегральное представление  $g(z)$  (3.11.6). Из него имеем

$$g'(z) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left( isz + \frac{i}{s} \right) ds.$$

Отсюда

$$I_2 = 2 \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' \exp \left[ \frac{i}{s} - \frac{i}{s'} - \varepsilon(s+s') \right] \delta(s-s') = 2 \int_0^{\infty} ds e^{-2\varepsilon s} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

### Приложение 3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПСА ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть  $\mathbf{r} = (x, y)$  — двумерный вектор, компоненты которого  $x = x(t), y = y(t)$  являются случайными функциями времени. Предположим, что существуют корреляторы  $\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle xy \rangle$ . Рассмотрим проекцию вектора  $\mathbf{r}$  на прямую, расположенную под углом  $\alpha$  к оси  $x$ :

$$r_\alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Среднее значение ее квадрата можно представить в виде

$$\langle r_\alpha^2 \rangle = r_{\min}^2 + (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) \cos^2(\alpha - \alpha_0), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} r_{\min}^2 &= \frac{1}{2} \left[ \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle - \sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \langle xy \rangle^2} \right], \\ r_{\max}^2 &= \frac{1}{2} \left[ \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \langle xy \rangle^2} \right], \\ \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2 \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle}. \end{aligned}$$

Фигура, описываемая уравнением (3.1) в полярных координатах ( $\alpha$  — полярный угол,  $r = \sqrt{\langle r_\alpha^2 \rangle}$  — радиус), не является эллипсом. Ее характерный вид приведен на рис. 3.1. Максимальный радиус  $r_{\max}$  эта фигура имеет в направлении  $\alpha = \alpha_0$ , а минимальный  $r_{\min}$  — в перпен-

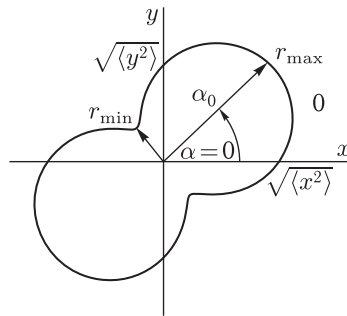


Рис. 3.1. Распределение в плоскости  $(x, y)$  среднего квадрата амплитуды двумерного случайного вектора  $\mathbf{r} = (x, y)$  с заданными квадратичными корреляторами  $\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle xy \rangle$

дикулярном направлении. Однако, если конец вектора  $\mathbf{r}$  гармонически вращается по эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$ , наклоненному под углом  $\phi$  к оси  $x$ , т.е.

$$\begin{aligned}x &= a \cos \phi \cos \omega t - b \sin \phi \sin \omega t, \\y &= a \sin \phi \cos \omega t + b \cos \phi \sin \omega t,\end{aligned}$$

то, вычисляя средние по времени  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle y^2 \rangle$ ,  $\langle xy \rangle$  и подставляя в приведенные выше формулы, получим  $\alpha_0 = \phi$ ,  $r_{\max} = a$ ,  $r_{\min} = b$ . Это дает основание и в общем случае величины  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  называть полуосями эллипса поляризации, а  $\alpha_0$  — углом его наклона.

Приложение И

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ПО ЗАДАННОМУ ВКБ-РЕШЕНИЮ**

Найдем решение уравнения (3.13.13) в приближении ВКБ. Полагаем

$$U_N(x^1) = e^{iS(x^1)}.$$

Для фазы  $S(x^1)$  получаем уравнение

$$-AS'^2 + i(AS')' + D = 0.$$

Решение этого уравнения в приближении ВКБ ищется в виде асимптотического ряда

$$S = S_0 + S_1 + \dots$$

В главном порядке

$$-AS_0'^2 + D = 0.$$

Отсюда

$$S_0 = \int \left(\frac{D}{A}\right)^{1/2} dx.$$

В следующем порядке

$$-2AS_0'S_1' + i(AS_0')' = 0,$$

что дает

$$S_1 = \frac{i}{4} \ln(AD) - i \ln C,$$

где  $C$  — произвольная константа. Полученное решение можно записать в виде

$$U_N = e^{i(S_0+S_1)} = Cr^{-1/2} \exp\left(\int k dx\right),$$

где обозначено

$$r = (AD)^{1/2}, \quad k = (D/A)^{1/2}. \quad (\text{И.1})$$

Предположим, что решение уравнения (3.13.13) в приближении ВКБ нам задано, то есть заданы функции  $r$  и  $k$ , и требуется восстановить коэффициенты уравнения. Из (И.1) сразу получаем

$$A = r/k, \quad D = rk.$$

## Приложение К

### СТРОГИЙ ВЫВОД ПОПЕРЕЧНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТОЯЧИХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В СЛУЧАЕ $\kappa \ll 1$

Одна из областей, о которых идет речь, расположена в окрестности тороидальной поверхности. Будем предполагать, что мода в этой области является почти тороидальной. Это означает, что

$$|\nabla_1^2 \varphi| \gg k_y^2 |\varphi|. \quad (\text{К.1})$$

В таком случае ее продольная структура должна быть близка к тороидальной гармонике  $T_N$  и, следовательно, решение можно искать в виде

$$\varphi(x^1, l, \omega) = U_N(x^1, \omega) T_N(x^1, l, \omega) + h_N(x^1, l, \omega), \quad (\text{К.2})$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой главный порядок приближения, а  $h_N$  — поправку первого порядка. Будем считать разность  $\omega^2 - \Omega_{TN}^2$  также малой величиной первого порядка. Подставляя (К.2) в уравнение (3.13.3) и сохраняя только члены главного и первого порядков, получаем

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left( \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial T_N}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2} T_N \right) \nabla_1 U_N - \\ - k_2^2 U_N \left( \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \frac{\partial T_N}{\partial l} + \frac{1}{p} \frac{\omega^2}{v_A^2} T_N \right) = -\hat{L}(\Omega_{TN}) \varphi_N. \end{aligned} \quad (\text{К.3})$$

Учитывая, что функция  $T_N$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial T_N}{\partial l} + p \frac{\Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial T_N}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2} T_N &= p \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N, \\ \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \frac{\partial T_N}{\partial l} + \frac{1}{p} \frac{\omega^2}{v_A^2} T_N &= \frac{1}{p} \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N + 2 \left( \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \right) \frac{\partial T_N}{\partial l}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, переписываем (К.3) в виде

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left( p \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N \right) \nabla_1 U_N - \\ - k_2^2 \left[ \frac{1}{p} \frac{\omega^2 - \Omega_{TN}^2}{v_A^2} T_N 2 \left( \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{p} \right) \frac{\partial T_N}{\partial l} \right] U_N = -\hat{L}(\Omega_{TN}) \varphi_N. \end{aligned} \quad (\text{К.4})$$

Умножим это уравнение на  $T_N$  и проинтегрируем вдоль силовой линии. В результате получаем

$$\alpha_T \nabla_1 (\omega^2 - \Omega_{TN}^2) \nabla_1 U_N - \alpha_P k_2^2 (\omega^2 - \tilde{\Omega}_{PN}^2) U_N = - \oint T_N \hat{L}(\Omega_{TN}) \varphi_N dl. \quad (\text{K.5})$$

Здесь введено обозначение

$$\tilde{\Omega}_{PN}^2 = \Omega_{TN}^2 + \frac{1}{\alpha_P} \oint \left( \frac{\partial^2 1}{\partial l^2} \right) T_N^2 dl. \quad (\text{K.6})$$

Вычисление правой части в (K.5) выполняется точно так же, как в основном тексте при выводе уравнения (3.13.28). После этого (K.4) принимает вид

$$\alpha_T \nabla_1 [(\omega + \gamma_{TN})^2 - \Omega_{TN}^2] \nabla_1 U_N - \alpha_P k_2^2 [(\omega + \gamma_{PN})^2 - \tilde{\Omega}_{PN}^2] U_N = I_N. \quad (\text{K.7})$$

Отличие этого уравнения от модельного (3.13.28) заключается в замене величины  $\Omega_{PN}^2$  на  $\tilde{\Omega}_{PN}^2$ . Из выражения (K.6) и оценок, приведенных в разд. 3.7, следует, что разности  $\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2$  и  $\Omega_{TN}^2 - \tilde{\Omega}_{PN}^2$  имеют одинаковые знаки и порядок величины. Поэтому указанное отличие несущественно при качественном рассмотрении. Но можно утверждать и большее: это отличие несущественно (т.е. мало) и с количественной точки зрения. В разд. 3.13.3 показано, что при  $\kappa \ll 1$  полоидальная поверхность теряет свое значение резонансной поверхности и решение уравнения практически не зависит от ее положения (при условии, конечно, что  $\Delta \ll 1/k_y$ ). В частности, в этом случае можно положить  $\Omega_{PN}^2 = \Omega_{TN}^2$ , что соответствует пренебрежению слагаемым  $\kappa \arctg q$  в показателе экспоненты интегрального представления (3.13.46). В силу сказанного модельное уравнение (3.13.28) можно использовать для изучения пространственной структуры в той же степени, что и полученное строго уравнение (K.7).

Оценим размер области применимости уравнения (K.7). При его выводе предполагалось выполнение условия тороидальности (K.1). Так как вблизи тороидальной поверхности  $U_N \sim \ln(x^1 - x_{TN}^1)$ , то это условие означает

$$|x^1 - x_{TN}^1| \ll 1/k_y. \quad (\text{K.8})$$

Подчеркнем, что при  $k_y \Delta \ll 1$  область (K.8) включает в себя весь интервал между тороидальной и полоидальной поверхностью (не важно, определяется последняя частотой  $\Omega_{PN}$  или  $\tilde{\Omega}_{PN}$ ). Таким образом, в этом случае мода является тороидальной и на полоидальной поверхности.

Вторая из областей по координате  $x^1$ , в которой можно строго получить поперечное уравнение — это область полоидальности моды, где

$$|\nabla_1^2 \varphi| \ll k_y^2 |\varphi|. \quad (\text{K.9})$$



Логично предположить, что это условие выполняется в области, определяемой неравенством, обратным к (К.8):

$$|x^1 - x_{TN}^1| \gg 1/k_y. \quad (\text{К.10})$$

В пользу этого предположения можно привести такой аргумент. Если в области (К.10) применимо модельное уравнение (3.13.28), то его решение (3.13.35), представленное условием (К.9), приводит к неравенству (К.10).

В области полоидальности моды решение следует искать в виде

$$\varphi = U_N(x^1, \omega) P_N(x^1, l, \omega) + h_N(x^1, l, \omega),$$

где слагаемое  $U_N P_N$  — главный порядок приближения, а  $h_N$  — малая поправка. Считая также малой разность  $\omega^2 - \Omega_{PN}^2$ , получаем вместо (К.4) уравнение

$$\nabla_1 \left( p \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2}{v_A^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial P_N}{\partial l} \right) \nabla_1 U_N - k_2^2 \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2}{p v_A^2} U_N = -\widehat{L}(\Omega_{PN}) \varphi_N.$$

Умножив его на  $P_N$ , проинтегрировав вдоль силовой линии и вычислив интеграл в правой части так же, как и ранее, получаем

$$\alpha_T \nabla_1 [(\omega + \gamma_{TN})^2 - \widetilde{\Omega}_{TN}^2] \nabla_1 U_N - \alpha_P k_2^2 [(\omega + \gamma_{PN})^2 - \Omega_{PN}^2] U_N = I_N. \quad (\text{К.11})$$

Здесь обозначено

$$\widetilde{\Omega}_{TN}^2 = \Omega_{PN}^2 + \frac{1}{\alpha_T} \oint \left( \frac{\partial^2}{\partial l^2} \frac{1}{p} \right) P_N^2 dl.$$

Из тех же соображений, что и выше, можно показать, что разности  $\Omega_{PN}^2 - \Omega_{TN}^2$  и  $\Omega_{PN}^2 - \widetilde{\Omega}_{TN}^2$  имеют одинаковый знак и порядок величины, а следовательно, уравнение (К.11) вполне может быть заменено модельным уравнением (3.13.28).

Отметим, что на языке безразмерной переменной  $\xi = k_y(x^1 - x_{TN}^1)$  области (К.8) и (К.10), в которых поперечное уравнение может быть получено строго, определяются неравенствами  $|\xi| \ll 1$  и  $|\xi| \gg 1$ .

Подчеркнем еще одно важное обстоятельство. В области (К.8), где справедливо уравнение (К.11), положение сингулярной (тороидальной) поверхности определяется «настоящей» тороидальной частотой  $\Omega_{TN}$ . В уравнении же (К.11), описывающем моду в асимптотически далекой области (К.10), роль тороидальной частоты играет величина  $\widetilde{\Omega}_{TN}$  несколько отличающаяся от  $\Omega_{TN}$ . Но для решения в этой области точное положение тороидальной поверхности уже совершенно не существенно.

Приложение Л  
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК  $\eta_0$

Подставляя (3.15.18) в выражение для  $v_2$  и приравнявая его к нулю, получим следующее уравнение для определения  $\kappa_0 \equiv \bar{\kappa}(\xi, \eta_0(\xi))$ :

$$\tilde{z}^3(1 + \xi^{-1}) - \tilde{z}^2(4 + 3\xi^{-1}) + 3(2 + \xi^{-1})\tilde{z} - 4 = 0,$$

где  $\tilde{z} = (1 + \kappa_0^2)\xi$ . Обозначая

$$r = -\frac{4\xi + 3}{\xi + 1}, \quad s = 3\frac{2\xi + 1}{\xi + 1}, \quad t = -\frac{4\xi}{\xi + 1}$$

и делая замену переменной  $z = \tilde{z} + r/3$ , приводим уравнение к каноническому виду:

$$z^3 + pz + q = 0,$$

где

$$p = \frac{3s - r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t.$$

Вид корней этого уравнения зависит от величины дискриминанта

$$D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $-1 \leq \xi \leq 1$  дискриминант  $D > 0$ . Согласно общей теории кубических уравнений, это означает, что уравнение имеет единственный действительный корень, равный

$$z_1 = u + v - r/3,$$

где

$$u = (-(q/2) + \sqrt{D})^{1/3}, \quad v = (-(q/2) - \sqrt{D})^{1/3}.$$

Таким образом,

$$\kappa_0 = \pm \sqrt{(\tilde{z}_1 - \xi)/\xi},$$

где

$$\tilde{z}_1 = z_1 + r/3.$$

Подставляя  $\kappa = \kappa_0$  в уравнение (3.15.21) и полагая в правой его части  $\pm\eta = \eta_0$ , получаем уравнение, определяющее характеристики  $\eta_0$ . При этом, если  $\xi > 0$ , в левой части (3.15.21) выбирается знак «+», а в определении  $\kappa_0$  — знак «-». При  $\xi < 0$  наоборот: в (3.15.21) выбирается знак «-», а в определении  $\kappa_0$  — знак «+».

Приложение М

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ВБЛИЗИ  
ХАРАКТЕРИСТИК  $\pm\eta_1, \pm\eta_4$  И  $\eta_0$**

После взятия в (3.15.11) внутреннего интеграла по  $\kappa$  получается интеграл вида (3.15.13). Если вблизи точки перевала  $\bar{k}$  вторая производная от фазы  $\bar{w}_2$  равна нулю, то можно разложить фазу  $\tilde{\Psi}_{\pm}$  вблизи  $k = \bar{k}$  с точностью до величин третьего порядка малости:

$$\tilde{\Psi}_{\pm}(k, \tilde{\kappa}(k)) \approx \bar{\Psi}_{\pm}(\bar{k}, \bar{\kappa}) + \frac{\bar{w}_3}{6}(k - \bar{k})^3,$$

где  $\bar{w}_3 \equiv (\partial^3 \tilde{\Psi}_{\pm} / \partial k^3)_{k=\bar{k}}$ . На рис. М.1 изображены сектора, в которых подынтегральная функция либо экспоненциально убывает, либо экспоненциально растет при удалении от точки перевала  $\bar{k}$ . Выбирая путь интегрирования  $\tilde{C}$  как показано на рис. М.1, приводим интеграл (3.15.13) в окрестности точки перевала к виду

$$I \simeq \tau_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_N |\bar{v}_2|}} \bar{a}_n \exp[i(\Omega_N^0 t + \bar{\Psi}_{\pm} \tau_N + \pi \text{sign}(\bar{v}_2)/4)] \times \\ \times (e^{-i\pi/6} - e^{-i5\pi/6}) \int_0^{\infty} e^{-i|\bar{w}_3| \tau_N r^3/6} dr.$$

Обезразмеривая получившийся интеграл и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-z^3} dz = \Gamma(1/3)/3,$$

получаем

$$I \approx \frac{\tau_1}{\tau_N^{5/6}} \bar{a}_n \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{3|\bar{v}_2|}} \left(\frac{6}{|\bar{w}_3|}\right)^{1/3} \exp[i(\Omega_N^0 t + \bar{\Psi}_{\pm} \tau_N + \frac{\pi}{4} \text{sign}(\bar{v}_2))].$$

Аналогично получается выражение для интеграла (3.15.13) и на характеристиках  $\eta_0$ , где  $\bar{v}_2 = 0$ .

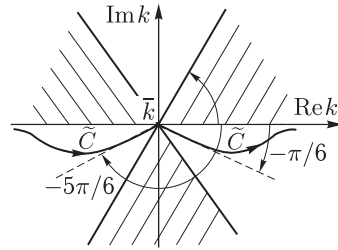


Рис. М.1. Контур интегрирования  $\tilde{C}$  и расположение секторов экспоненциального роста (заштрихованы) и убывания подынтегрального выражения в интеграле (3.15.13) вблизи характеристик  $\pm\eta_1, \pm\eta_4$  и  $\eta_0$

## Приложение Н

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ВБЛИЗИ

#### ХАРАКТЕРИСТИК $\pm\eta_2, \pm\eta_3, \pm\eta_5$ И $\pm\eta_6$

В подынтегральном выражении в (3.15.11) имеются четыре точки ветвления:  $\kappa = \pm i$  и  $\kappa = k^{-1} \pm i$ . Рассмотрим область  $-1 \leq \xi \leq 0$ .

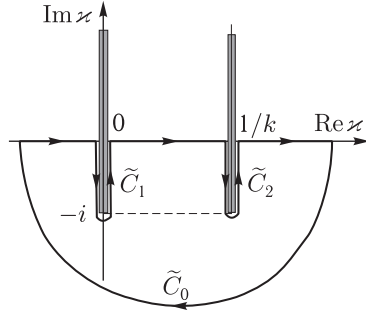


Рис. Н.1. Контур интегрирования  $\tilde{C}$  для интеграла (3.15.11) вблизи характеристик  $\pm\eta_2, \pm\eta_3, \pm\eta_5$  и  $\pm\eta_6$ , состоящий из действительной оси комплексного  $\kappa$ , путей  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  вдоль берегов разрезов и удаленного контура  $\tilde{C}_0$

подынтегральное выражение на нем экспоненциально стремится к нулю, откуда имеем  $\tilde{I}_0 = 0$ . Поскольку мы рассматриваем характеристики, на которых  $\bar{k} \rightarrow 0$ , в подынтегральном выражении  $\tilde{I}_1$  (где  $\text{Re } \kappa = 0$ ) положим

$$\text{arctg}(\kappa - k^{-1}) \approx -\pi/2, \quad 1 + (\kappa - k^{-1})^2 \approx k^{-2}.$$

В результате интеграл  $\tilde{I}_1$  вдоль берегов разреза  $\tilde{C}_1$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 \simeq & -2\tau_1 e^{-i\Omega_N^0 t} \times \\ & \times \int_0^\infty k e^{-ik(\pm\eta + \pi/2)\tau_N} \cos(\pi k \tau_N) dk \int_0^1 \frac{r e^{-k\xi \tau_N r}}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{1+r}{2-r}\right)^{k\tau_N/2} dr. \end{aligned}$$

Для этого в плоскости комплексного  $\kappa$  проведем разрезы и построим замкнутый контур интегрирования  $\tilde{C}$ , как показано на рис. Н.1. Поскольку внутри этого контура нет особенностей подынтегрального выражения, внутренний интеграл (3.15.11) по  $\kappa$  вдоль него равен нулю. Интеграл  $\tilde{I}$  вдоль контура  $\tilde{C}$  состоит из суммы интегралов:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_0 + \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + I = 0,$$

где  $\tilde{I}_0$  — интеграл по удаленному контуру  $\tilde{C}_0$ ,  $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$  — интегралы вдоль разрезов  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$ , а  $I$  — исходный интеграл вдоль действительной оси. При расширении контура  $\tilde{C}_0$  до бесконечности

Вычисляя интеграл по  $k$ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 \simeq -\frac{\tau_1}{\tau_N^2} e^{-i\Omega_N^0 t} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \times \left\{ \left[ r\xi - \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{3}{2}\pi - |\eta|\right) \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ r\xi - \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{\pi}{2} - |\eta|\right) \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичные расчеты интеграла  $\tilde{I}_2$  по контуру  $\tilde{C}_2$  (где  $\text{Re } \kappa = k^{-1} \rightarrow \infty$ ) дают

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 \simeq -\frac{\tau_1}{\tau_N} e^{-i(\Omega_N^0 t + \xi \tau_N)} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \times \left\{ \left[ \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{3}{2}\pi - |\eta|\right) \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ \ln \sqrt{\frac{2-r}{1+r}} + i\left(\frac{\pi}{2} - |\eta|\right) \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\tau_N \gg 1$ , можно пренебречь вкладом  $\tilde{I}_1$  и считать  $I \approx -\tilde{I}_2$ . Аналогично можно вычислить интеграл (3.15.11) при  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Приложение О

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ СИЛОВОЙ ЛИНИИ  
ПО ЗАДАНЫМ КОМПОНЕНТАМ  
ФОНОВОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Пусть форма силовой линии описывается ее радиусом  $r(a, \theta)$ , который в экваториальной плоскости равен  $r(a, 0) = a$ . Определим элемент длины вдоль силовой линии  $dl$  при изменении угла  $\theta$  на бесконечно малую величину  $d\theta$ . Из рис. О.1 видно, что  $dl = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$ , где  $\Delta_1 \approx r(a, \theta) - r(a, \theta + d\theta) = -(\partial r / \partial \theta) d\theta$ ,  $\Delta_2 \approx r(a, \theta) d\theta$ . Таким образом

$$dl = \sqrt{r^2(a, \theta) + (\partial r / \partial \theta)^2} d\theta. \quad (\text{O.1})$$

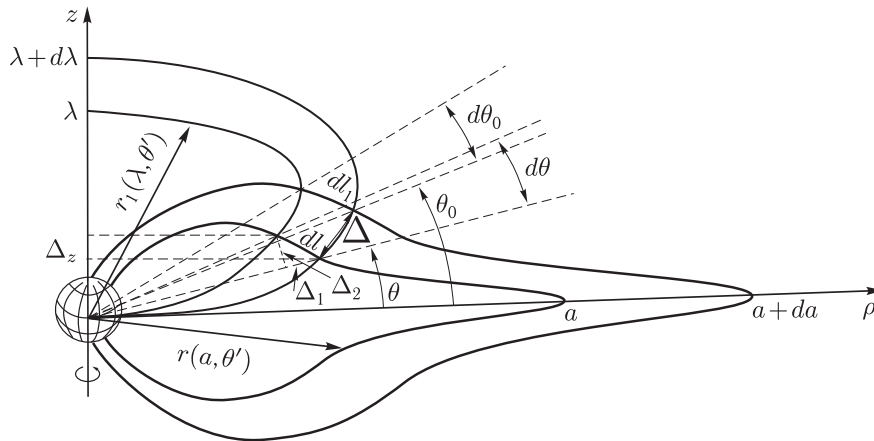


Рис. О.1. Элементы длины, необходимые для определения компонент метрического тензора в неортогональной криволинейной системе координат  $(a, \phi, \theta)$ . Показаны две бесконечно близкие силовые линии магнитного поля  $r(a, \theta')$ ,  $r(a + da, \theta')$  и ортогональные к ним координатные линии  $r(\lambda, \theta')$ ,  $r(\lambda + d\lambda, \theta')$  в плоскости магнитного меридиана  $\phi = \text{const}$

Из рис. О.1 так же следует, что  $\sin \bar{\theta} = \Delta_z / dl$ , где  $\bar{\theta}$  — угол между касательной к силовой линии и осью  $\rho$ ,  $\Delta_z = r(a, \theta + d\theta) \sin(\theta + d\theta) -$

$-r(a, \theta) \sin \theta \approx (r(a, \theta) \cos \theta + (\partial r / \partial \theta) \sin \theta) d\theta$ . Таким образом,

$$\sin \bar{\theta} = \frac{r(a, \theta) \cos \theta + (\partial r / \partial \theta) \sin \theta}{\sqrt{r^2(a, \theta) + (\partial r / \partial \theta)^2}}.$$

Возведем в квадрат правую и левую части этого уравнения и получим

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sin^2 \bar{\theta} - \cos^2 \bar{\theta}}.$$

Правильный результат получается при выборе в числителе знака минус. Проинтегрировав это выражение, получаем уравнение (3.16.8), описывающее форму силовой линии при заданных значениях компонент фонового магнитного поля.

Приложение П

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ  
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННОЙ  
С СИЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Для того чтобы построить систему координат, удовлетворяющую двум условиям, сформулированным в разд. 4.1.1, напомним определение линий кривизны и некоторые их свойства (см. [325]). Рассмотрим малую область произвольной искривленной поверхности вблизи некоторой точки  $M$  (см. рис. П.1). Восстановим нормаль  $O$  к этой поверхности в точке  $M$  и проведем секущую плоскость, содержащую нормаль  $O$ . Линия пересечения плоскости и поверхности имеет определенный радиус кривизны  $r$ . Варьируя величину  $r$  путем вращения секущей плоскости вокруг оси  $O$ , определим направления секущих

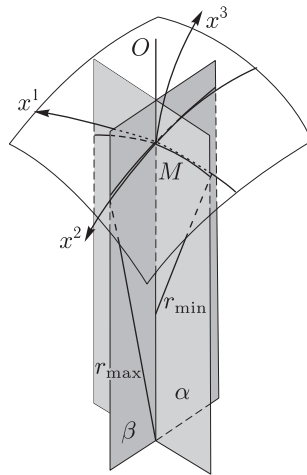


Рис. П.1. Определение ортогональной криволинейной системы координат. Координата  $x^3$  совпадает с силовой линией магнитного поля. Показана поверхность  $x^3 = \text{const}$ , где  $M$  — произвольная точка, а  $O$  — нормаль к этой поверхности в точке  $M$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  содержат нормаль  $OM$ . Линии их пересечения с поверхностью  $x^3 = \text{const}$  имеют максимальный  $r_{\max}$  и минимальный  $r_{\min}$  радиусы кривизны в точке  $M$ . Линии максимальной и минимальной кривизны, касательные к линиям пересечения, но не совпадающие с ними, являются координатными линиями  $x^1$  и  $x^2$



плоскостей, имеющих максимальный и минимальный радиусы кривизны. Эти направления нормальны друг другу. Линии, вдоль которых искривленная поверхность имеет экстремальные значения радиуса кривизны, называются линиями кривизны. За исключение частных случаев (сфера и плоскость), линии кривизны поверхностей определяются однозначно.

Даже если поверхность не полностью сферическая или плоская, она может иметь точки, в которых максимальный и минимальный радиусы кривизны равны друг другу, а именно точки округления и уплощения (в последнем случае радиус кривизны бесконечно большой). В этих точках направления кривизны не определены. Но эти направления однозначно определены в бесконечно малых окрестностях точек округления и уплощения. Следовательно, линии кривизны можно провести и через точки округления и уплощения, однозначно определив их таким образом и в этих точках.

Чтобы избежать недоразумения, подчеркнем, что в общем случае линии кривизны не совпадают с линиями пересечения поверхности с рассматриваемой плоскостью, хотя они имеют общую касательную линию.

## Приложение Р

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Определим семейство координатных поверхностей  $r_1(\lambda, \theta)$  (см. рис. О.1), ортогональных к магнитным оболочкам  $r(a, \theta)$ , для которых выполняется условие ортогональности

$$\frac{\partial \ln r(a, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ln r_1(\lambda, \theta)}{\partial \theta} = -1. \quad (\text{P.1})$$

Рассмотрим две бесконечно близкие силовые линии  $r(a, \theta')$  и  $r(a + da, \theta')$ . По определению

$$\Delta = \sqrt{g_1} da \quad (\text{P.2})$$

— отрезок координатной линии  $r_1(\lambda + d\lambda, \theta')$ , отсекаемый этими силовыми линиями на широте  $\theta$ . Из рис. О.1 видно, что

$$dl^2 = (r(a, \theta + d\theta) - r(a + da, \theta + d\theta))^2 - \Delta^2 \approx \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial a} \right)^2 - g_1 \right] da^2.$$

Сравнивая это с (О.1), получаем

$$d\theta^2 = \frac{(\partial r / \partial a)^2 - g_1}{r^2(a, \theta) + (\partial r / \partial \theta)^2} da^2. \quad (\text{P.3})$$

Запишем в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$  в координатной плоскости  $\phi = \text{const}$  координаты векторов  $\mathbf{r}(a, \theta) = (\rho_1, z_1)$  и  $\mathbf{r}(a + da, \theta + d\theta) = (\rho_2, z_2)$ :

$$\rho_1 = r(a, \theta) \cos \theta, \quad z_1 = r(a, \theta) \sin \theta,$$

$$\rho_2 = r(a, \theta + d\theta) \cos(\theta + d\theta) \approx \rho_1 + \left[ \frac{\partial r}{\partial a} da + \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta \right] \sin \theta - r(a, \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$z_2 = r(a, \theta + d\theta) \sin(\theta + d\theta) \approx z_1 + \left[ \frac{\partial r}{\partial a} da + \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta \right] \sin \theta + r(a, \theta) \cos \theta d\theta.$$

Имеем

$$\Delta^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = g_1 da^2.$$

Используя выражения для  $\rho_1, \rho_2, z_1, z_2$ , а также (P.3), получаем для  $g_1$  выражение (3.16.9).

Для определения  $g_2$  имеем по определению  $\Delta_\phi = \sqrt{g_2} d\phi$  — отрезок азимутальной координатной линии, лежащей на магнитной оболочке  $a = \text{const}$ , который отсекается двумя бесконечно близкими меридиональными плоскостями  $\phi$  и  $\phi + d\phi$ , на широте  $\theta$ . С другой стороны,  $\Delta_\phi = r(a, \theta) \cos \theta d\phi$ . Приравнявая два этих выражения, получаем для  $g_2$  выражение (3.16.9).

Приложение С

**КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ СЦЕПЛЕННЫХ МОД МГД-КОЛЕБАНИЙ**

Запишем коэффициенты уравнения (3.17.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \kappa_3 &= 3\chi_{lp} + \chi_{lb}, \\
 \kappa_2 &= \frac{\chi_{lg}\chi_{lB}}{g_1} + \chi_a^{(2)} + \chi_{ls}\chi_{la} + 2\chi_{lb}\chi_{lp} + 3p\nabla_l^2 p^{-1} + \omega^2(v_A^{-2} + c_s^{-2}), \\
 \kappa_1 &= \frac{\chi_{lg}\chi_{lB}}{g_1}\chi_{lc} + \chi_{lp}\chi_{ls}\chi_{la} + \chi_{lp}\chi_a^{(2)} + \\
 &\quad + \chi_{lb}p\nabla_l^2 p^{-1} + p\nabla_l^3 p^{-1} + \omega^2\left(\frac{\chi_{lb}}{v_A^2} + \frac{\chi_{lp}}{c_s^2} + 2p\nabla_l\frac{p^{-1}}{v_A^2}\right), \\
 \kappa_0 &= \frac{\omega^4}{v_A^2 c_s^2} + \omega^2\left(\frac{\chi_a^{(2)} + \chi_{ls}\chi_{la} - \chi_{lg}\chi_{lP}/g_1}{v_A^2} + \chi_{lb}p\nabla_l\frac{p^{-1}}{v_A^2} + p\nabla_l^2\frac{p^{-1}}{v_A^2}\right),
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 p &= \sqrt{g_2/g_1}, \\
 \chi_{lp} &= \nabla_l(\ln p^{-1}), \\
 \chi_{la} &= \nabla_l\left(\ln\frac{B_0}{\chi_{lg}}\right), \\
 \chi_{ls} &= \nabla_l\left(\ln\frac{\sqrt{g_1 g_2} P_0^\sigma}{\rho_0}\right), \\
 \chi_{lb} &= \chi_{ls} + 2\chi_{la}, \\
 \chi_{lc} &= \nabla_l\left(\ln\frac{\chi_{lB} B_0 P_0^\sigma}{\rho_0}\right), \\
 \chi_a^{(2)} &= \frac{\chi_{lg}}{B_0}\nabla_l^2\frac{B_0}{\chi_{lg}},
 \end{aligned}$$

а  $\chi_{lg}$ ,  $\chi_{lB}$  и  $\chi_{lP}$  определяются выражениями (3.16.3).

## Список литературы

1. А. В. Гульельми, и В. А. Троицкая, Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы, М., Наука, 1973.
2. A. Nishida, Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere, Physics and Chemistry in Space, New York: Springer, 1978.
3. B. Stewart, "On the Great Magnetic Disturbance Which Extended from August 28 to September 7, 1859, as Recorded by Photography at the Kew Observatory", Royal Society of London Philosophical Transactions Series I, vol. 151, pp. 423–430, 1861.
4. B. Rolf, "Giant micropulsations at Abisko", Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity (Journal of Geophysical Research), vol. 36, pp. 9–14, 1931.
5. L. Harang, "Observations of micropulsations in the magnetic records at Tromsø", Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity (Journal of Geophysical Research), vol. 37, pp. 57–61, 1932.
6. H. Alfvén, Cosmical electrodynamics, Clarendon Press, Oxford, 1950.
7. S. N. Vernov, I. A. Savenko, P. I. Shavris, V. Y. Nesterov, and N. F. Pisarenko, "The earth's radiation belts at altitudes of 180-250 km", Planet. Space Sci., vol. 11, pp. 567–574, May 1963.
8. N. F. Ness, C. S. Scarce, and J. B. Seek, "Initial Results of the Imp 1 Magnetic Field Experiment", J. Geophys. Res., vol. 69, pp. 3531–3569, September 1964.
9. N. F. Ness, "The Earth's Magnetic Tail", J. Geophys. Res., vol. 70, pp. 2989–3005, July 1965.
10. E. W. Hones, Jr., J. R. Asbridge, and S. J. Bame, "Time variations of the magnetotail plasma sheet at  $18 R_E$  Determined from concurrent observations by a pair of Vela satellites", J. Geophys. Res., vol. 76, pp. 4402–4419, 1971.
11. М. И. Пудовкин, О. М. Распопов и Н. Г. Клейменова, Возмущения электромагнитного поля Земли, Ч1, Л., Изд-во Ленинградского университета, 1976.
12. А. В. Гульельми, МГД-волны в околоземной плазме, М., Наука, 1979.
13. V. A. Pilipenko, "ULF waves on the ground and in space", Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, vol. 52, pp. 1193–1209, December 1990.
14. A. Guglielmi and O. Pokhotelov, "Nonlinear Problems of Physics of the Geomagnetic Pulsations", Space Sci. Rev., vol. 65, pp. 5–57, March 1993.
15. J. Kangas, A. Guglielmi, and O. Pokhotelov, "Morphology and physics of short-period magnetic pulsations", Space Sci. Rev., vol. 83, pp. 435–512, January 1998.
16. K.-H. Glassmeier, C. Othmer, R. Cramm, and et al., "Magnetospheric Field Line Resonances: A Comparative Planetology Approach", Surveys in Geophysics, vol. 20, pp. 61–109, 1999.

17. F. W. Menk and C. L. Waters, Magnetoseismology: Ground-based remote sensing of Earth's magnetosphere, First Edition, Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2013.
18. J. W. Dungey, "Electrodynamics of the outer atmospheres", Ionos. Sci. Rep., Cambridge, Pa., vol. 69, 1954.
19. J. W. Dungey, "Interplanetary Magnetic Field and the Auroral Zones", Phys. Rev. Lett., vol. 6, pp. 47–48, January 1961.
20. J. R. Johnson, S. Wing, and P. A. Delamere, "Kelvin Helmholtz Instability in Planetary Magnetospheres", Space Sci. Rev., vol. 184, pp. 1–31, November 2014.
21. H. Hasegawa, M. Fujimoto, K. Takagi, Y. Saito, T. Mukai, and H. Rème, "Single-spacecraft detection of rolled-up Kelvin-Helmholtz vortices at the flank magnetopause", J. Geophys. Res., vol. 111, pp. A09203, September 2006.
22. N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, Principles of plasma physics, International Student Edition – International Series in Pure and Applied Physics, Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1973.
23. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, и К. Н. Степанов, Электродинамика плазмы, М., Наука, 1974.
24. Б. Б. Кадомцев, Коллективные явления в плазме, М., Наука, 1976.
25. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей. Т.1, Неустойчивости однородной плазмы, М., Атомиздат, 1970.
26. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover, 1972.
27. A. S. Leonovich, D. A. Kozlov, and I. K. Edemskiy, "Standing slow magnetosonic waves in a dipole-like plasmasphere", Planet. Space Sci., vol. 58, pp. 1425–1433, 2010.
28. C. Z. Cheng and S. Zaharia, "Field line resonances in quiet and disturbed time three-dimensional magnetospheres", Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 108, pp. 1001, January 2003.
29. D. E. Osterbrock, "The Heating of the Solar Chromosphere, Plages, and Corona by Magnetohydrodynamic Waves.", Astrophys. J., vol. 134, pp. 347–388, September 1961.
30. L. Ofman, "MHD Waves and Heating in Coronal Holes", Space Sci. Rev., vol. 120, pp. 67–94, September 2005.
31. J. A. Tataronis and W. Grossmann, "On Alfvén wave heating and transit time magnetic pumping in the guiding-centre model of a plasma", Nuclear Fus., vol. 16, pp. 667–678, September 1976.
32. C. F. F. Karney, F. W. Perkins, and Y.-C. Sun, "Alfvén resonance effects on magnetosonic modes in large tokamaks", Phys. Rev. Lett., vol. 42, pp. 1621–1624, June 1979.
33. T. Tamao, "Transmission and coupling resonance of hydromagnetic disturbances in the non-uniform Earth's magnetosphere", Sci. Rep. Tohoku Univ., vol. 17, pp. 43–54, 1965.
34. L. Chen and A. Hasegawa, "A theory of long-period magnetic pulsations: I. Steady state excitation of field line resonance", J. Geophys. Res., vol. 79, pp. 1024–1032, 1974.

35. H. R. Radoski, "A theory of latitude dependent geomagnetic micropulsations: The asymptotic fields", *J. Geophys. Res.*, vol. 79, pp. 595–603, February 1974.
36. D. J. Southwood, "Some features of field line resonances in the magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 22, pp. 483–491, 1974.
37. C. A. Green, "Meridional characteristics of a Pc 4 micropulsation event in the plasmasphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 26, pp. 955–967, 1978.
38. M. R. Lessard, M. K. Hudson, J. C. Samson, and J. R. Wygant, "Simultaneous satellite and ground-based observations of a discretely driven field line resonance", *J. Geophys. Res.*, vol. 104, pp. 12361–12378, June 1999.
39. A. V. Guglielmi, "Diagnostics of the plasma in the magnetosphere by means of measurement of the spectrum of Alfvén oscillations", *Planet. Space Sci.*, vol. 37, pp. 1011–1012, August 1989.
40. H. Kawano, K. Yumoto, V. A. Pilipenko, Y.-M. Tanaka, S. Takasaki, M. Iizima, and M. Seto, "Using two ground stations to identify magnetospheric field line eigenfrequency as a continuous function of ground latitude", *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 107, pp. A01202, August 2002.
41. F. W. Menk, D. Orr, M. A. Clilverd, A. J. Smith, C. L. Waters, D. K. Milling, and B. J. Fraser, "Monitoring spatial and temporal variations in the dayside plasmasphere using geomagnetic field line resonances", *J. Geophys. Res.*, vol. 104, pp. 19955–19970, September 1999.
42. R. E. Denton, M. R. Lessard, R. Anderson, E. G. Miftakhova, and J. W. Hughes, "Determining the mass density along magnetic field lines from toroidal eigenfrequencies: Polynomial expansion applied to CRRES data", *J. Geophys. Res.*, vol. 106, pp. 29915–29924, December 2001.
43. F. W. Menk, I. R. Mann, A. J. Smith, C. L. Waters, M. A. Clilverd, and D. K. Milling, "Monitoring the plasmopause using geomagnetic field line resonances", *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 109, pp. A04216, April 2004.
44. J. C. Samson, L. L. Cogger, and Q. Pao, "Observations of field line resonances, auroral arcs, and auroral vortex structures", *J. Geophys. Res.*, vol. 101, pp. 17373–17384, August 1996.
45. K. Stasiewicz, P. Bellan, C. Chaston, C. Kletzing, R. Lysak, J. Maggs, O. Pokhotelov, C. Seyler, P. Shukla, L. Stenflo, A. Streltsov, and J.-E. Wahlund, "Small Scale Alfvénic Structure in the Aurora", *Space Sci. Rev.*, vol. 92, pp. 423–533, May 2000.
46. J. C. Samson, R. Rankin, and V. T. Tikhonchuk, "Optical signatures of auroral arcs produced by field line resonances: comparison with satellite observations and modeling", *Ann. Geophys.*, vol. 21, pp. 933–945, April 2003.
47. A. Hasegawa, "Particle acceleration by MHD surface wave and formation of aurora", *J. Geophys. Res.*, vol. 81, pp. 5083–5090, October 1976.
48. C. K. Goertz, "Kinetic Alfvén waves on auroral field lines", *Planet. Space Sci.*, vol. 32, pp. 1387–1392, November 1984.
49. O. Saka, K. Hayashi, and A. S. Leonovich, "Ionospheric loop currents and associated ULF oscillations at geosynchronous altitudes during preonset

- intervals of substorm aurora”, *J. Geophys. Res.*, vol. 120, pp. 2460–2468, April 2015.
50. K. Yumoto, “Characteristics of localized resonance coupling oscillations of the slow magnetosonic wave in a non-uniform plasma”, *Planet. Space Sci.*, vol. 33, pp. 1029–1036, 1985.
51. V. M. Cadez, A. Csik, R. Erdelyi, and M. Goossens, “Absorption of magnetosonic waves in presence of resonant slow waves in the solar atmosphere.”, *Astron. Astrophys.*, vol. 326, pp. 1241–1251, October 1997.
52. A. S. Leonovich, D. A. Kozlov, and V. A. Pilipenko, “Magnetosonic resonance in a dipole-like magnetosphere”, *Ann. Geophys.*, vol. 24, pp. 2277–2289, 2006.
53. A. S. Leonovich and D. A. Kozlov, “Alfvénic and magnetosonic resonances in a nonisothermal plasma”, *Plasma Phys. Contr. Fus.*, vol. 51, no. 8, pp. 085007, 2009.
54. В. Л. Вдовин, О. А. Зиновьев, А. А. Иванов, Л. Л. Козоровицкий, В. В. Параил, Я. Р. Рахимбабаев, and В. Д. Русанов, “Возбуждение магнитозвукового резонанса в плазме установки токамак”, *Письма ЖЭТФ*, vol. 14, pp. 228–331, 1971.
55. I. Arregui, R. Oliver, and J. L. Ballester, “Coupling of fast and Alfvén waves in a straight bounded magnetic field with density stratification”, *Astron. Astrophys.*, vol. 402, pp. 1129–1143, May 2003.
56. M. G. Kivelson and D. J. Southwood, “Resonant ULF waves - A new interpretation”, *Geophys. Res. Lett.*, vol. 12, pp. 49–52, January 1985.
57. Л. Д. Ландау, “О колебаниях электронной плазмы”, *ЖЭТФ*, Т. 16, с. 574–586, 1946.
58. Л. Д. Ландау, и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т.8, Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., - 620 с., 1982.
59. A. S. Leonovich and D. A. Kozlov, “Magnetosonic resonances in the magnetospheric plasma”, *Earth Planets Space*, vol. 65, pp. 369–384, 2013.
60. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems, and formulas for reference and review*, New York: McGraw-Hill, 2nd enl. and rev. edition, 1968.
61. Л. Д. Ландау, и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т.1, Теоретическая механика*, М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит. - 216 с. 1988.
62. А. С. Леонович, В. А. Мазур, и В. Н. Сенаторов, “Дисперсионные эффекты магнитогидродинамических волн в неоднородной плазме”, *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*, Т. 66, с. 3–17, 1983.
63. А. С. Леонович, В. А. Мазур, и В. Н. Сенаторов, “МГД-волноводы в неоднородной плазме”, *Физика Плазмы*, Т. 11, с. 1106–1115, 1985.
64. А. В. Гульельми, “Лучевая теория распространения МГД-волн (обзор)”, *Геомагнетизм и Аэронаука*, Т. 25, с. 356–370, 1985.
65. Л. Д. Ландау, и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т.3, Квантовая Механика (нерелятивистская теория)*, М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., - 768 с., 1989.

66. А. С. Леонович В. А. Мазур, и В. Н. Сенаторов, “Альфвеновский волновод”, *ЖЭТФ*, Т. 85, с. 141–145, 1983.
67. М. Абрамовиц and И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М.: Наука, 1979.
68. А. В. Гульельми, и А. Р. Поляков, “О дискретности спектра альфвеновских колебаний”, *Геомагнетизм и Аэронаука*, Т. 23, с. 341–343, 1983.
69. I. S. Dmitrienko and V. A. Mazur, “On waveguide propagation of Alfvén waves at the plasmopause”, *Planet. Space Sci.*, vol. 33, pp. 471–477, 1985.
70. И. И. Гальперин, А. С. Леонович, В. А. Мазур, и А. В. Тащилин, “Движение пакета мелкомасштабных альфвеновских волн в среднеширотной плазмосфере”, *Космические Исследования*, Т. 24, с. 598–609, 1986.
71. J. C. Samson and R. Rankin, “The coupling of solar wind energy to MHD cavity modes, waveguide modes, and field line resonances in the Earth’s magnetosphere”, *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series*, vol. 81, pp. 253–264, 1994.
72. A. D. M. Walker, “Excitation of magnetohydrodynamic cavities in the magnetosphere”, *J. Atmos. Solar-Ter. Phys.*, vol. 60, pp. 1279–1293, September 1998.
73. A. N. Wright and I. R. Mann, “Global MHD Eigenmodes of the Outer Magnetosphere”, in *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions*, K. Takahashi, P. J. Chi, R. E. Denton, and R. L. Lysak, Eds., 2006, vol. 169 of Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series, p. 51.
74. В. А. Мазур, “Резонансное возбуждение магнитосферы гидромагнитными волнами, падающими из солнечного ветра”, *Физика плазмы*, Т. 36, с. 953–963, 2010.
75. В. А. Мазур и Д. А. Чуйко, “Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на магнитопаузе, МГД-волновод во внешней магнитосфере и альфвеновский резонанс в глубине магнитосферы”, *Физика плазмы*, Т. 39, с. 488–503, 2013.
76. B. Roberts and A. R. Webb, “Vertical motions in an intense magnetic flux tube”, *Solar Phys.*, vol. 56, pp. 5–35, January 1978.
77. S. Vasheghani Farahani, V. M. Nakariakov, and T. van Doorselaere, “Long-wavelength torsional modes of solar coronal plasma structures”, *Astron. Astrophys.*, vol. 517, pp. A29, July 2010.
78. C. R. Chappell, “Detached plasma regions in the magnetosphere”, *J. Geophys. Res.*, vol. 79, pp. 1861–1870, 1974.
79. J. L. Posch, M. J. Engebretson, M. T. Murphy, M. H. Denton, M. R. Lessard, and R. B. Horne, “Probing the relationship between electromagnetic ion cyclotron waves and plasmaspheric plumes near geosynchronous orbit”, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 115, pp. 11205, November 2010.
80. M. E. Usanova, F. Darrouzet, I. R. Mann, and J. Bortnik, “Statistical analysis of EMIC waves in plasmaspheric plumes from Cluster observations”, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 118, pp. 4946–4951, August 2013.
81. S. M. Kaye and M. G. Kivelson, “Observations of Pc 1-2 waves in the outer magnetosphere”, *J. Geophys. Res.*, vol. 84, pp. 4267–4276, August 1979.



82. N. Sato, T. Hirasawa, and Y. Shirokura, "Fingerprint structure Pc 1 geomagnetic pulsations", Geophys. Res. Lett., vol. 14, pp. 664–667, June 1987.
83. A. Roux, R. Gendrin, N. Wehrlin, R. Pellat, and R. Welti, "Fine structure of Pc 1 pulsations: 2. Theoretical interpretation", J. Geophys. Res., vol. 78, pp. 3176–3181, June 1973.
84. H. B. Liemohn, "Cyclotron-resonance amplification of VLF and ULF whistlers", J. Geophys. Res., vol. 72, pp. 39–55, 1967.
85. B. A. Tverskoy, "Main mechanisms in the formation of the Earth's radiation belts.", Rev. Geophys. Space Phys., vol. 7, pp. 219–231, 1969.
86. А. С. Леонович, "О распространении геомагнитных пульсаций в магнитосферных дактах", Геомагнетизм и аэрномия, Т. 24, с. 94–98, 1984.
87. A. V. Buzevich, A. S. Leonovich, and V. A. Parkhomov, "Geomagnetic pulsations associated with MHD-waveguide in magnetospheric ducts", Planet. Space Sci., vol. 35, pp. 1093–1097, 1987.
88. M. J. Rycroft, "A review of in situ observations of the plasmopause", Annales de Geophysique, vol. 31, pp. 1–16, March 1975.
89. И. А. Кринберг, и А. В. Тащилин, Ионосфера и плазмосфера, М., Наука, 1984.
90. V. A. Mazur and A. S. Potapov, "The evolution of pearls in the earth's magnetosphere", Planet. Space Sci., vol. 31, pp. 859–863, August 1983.
91. А. В. Бузевич, и А. С. Потапов, "Высокоширотные геомагнитные пульсации типа Pc1", Исследования по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца, Т. 46, с. 63–70, 1979.
92. В. А. Пархомов, А. С. Потапов, и В. И. Луковникова, "Регулярные узко локализованные пульсации в диапазоне периодов 10-25 с", Исследования по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца, Т. 66, с. 69–75, 1983.
93. W. I. Axford, "Viscous interaction between the solar wind and the Earth's magnetosphere", Planet. Space Sci., vol. 12, pp. 45–53, January 1964.
94. J. F. McKenzie, "Hydromagnetic wave interaction with the magnetopause and the bow shock", Planet. Space Sci., vol. 18, pp. 1–23, 1970.
95. P. Verzariu, "Reflection and refraction of hydromagnetic waves at the magnetopause", Planet. Space Sci., vol. 21, pp. 2213–2225, December 1973.
96. A. Wolfe and R. L. Kaufmann, "MHD wave transmission and production near the magnetopause", J. Geophys. Res., vol. 80, pp. 1764–1775, May 1975.
97. A. S. Leonovich, V. V. Mishin, and J. B. Cao, "Penetration of magnetosonic waves into the magnetosphere: influence of a transition layer", Ann. Geophys., vol. 21, pp. 1083–1093, 2003.
98. L. M. Brekhovskikh, D. Lieberman, R. T. Beyer, F. N. Frenkiel, and N. Chako, "Waves in Layered Media", Physics Today, vol. 15, pp. 70, 1962.
99. J. E. Anderson, Magnetohydrodynamic shock waves // Cambridge: MIT Press, 1963.
100. V. M. Mishin, C. T. Russell, T. I. Saifudinova, and A. D. Bazarzhapov, "Study of weak substorms observed during December 8, 1990, geospace environment modeling campaign: Timing of different types of substorm onsets", J. Geophys. Res., vol. 105, pp. 23263–23276, October 2000.

101. D. A. Kozlov, "Transformation and absorption of magnetosonic waves generated by solar wind in the magnetosphere", Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, vol. 72, pp. 1348–1353, December 2010.
102. V. A. Sergeev, R. J. Pellinen, and T. I. Pulkkinen, "Steady Magnetospheric Convection: A Review of Recent Results", Space Sci. Rev., vol. 75, pp. 551–604, February 1996.
103. S. W. H. Cowley, D. J. Southwood, and M. A. Saunders, "Interpretation of magnetic field perturbations in the earth's magnetopause boundary layers", Planet. Space Sci., vol. 31, pp. 1237–1258, November 1983.
104. J. M. Ruohoniemi and K. B. Baker, "Large-scale imaging of high-latitude convection with Super Dual Auroral Radar Network HF radar observations", J. Geophys. Res., vol. 103, pp. 20797–20811, September 1998.
105. T. A. Potemra, L. J. Zanetti, P. F. Bythrow, A. T. Y. Lui, and T. Iijima, "B(y)-dependent convection patterns during northward interplanetary magnetic field", J. Geophys. Res., vol. 89, pp. 9753–9760, November 1984.
106. M. Förster, S. E. Haaland, G. Paschmann, J. M. Quinn, R. B. Torbert, H. Vaith, and C. A. Kletzing, "High-latitude plasma convection during Northward IMF as derived from in-situ magnetospheric Cluster EDI measurements", Ann. Geophys., vol. 26, pp. 2685–2700, September 2008.
107. N. U. Crooker, J. G. Lyon, and J. A. Fedder, "MHD model merging with IMF  $B_y$ : Lobe cells, sunward polar cap convection, and overdraped lobes", J. Geophys. Res., vol. 103, pp. 9143–9152, May 1998.
108. W. I. Axford and C. O. Hines, "A unifying theory of high-latitude geophysical phenomena and geomagnetic storms", Canadian Journal of Physics, vol. 39, pp. 1433–1464, 1961.
109. A. Miura, "Anomalous transport by magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in the solar wind-magnetosphere interaction", J. Geophys. Res., vol. 89, pp. 801–818, February 1984.
110. V. A. Mazur and A. S. Leonovich, "ULF hydromagnetic oscillations with the discrete spectrum as eigenmodes of MHD-resonator in the near-Earth part of the plasma sheet", Ann. Geophys., vol. 24, pp. 1639–1648, 2006.
111. В. А. Сергеев и Н. А. Цыганенко, Магнитосфера Земли, М.: Наука, - 174 с., 1980.
112. J. E. Borovsky, M. F. Thomsen, R. C. Elphic, T. E. Cayton, and D. J. McComas, "The transport of plasma sheet material from the distant tail to geosynchronous orbit", J. Geophys. Res., vol. 103, pp. 20297–20332, September 1998.
113. В. Л. Сизоненко, и К. Н. Степанов, "Квазилинейная теория плазменных колебаний с линейной дисперсией", Украинский физический журнал, Т. 13, с. 876–878, 1968.
114. A. S. Leonovich, "MHD-instability of the magnetotail: Global modes", Planet. Space Sci., vol. 59, pp. 402–411, 2011.
115. J. W. Dungey, "Electrodynamics of the Outer Atmosphere", in Physics of the Ionosphere, Report of the Conference held at the Cavendish Laboratory, Cambridge, September, 1954. London: The Physical Society, p. 229–236, 1955.

116. E. N. Parker, "Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. I. Integration of the Momentum Equation.", *Astrophys. J.*, vol. 139, pp. 72–91, January 1964.
117. Л. Д. Ландау, "Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости", *Доклады Академии Наук СССР*, Т. 44, с. 151–153, 1944.
118. С. И. Сыроватский, "Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде", *ЖЭТФ*, Т. 27, с. 121–123, 1954.
119. A. Michalke, "On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 19, pp. 543–556, 1964.
120. V. V. Mishin and A. G. Morozov, "On the effect of oblique disturbances on Kelvin-Helmholtz instability at magnetospheric boundary layers and in solar wind", *Planet. Space Sci.*, vol. 31, pp. 821–828, August 1983.
121. W. Blumen, "Shear layer instability of an inviscid compressible fluid", *J. Fluid Mech.*, vol. 40, pp. 769–781, 1970.
122. W. Blumen, P. G. Drazin, and D. F. Billings, "Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 2", *J. Fluid Mech.*, vol. 71, pp. 305–316, September 1975.
123. P. G. Drazin and A. Davey, "Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. III", *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 255–260, September 1977.
124. A. Miura and P. L. Pritchett, "Nonlocal stability analysis of the MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma", *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 7431–7444, September 1982.
125. T. P. Ray and A. I. Ershkovich, "Kelvin-Helmholtz instabilities in a sheared compressible plasma", *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 204, pp. 821–831, August 1983.
126. R. Rankin, P. Frycz, J. C. Samson, and V. T. Tikhonchuk, "Shear flow vortices in magnetospheric plasmas", *Phys. Plasmas*, vol. 4, pp. 829–840, March 1997.
127. A. Miura, "Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary - Dependence on the magnetosheath sonic Mach number", *J. Geophys. Res.*, vol. 97, pp. 10655–10675, July 1992.
128. P. I. Kolykhalov, "Instability of a shear discontinuity in a gas moving near a wall", *Fluid Dynamics*, vol. 19, pp. 465–469, 1984.
129. A. S. Leonovich and V. V. Mishin, "Stability of magnetohydrodynamic shear flows with and without bounding walls", *J. Plasma Phys.*, vol. 71, pp. 645–664, 2005.
130. A. K. Sen, "Effect of Compressibility on Kelvin-Helmholtz Instability in a Plasma", *Phys. Fluids*, vol. 7, pp. 1293–1298, August 1964.
131. S. Chandrasekhar and J. Gillis, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", *Physics Today*, vol. 15, pp. 58, 1962.
132. J. W. Miles, "On the Reflection of Sound at an Interface of Relative Motion", *Acoust. Soc. Amer. J.*, vol. 29, pp. 226–228, 1957.
133. H. S. Ribner, "Reflection, Transmission, and Amplification of Sound by a Moving Medium", *Acoust. Soc. Amer. J.*, vol. 29, pp. 435–441, 1957.
134. M. Engebretson, K.-H. Glassmeier, M. Stellmacher, W. J. Hughes, and H. Lühr, "The dependence of high-latitude Pc5 wave power on solar wind velocity and on the phase of high-speed solar wind streams", *J. Geophys. Res.*, vol. 103, pp. 26271–26384, November 1998.

135. I. R. Mann and A. N. Wright, "Diagnosing the excitation mechanisms of Pc5 magnetospheric flank waveguide modes and FLRs", Geophys. Res. Lett., vol. 26, pp. 2609–2612, 1999.
136. I. R. Mann, I. Voronkov, M. Dunlop, E. Donovan, T. K. Yeoman, D. K. Milling, J. Wild, K. Kauristie, O. Amm, S. D. Bale, A. Balogh, A. Viljanen, and H. J. Opgenoorth, "Coordinated ground-based and Cluster observations of large amplitude global magnetospheric oscillations during a fast solar wind speed interval", Ann. Geophys., vol. 20, pp. 405–426, April 2002.
137. D. J. Southwood, "The hydromagnetic stability of the magnetospheric boundary", Planet. Space Sci., vol. 16, pp. 587–605, May 1968.
138. K. J. Mills, A. N. Wright, and I. R. Mann, "Kelvin-Helmholtz driven modes of the magnetosphere", Phys. Plasmas, vol. 6, pp. 4070–4087, October 1999.
139. S. Fujita, K. H. Glassmeier, and K. Kamide, "MHD waves generated by the Kelvin-Helmholtz instability in a nonuniform magnetosphere", J. Geophys. Res., vol. 101, pp. 27317–27326, December 1996.
140. V. A. Mazur and D. A. Chuiko, "Azimuthal inhomogeneity in the MHD waveguide in the outer magnetosphere", Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 120, pp. 4641–4655, June 2015.
141. J. F. McKenzie, "Hydromagnetic oscillations of the geomagnetic tail and plasma sheet", J. Geophys. Res., vol. 75, pp. 5331–5339, 1970.
142. A. S. Leonovich, "A theory of MHD instability of an inhomogeneous plasma jet", J. Plasma Phys., vol. 77, pp. 315–337, 2011.
143. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Why do ultra-low-frequency MHD oscillations with a discrete spectrum exist in the magnetosphere?", Ann. Geophys., vol. 23, pp. 1075–1079, 2005.
144. W. J. Hughes and D. J. Southwood, "The screening of micropulsation signals by the atmosphere and ionosphere", J. Geophys. Res., vol. 81, pp. 3234–3240, July 1976.
145. W. J. Hughes and D. J. Southwood, "An illustration of modification of geomagnetic pulsation structure by the ionosphere", J. Geophys. Res., vol. 81, pp. 3241–3247, July 1976.
146. R. S. Newton, D. J. Southwood, and W. J. Hughes, "Damping of geomagnetic pulsations by the ionosphere", Planet. Space Sci., vol. 26, pp. 201–209, March 1978.
147. C. Greifinger and P. S. Greifinger, "Theory of hydromagnetic propagation in the ionospheric waveguide", J. Geophys. Res., vol. 73, pp. 7473–7490, December 1968.
148. C. Greifinger, "Feasibility of ground-based generation of artificial micropulsations", J. Geophys. Res., vol. 77, pp. 6761–6773, December 1972.
149. G. V. Rudenko, S. M. Churilov, and I. G. Shukhman, "Excitation of the ionospheric waveguide by a localized packet of Alfvén waves", Planet. Space Sci., vol. 33, pp. 1103–1108, October 1985.
150. S. Fujita and T. Tamao, "Duct propagation of hydromagnetic waves in the upper ionosphere. I - Electromagnetic field disturbances in high latitudes associated with localized incidence of a shear Alfvén wave", J. Geophys. Res., vol. 93, pp. 14665–14673, December 1988.

151. S. Fujita, "Duct propagation of hydromagnetic waves in the upper ionosphere. II - Dispersion characteristics and loss mechanism", *J. Geophys. Res.*, vol. 93, pp. 14674-14682, December 1988.
152. В. М. Сорокин and Г. В. Федорович, "Распространение короткопериодных волн в ионосфере", *Известия ВУЗов, Радиофизика*, vol. 25, pp. 495-501, 1982.
153. В. А. Мазур, "О распространении низкочастотного вистлера в ионосфере", *Изв. ВУЗов, Радиофизика*, Т. 31, С. 1423-1430, 1988.
154. С. В. Поляков и В. О. Рапопорт, "Ионосферный альфвеновский резонатор", *Геомagnetизм и Аэрoномия*, Т. 21, С. 816-824, 1981.
155. P. P. Beliaev, S. V. Poliakov, V. O. Rapoport, and V. I. Trakhtengerts, "The ionospheric Alfvén resonator", *J. Atmos. Ter. Phys.*, vol. 52, pp. 781-788, September 1990.
156. W. J. Hughes, "The effect of the atmosphere and ionosphere on long period magnetospheric micropulsations", *Planet. Space Sci.*, vol. 22, pp. 1157-1172, August 1974.
157. Л. С. Альперович и Е. Н. Федоров, "Влияние ионосферы на распространение пучков МГД волн", *Известия ВУЗов, Радиофизика*, Т. 27, С. 1238-1247, 1984.
158. I. P. Maltsev, S. V. Leontev, and V. B. Liatskii, "Pi-2 pulsations as a result of evolution of an Alfvén impulse originating in the ionosphere during a brightening of aurora", *Planet. Space Sci.*, vol. 22, pp. 1519-1533, November 1974.
159. P. Ellis and D. J. Southwood, "Reflection of Alfvén waves by nonuniform ionospheres", *Planet. Space Sci.*, vol. 31, pp. 107-117, January 1983.
160. С. В. Поляков, "Отражение альфвеновских волн от горизонтально неоднородной ионосферы", *Геомagnetизм и Аэрoномия*, Т. 28, С. 592-597, 1988.
161. J. M. Yarker and D. J. Southwood, "The effect of non-uniform ionospheric conductivity on standing magnetospheric Alfvén waves", *Planet. Space Sci.*, vol. 34, pp. 1213-1221, December 1986.
162. K.-H. Glassmeier, "Reflection of MHD-waves in the PC4-5 period range at ionospheres with non-uniform conductivity distributions", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 10, pp. 678-681, August 1983.
163. K.-H. Glassmeier, "On the influence of ionospheres with non-uniform conductivity distribution on hydromagnetic waves", *J. Geophys.*, vol. 54, pp. 125-137, 1984.
164. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "An electromagnetic field, induced in the ionosphere and atmosphere and on the earth's surface by low-frequency Alfvén oscillations of the magnetosphere general theory", *Planet. Space Sci.*, vol. 39, pp. 529-546, 1991.
165. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "An electromagnetic field, induced on the earth's surface by standing Alfvén waves in the magnetosphere - The particular kinds of oscillations", *Planet. Space Sci.*, vol. 39, pp. 547-556, 1991.
166. G. Crowley, W. J. Hughes, and T. B. Jones, "Observational evidence of cavity modes in the earth's magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, pp. 12233-12240, November 1987.

167. W. Allan and E. M. Poulter, "Damping of magnetospheric cavity modes", *J. Geophys. Res.*, vol. 94, pp. 11843–11853, September 1989.
168. K. Yumoto, "External and internal sources of low-frequency MHD waves in the magnetosphere - A review", *J. Geomag. Geoelectr.*, vol. 40, pp. 293–311, 1988.
169. Л. С. Альперович и Е. Н. Федоров, "Генерация низкочастотных электромагнитных колебаний полем мощной радиоволны в ионосфере", *Известия ВУЗов, Радиофизика*, Т. 24, С. 276–292, 1981.
170. В. Б. Ляцкий, и Ю. П. Мальцев, *Ионосферные предвестники землетрясений*, М: Наука, 1983.
171. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Penetration to the Earth's surface of standing Alfvén waves excited by external currents in the ionosphere", *Ann. Geophys.*, vol. 14, pp. 545–556, 1996.
172. J. W. Dungey, "Hydromagnetic Waves", in *Physics of Geomagnetic Phenomena*, S. Matsushita and W. H. Campbell, Eds., 1967, p. 913.
173. H. R. Radoski, "Highly asymmetric MHD resonances: The guided poloidal mode", *J. Geophys. Res.*, vol. 72, pp. 4026–4027, August 1967.
174. А. Л. Крылов, А. Е. Лифшиц, и Е. Н. Федоров, "О резонансных свойствах магнитосферы", *Изв. АН СССР, Физика Земли*, С. 49–58, 1981.
175. A. L. Krylov and A. E. Lifshits, "Quasi-Alfvén oscillations of magnetic surfaces", *Planet. Space Sci.*, vol. 32, pp. 481–492, April 1984.
176. W. Allan, S. P. White, and E. M. Poulter, "Impulse-excited hydromagnetic cavity and field-line resonances in the magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 34, pp. 371–385, April 1986.
177. W. Allan, E. M. Poulter, and S. P. White, "Structure of magnetospheric MHD resonances for moderate 'azimuthal' asymmetry", *Planet. Space Sci.*, vol. 35, pp. 1193–1198, September 1987.
178. А. С. Леонович и В. А. Мазур, "Альфвеновский резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере", *Физика плазмы*, Т. 15, С. 660–673, 1989.
179. A. N. Wright, "Coupling of fast and Alfvén modes in realistic magnetospheric geometries", *J. Geophys. Res.*, vol. 97, pp. 6429–6438, May 1992.
180. А. Е. Лифшиц и Е. Н. Федоров, "Гидромагнитные колебания магнитосферного резонатора", *Доклады Академии Наук СССР*, Т. 287, С. 90–94, 1986.
181. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (monochromatic oscillations)", *Planet. Space Sci.*, vol. 37, pp. 1095–1116, 1989.
182. L. Chen and S. C. Cowley, "On field line resonances of hydromagnetic Alfvén waves in dipole magnetic field", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 16, pp. 895–897, 1989.
183. D.-H. Lee and R. L. Lysak, "Magnetospheric ULF wave coupling in the dipole model - The impulsive excitation", *J. Geophys. Res.*, vol. 94, pp. 17097–17103, December 1989.
184. D.-H. Lee and R. L. Lysak, "Monochromatic ULF wave excitation in the dipole magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 96, pp. 5811–5817, April 1991.
185. D.-H. Lee, "Dynamics of MHD wave propagation in the low-latitude magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 101, pp. 15371–15386, July 1996.

186. K. Yumoto, T. Saito, S.-I. Akasofu, B. T. Tsurutani, and E. J. Smith, "Propagation mechanism of daytime Pc 3-4 pulsations observed at synchronous orbit and multiple ground-based stations", *J. Geophys. Res.*, vol. 90, pp. 6439-6450, July 1985.
187. C. Z. Cheng and C. S. Lin, "Eigenmode analysis of compressional waves in the magnetosphere", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 14, pp. 884-887, August 1987.
188. M. J. Engebretson, L. J. Zanetti, T. A. Potemra, W. Baumjohann, H. Luehr, and M. H. Acuna, "Simultaneous observation of Pc 3-4 pulsations in the solar wind and in the earth's magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, pp. 10053-10062, September 1987.
189. E. Fedorov, N. Mazur, V. Pilipenko, and K. Yumoto, "MHD wave conversion in plasma waveguides", *J. Geophys. Res.*, vol. 103, pp. 26595-26606, November 1998.
190. V. Pilipenko, E. Fedorov, N. Mazur, M. J. Engebretson, and W. J. Hughes, "Magnetohydrodynamic waveguide/resonator for Pc3 ULF pulsations at cusp latitudes", *Earth Planets Space*, vol. 51, pp. 441-448, June 1999.
191. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Structure of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 105, pp. 27707-27716, 2000.
192. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "On the spectrum of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 106, pp. 3919-3928, 2001.
193. А. В. Гульельми, "Кольцевая ловушка для низкочастотных волн в магнитосфере Земли.", *Письма ЖЭТФ*, Т. 12, С. 25-28, 1970.
194. А. В. Гульельми, "Магнитозвуковой канал под сводом плазмосферы", *Геоматнезизм и Аэрономия*, Т. 12, С. 147-150, 1972.
195. K. Takahashi and B. J. Anderson, "Distribution of ULF energy ( $f$  is less than 80 mHz) in the inner magnetosphere - A statistical analysis of AMPTE CCE magnetic field data", *J. Geophys. Res.*, vol. 97, pp. 10751-10773, July 1992.
196. M. G. Kivelson and D. J. Southwood, "Coupling of global magnetospheric MHD eigenmodes to field line resonances", *J. Geophys. Res.*, vol. 91, pp. 4345-4351, April 1986.
197. D. J. Southwood and M. G. Kivelson, "The effect of parallel inhomogeneity on magnetospheric hydromagnetic wave coupling", *J. Geophys. Res.*, vol. 91, pp. 6871-6876, June 1986.
198. B. G. Harrold and J. C. Samson, "Standing ULF modes of the magnetosphere - A theory", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 19, pp. 1811-1814, September 1992.
199. А. В. Тимофеев, "К теории альфвеновских колебаний неоднородной плазмы", *В кн.: Вопросы теории плазмы*, вып. 9, М., Атомиздат, С. 205-232, 1979.
200. В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, и И. Г. Шухман, "Неустойчивость несобственных колебаний, в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 9, (под ред. А.Б. Михайловского)", М., Атомиздат, С. 233-247, 1979.

201. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 41, pp. 697–717, 1993.
202. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Magnetospheric resonator for transverse-small-scale standing Alfvén waves", *Planet. Space Sci.*, vol. 43, pp. 881–883, 1995.
203. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Linear transformation of the standing Alfvén wave in an axisymmetric magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 43, pp. 885–893, 1995.
204. K. Takahashi and R. L. McPherron, "Harmonic structure of Pc 3-4 pulsations", *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 1504–1516, March 1982.
205. K. Takahashi and R. L. McPherron, "Standing hydromagnetic oscillations in the magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 32, pp. 1343–1359, November 1984.
206. M. J. Engebretson, L. J. Zanetti, T. A. Potemra, and M. H. Acuna, "Harmonically structured ULF pulsations observed by the AMPTE CCE magnetic field experiment", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 13, pp. 905–908, September 1986.
207. D. G. Mitchell, D. J. Williams, M. J. Engebretson, C. A. Cattell, and R. Lundin, "Pc 5 pulsations in the outer dawn magnetosphere seen by ISEE 1 and 2", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 967–975, February 1990.
208. A. Wolfe, D. Venkatesan, R. Slawinski, and C. G. MacLennan, "A conjugate area study of Pc 3 pulsations near cusp latitudes", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 10695–10698, July 1990.
209. C. L. Waters, F. W. Menk, B. J. Fraser, and P. M. Ostwald, "Phase structure of low-latitude Pc3-4 pulsations", *Planet. Space Sci.*, vol. 39, pp. 569–577, April 1991.
210. A. S. Potapov and V. A. Mazur, "Pc3 Pulsations: From the Source in the Upstream Region to Alfvén Resonances in the Magnetosphere. Theory and Observations", in *Solar Wind Sources of Magnetospheric Ultra-Low-Frequency Waves*, M. J. Engebretson, K. Takahashi, and M. Scholer, Eds., pp. 135–145, 1994.
211. A. Hasegawa, K. H. Tsui, and A. S. Assis, "A theory of long period magnetic pulsations. III - Local field line oscillations", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 10, pp. 765–767, August 1983.
212. W. Baumjohann, H. Junginger, G. Haerendel, and O. H. Bauer, "Resonant Alfvén waves excited by a sudden impulse", *J. Geophys. Res.*, vol. 89, pp. 2765–2769, May 1984.
213. K. Yumoto, K. Takahashi, T. Sakurai, P. R. Sutcliffe, and S. Kokubun, "Multiple ground-based and satellite observations of global Pi 2 magnetic pulsations", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 15175–15184, September 1990.
214. Н. Д. Борисов, и Б. С. Моисеев, "Возбуждение МГД-возмущений в ионосфере волной Релея", *Геомагнетизм и аэрономия*, Т. 29, С. 614–620, 1989.
215. В. А. Липеровский, О. А. Похотелов, и С. Л. Шалимов, *Магнитосферно-ионосферное взаимодействие*, М.: Наука, 303 с., 1992.



216. R. Roussel-Dupré and A. V. Gurevich, "On runaway breakdown and upward propagating discharges", *J. Geophys. Res.*, vol. 101, pp. 2297–2312, February 1996.
217. В. Д. Карлов, С. И. Козлов, и Г. Н. Ткачев, "Крупномасштабное возмущение в ионосфере, вызванное пролетом ракеты с работающим двигателем", *Космические Исследования*, Т. 18, С. 266–277, 1980.
218. H. C. Koons and M. B. Pongratz, "Electric fields and plasma waves resulting from a barium injection experiment", *J. Geophys. Res.*, vol. 86, pp. 1437–1446, March 1981.
219. Y. Galperin and M. Hayakawa, "On a possibility of parametric amplifier in the stratosphere-mesosphere suggested by active MASSA experiments with the AUREOL-3 satellite", *Earth Planets Space*, vol. 50, pp. 827–832, October 1998.
220. O. A. Pokhotelov, D. O. Pokhotelov, M. B. Gokhberg, F. Z. Feygin, L. Stenflo, and P. K. Shukla, "Alfvén solitons in the Earth's ionosphere and magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 101, pp. 7913–7916, April 1996.
221. A. S. Leonovich, "Magnetospheric MHD response to a localized disturbance in the ionosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 105, pp. 2507–2520, 2001.
222. M. Blanc, R. Kallenbach, and N. V. Erkaev, "Solar System Magnetospheres", *Space Sci. Rev.*, vol. 116, pp. 227–298, 2005.
223. M. G. Kivelson, *Planetary Magnetospheres*, In: Handbook of the Solar-Terrestrial Environment, Edt. Kamide, Y. and Chian, A. C.-L., pp. 469–492, 2007.
224. D. J. Southwood and M. A. Saunders, "Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in a magnetotail field configuration", *Planet. Space Sci.*, vol. 33, pp. 127–134, 1985.
225. A. D. M. Walker, "Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. I - Coupled magnetosonic and Alfvén waves", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, pp. 10039–10045, 1987.
226. O. K. Cheremnykh and A. S. Parnowski, "Influence of ionospheric conductivity on the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth", *Adv. Space Res.*, vol. 37, pp. 599–603, 2006.
227. S. Ohtani, A. Miura, and T. Tamao, "Coupling between Alfvén and slow magnetosonic waves in an inhomogeneous finite-beta plasma. I - Coupled equations and physical mechanism. II - Eigenmode analysis of localized ballooning-interchange instability", *Planet. Space Sci.*, vol. 37, pp. 567–577, 1989.
228. E. Hameiri, P. Laurence, and M. Mond, "The ballooning instability in space plasmas", *J. Geophys. Res.*, vol. 96, pp. 1513–1526, 1991.
229. W. W. Liu, "Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited", *J. Geophys. Res.*, vol. 102, pp. 4927–4931, 1997.
230. L. M. Zeleny and A. L. Taktakishvili, "Spontaneous magnetic reconnection mechanisms in plasma", *Astrophys. Space Sci.*, vol. 134, pp. 185–196, June 1987.
231. Л. М. Зеленый, Н. В. Малова, А. В. Артемьев, В. Ю. Попов, и А. А. Петрукович, "Тонкие токовые слои в бесстолкновительной плазме: равновесная структура, плазменные неустойчивости и ускорение частиц", *Физика плазмы*, Т. 37, С. 118–160, 2011.

232. I. V. Golovchanskaya and Y. P. Maltsev, "On the identification of plasma sheet flapping waves observed by Cluster", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 32, pp. 2102, January 2005.
233. L. M. Zelenyi, A. V. Artemyev, A. A. Petrukovich, R. Nakamura, H. V. Malova, and V. Y. Popov, "Low frequency eigenmodes of thin anisotropic current sheets and Cluster observations", *Ann. Geophys.*, vol. 27, pp. 861–868, February 2009.
234. Н. Г. Мазур, Е. Н. Федоров, и В. А. Пилипенко, "Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме", *Геомагнетизм и аэрономия*, Т. 52, С. 603–612, 2012.
235. D. Y. Klimushkin, P. N. Mager, and V. A. Pilipenko, "On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes", *Earth Planets Space*, vol. 64, pp. 777–781, 2012.
236. A. S. Leonovich and D. A. Kozlov, "On ballooning instability in current sheets", *Plasma Phys. Contr. Fus.*, vol. 55, no. 8, pp. 085013, 2013.
237. E. C. Titchmarsh and T. Teichmann, "Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Part 2", *Physics Today*, vol. 11, pp. 34, 1958.
238. D. W. Slater, E. W. Kleckner, C. Gurgiolo, J. D. Winningham, and J. U. Kozyra, "A possible energy source to power stable auroral red arcs - Precipitating electrons", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, pp. 4543–4552, May 1987.
239. J. M. Cornwall, F. V. Coroniti, and R. M. Thorne, "Unified theory of SAR arc formation at the plasmopause", *J. Geophys. Res.*, vol. 76, pp. 4428–4445, 1971.
240. W. D. Cummings, R. J. O'Sullivan, and P. J. Coleman, Jr., "Standing Alfvén waves in the magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 74, pp. 778–793, 1969.
241. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (nonstationary oscillations)", *Planet. Space Sci.*, vol. 37, pp. 1109–1116, 1989.
242. J. Vero, L. Hollo, and T. N. Potapov, A. S. и Poliushkina, "Analysis of the connections between solar wind parameters and day-side geomagnetic pulsations based on data from the observatories Nagyecenk (Hungary) and Uzur (U.S.S.R.)", *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, vol. 47, pp. 557–565, June 1985.
243. D. J. Southwood, "Localised compressional hydromagnetic waves in the magnetospheric ring current", *Planet. Space Sci.*, vol. 25, pp. 549–554, June 1977.
244. A. S. Leonovich, "Wave mechanism of the magnetospheric convection", *Planet. Space Sci.*, vol. 65, pp. 67–75, 2012.
245. D. L. Carpenter and R. R. Anderson, "An ISEE/Whistler model of equatorial electron density in the magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 97, pp. 1097–1108, February 1992.
246. D. A. Kozlov and A. S. Leonovich, "The structure of field line resonances in a dipole magnetosphere with moving plasma", *Ann. Geophys.*, vol. 26, pp. 689–698, 2008.

247. E. L. Afraimovich, I. K. Edemskiy, A. S. Leonovich, L. A. Leonovich, S. V. Voeykov, and Y. V. Yasyukevich, "MHD nature of night-time MSTIDs excited by the solar terminator", Geophys. Res. Lett., vol. 36, pp. 15106, August 2009.
248. A. Barnes, "Theory of generation of bow-shock-associated hydromagnetic waves in the upstream interplanetary medium.", Cosmic Electrodynamics, vol. 1, pp. 90–114, 1970.
249. A. V. Gul'Elmi, "Diagnostics of the Magnetosphere and Interplanetary Medium by Means of Pulsations", Space Sci. Rev., vol. 16, pp. 331–345, September 1974.
250. J. F. McClay, "On the resonant modes of a cavity and the dynamical properties of micropulsations", Planet. Space Sci., vol. 18, pp. 1673–1690, December 1970.
251. J. M. Ruohoniemi, R. A. Greenwald, K. B. Baker, and J. C. Samson, "HF radar observations of Pc 5 field line resonances in the midnight/early morning MLT sector", J. Geophys. Res., vol. 96, pp. 15697–15710, September 1991.
252. J. C. Samson, B. G. Harrold, J. M. Ruohoniemi, R. A. Greenwald, and A. D. M. Walker, "Field line resonances associated with MHD waveguides in the magnetosphere", Geophys. Res. Lett., vol. 19, pp. 441–444, March 1992.
253. R. A. Mathie, F. W. Menk, I. R. Mann, and D. Orr, "Discrete Field Line Resonances and the Alfvén Continuum in the Outer Magnetosphere", Geophys. Res. Lett., vol. 26, pp. 659–662, 1999.
254. J. A. Wanliss, R. Rankin, J. C. Samson, and V. T. Tikhonchuk, "Field line resonances in a stretched magnetotail: CANOPUS optical and magnetometer observations", Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 107, pp. A01100, July 2002.
255. X. Zhu and M. G. Kivelson, "Global mode ULF pulsations in a magnetosphere with a nonmonotonic Alfvén velocity profile", J. Geophys. Res., vol. 94, pp. 1479–1485, February 1989.
256. G. L. Siscoe, "Resonant compressional waves in the geomagnetic tail", J. Geophys. Res., vol. 74, pp. 6482–6486, 1969.
257. P. R. Sutcliffe and K. Yumoto, "Dayside Pi 2 pulsations at low latitudes", Geophys. Res. Lett., vol. 16, pp. 887–890, August 1989.
258. T. K. Yeoman and D. Orr, "Phase and spectral power of mid-latitude Pi2 pulsations - Evidence for a plasmaspheric cavity resonance", Planet. Space Sci., vol. 37, pp. 1367–1383, November 1989.
259. D.-H. Lee, "On the generation mechanism of Pi 2 pulsations in the magnetosphere", Geophys. Res. Lett., vol. 25, pp. 583–586, 1998.
260. N. A. Tsyganenko and T. Mukai, "Tail plasma sheet models derived from Geotail particle data", Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 108, pp. 1136, March 2003.
261. E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 7th ed., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin: Springer, 1964.
262. D. G. Sibeck, J. A. Slavin, and E. J. Smith, "ISEE 3 magnetopause crossings - Evidence for the Kelvin-Helmholtz instability in: Magnetotail Physics", ed. Lui, A. T. Y. and Akasofu, S.-I., pp. 73–76, 1987.

263. O. Agapitov, K.-H. Glassmeier, F. Plaschke, H.-U. Auster, D. Constantinescu, V. Angelopoulos, W. Magnes, R. Nakamura, C. W. Carlson, S. Frey, and J. P. McFadden, "Surface waves and field line resonances: A THEMIS case study", *J. Geophys. Res.*, vol. 114, pp. A00C27, December 2009.
264. L. Kepko, H. E. Spence, and H. J. Singer, "ULF waves in the solar wind as direct drivers of magnetospheric pulsations", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 29, pp. 1197, April 2002.
265. A. S. Potapov, T. N. Polyushkina, and V. A. Pulyaev, "Observations of ULF waves in the solar corona and in the solar wind at the Earth's orbit", *J. Atmos. Solar-Ter. Phys.*, vol. 102, pp. 235–242, September 2013.
266. R. Rankin, K. Kabin, and R. Marchand, "Alfvénic field line resonances in arbitrary magnetic field topology", *Adv. Space Res.*, vol. 38, pp. 1720–1729, January 2006.
267. D. A. Kozlov, A. S. Leonovich, and J. B. Cao, "The structure of standing Alfvén waves in a dipole magnetosphere with moving plasma", *Ann. Geophys.*, vol. 24, pp. 263–274, 2006.
268. T. E. Sarris, W. Liu, K. Kabin, X. Li, S. R. Elkington, R. Ergun, R. Rankin, V. Angelopoulos, J. Bonnell, K. H. Glassmeier, and U. Auster, "Characterization of ULF pulsations by THEMIS", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 36, pp. 4104, February 2009.
269. А. С. Леонович и В. А. Мазур, "Собственные ультранизкочастотные магнитозвуковые колебания ближнего плазменного слоя", *Космические исследования*, Т. 46, С. 327–334, 2008.
270. А. В. Гульельми, "Поляризационное расщепление спектра альфвеновских колебаний магнитосферы", *Геомагнетизм и Аэрономия*, Т. 10, С. 524–530, 1970.
271. D. Yu. Klimushkin and P. N. Mager, "The structure of low-frequency standing Alfvén waves in the box model of the magnetosphere with magnetic field shear", *J. Plasma Phys.*, vol. 70, pp. 379–395, 2004.
272. D. A. Kozlov, A. S. Leonovich, and J. B. Cao, "The structure of standing Alfvén waves in a dipole magnetosphere with moving plasma", *Ann. Geophys.*, vol. 24, pp. 263–274, 2006.
273. D. Yu Klimushkin, P. N. Mager, and K.-H. Glassmeier, "Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wave numbers in a finite pressure plasma in the Earth's magnetosphere", *Ann. Geophys.*, vol. 22, pp. 267–288, 2004.
274. А. Р. Поляков, А. С. Потапов, и Б. Цэгмид, "Экспериментальная оценка частоты и добротности среднеширотных альфвеновских резонаторов", *Геомагнетизм и Аэрономия*, Т. 32, С. 156–159, 1992.
275. Д. Ю. Климушкин, "Структура азимутально-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн, взаимодействующих с высокоэнергичными частицами в магнитосфере", *Физика плазмы*, Т. 24, С. 1023–1032, 1998.
276. A. Hasegawa, "Drift mirror instability of the magnetosphere.", *Phys. Fluids*, vol. 12, pp. 2642–2650, 1969.
277. D. J. Southwood, J. W. Dungey, and R. J. Etherington, "Bounce resonant interaction between pulsations and trapped particles", *Planet. Space Sci.*, vol. 17, pp. 349–361, March 1969.

278. А. Б. Михайловский и О. А. Похотелов, "Новый механизм генерации геомагнитных пульсаций быстрыми частицами", *Физика плазмы*, Т. 1, С. 430–433, 1975.
279. О. А. Похотелов и В. А. Пилипенко, "К теории дрейфово-зеркальной неустойчивости магнитосферной плазмы", *Геомагнетизм и Аэронавтика*, Т. 16, С. 504–510, 1976.
280. V. I. Karpman, B. I. Meerson, A. B. Mikhailovskii, and O. A. Pokhotelov, "The effects of bounce resonances on wave growth rates in the magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 25, pp. 573–585, June 1977.
281. K. G. Budden, *The propagation of radio waves: The theory of radio waves of low power in the ionosphere and magnetosphere*, Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1985.
282. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "The spatial structure of poloidal Alfvén oscillations of an axisymmetric magnetosphere", *Planet. Space Sci.*, vol. 38, pp. 1231–1241, 1990.
283. N. S. Erokhin and S. S. Moiseev, "Some aspects of problems in magnetohydrodynamic instability theory which can be reduced to a differential equation with an arbitrary parameter associated with the leading derivative", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 7, pp. 17–19, 1966.
284. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику, Ч1. Случайные процессы*, М.: Наука, 1976.
285. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Standing Alfvén waves with  $m \gg 1$  in an axisymmetric magnetosphere excited by a stochastic source", *Ann. Geophys.*, vol. 16, pp. 900–913, 1998.
286. B. J. Anderson, M. J. Engebretson, S. P. Rounds, L. J. Zanetti, and T. A. Potemra, "A statistical study of Pc 3-5 pulsations observed by the AMPTE/CCE magnetic fields experiment. I - Occurrence distributions", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 10495–10523, July 1990.
287. M. J. Engebretson, L. J. Zanetti, T. A. Potemra, D. M. Klumpp, R. J. Strangeway, and M. H. Acuna, "Observations of intense ULF pulsation activity near the geomagnetic equator during quiet times", *J. Geophys. Res.*, vol. 93, pp. 12795–12816, November 1988.
288. K. Takahashi, R. W. McEntire, A. T. Y. Lui, and T. A. Potemra, "Ion flux oscillations associated with a radially polarized transverse Pc 5 magnetic pulsation", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 3717–3731, April 1990.
289. A. D. M. Walker, R. A. Greenwald, A. Korth, and G. Kremser, "Stare and GEOS 2 observations of a storm time Pc 5 ULF pulsation", *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 9135–9146, November 1982.
290. K. Takahashi, "Multisatellite studies of ULF waves", *Advances in Space Research*, vol. 8, pp. 427–436, 1988.
291. T. J. Odera, D. van Swol, C. T. Russell, and C. A. Green, "PC 3,4 magnetic pulsations observed simultaneously in the magnetosphere and at multiple ground stations", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 18, pp. 1671–1674, September 1991.
292. J. P. H. Taylor and A. D. M. Walker, "Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. II - Eigenmodes of the magnetosonic and Alfvén oscillations", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, pp. 10046–10052, September 1987.

293. Д. Ю. Климушкин, "Пространственная структура азимутально мелко-масштабных гидродинамических волн в аксиально-симметричной магнитосферной плазме с конечным давлением", Физика плазмы, Т. 23, С. 858–871, 1997.
294. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "A model equation for monochromatic standing Alfvén waves in the axially-symmetric magnetosphere", J. Geophys. Res., vol. 102, pp. 11443–11456, 1997.
295. A. S. Leonovich and V. A. Mazur, "Standing Alfvén waves in the magnetosphere from a localized monochromatic source", J. Geophys. Res., vol. 104, pp. 2411–2420, 1999.
296. J. W. Willis and J. R. Davis, "VLF stimulation of geomagnetic micropulsations", J. Geophys. Res., vol. 81, pp. 1420–1432, March 1976.
297. Г. Г. Гетманцев, А. В. Гульельми, Б. И. Клайн, Д. С. Котик, С. М. Крылов, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. И. Трахтенгерц, и В. А. Троицкая, "Возбуждение магнитных пульсаций при воздействии на ионосферу излучением мощного коротковолнового передатчика", Изв. ВУЗов, Радиофизика, Т. 20, С. 1017–1019, 1977.
298. A. S. Leonovich, "A theory of field line resonance in a dipole-like axisymmetric magnetosphere", J. Geophys. Res., vol. 106, pp. 25803–25812, 2001.
299. Ю. И. Гальперин, В. А. Гладышев, Н. В. Джорджио и др., "Альвеновская волна, возбуждаемая в среднеширотной магнитосфере под действием крупномасштабной акустической волны, распространяющейся в нижней ионосфере.", Изв. АН СССР, Физика Земли, Т. 11., С. 88-98, 1985.
300. S. K. F. Hattingh and P. R. Sutcliffe, "Pc 3 pulsation eigenperiod determination at low latitudes", J. Geophys. Res., vol. 92, pp. 12433–12436, November 1987.
301. L. M. Zelenyi, A. V. Milovanov, and G. Zimbardo, "Multiscale Magnetic Structure of the Distant Tail: Self-Consistent Fractal Approach", Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series, vol. 105, pp. 321–339, 1998.
302. L. M. Zelenyi, M. I. Sitnov, H. V. Malova, and A. S. Sharma, "Thin and superthin ion current sheets. Quasi-adiabatic and nonadiabatic models", Nonlinear Processes in Geophysics, vol. 7, pp. 127–139, 2000.
303. J. Birn, "Magnetotail dynamics: survey of recent progress", in The dynamic magnetosphere, IAGA special Sopron Book Series 3. 2011, pp. 49–54, Springer science+business media B.V.
304. P. N. Mager, D. Y. Klimushkin, V. A. Pilipenko, and S. Schäfer, "Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma", Ann. Geophys., vol. 27, pp. 3875–3882, 2009.
305. J. Buechner, M. Kuznetsova, and L. M. Zelenyi, "Sheared field tearing mode instability and creation of flux ropes in the earth magnetotail", Geophys. Res. Lett., vol. 18, pp. 385–388, March 1991.
306. Л. М. Зеленый, Х. В. Малова и В. Ю. Попов, "Расщепление тонких токовых слоев в магнитосфере Земли", Письма ЖЭТФ, Т. 78, С. 742–746, 2003.
307. P. N. Mager and D. Y. Klimushkin, "Spatial localization and azimuthal wave numbers of Alfvén waves generated by drift-bounce resonance in the magnetosphere", Ann. Geophys., vol. 23, pp. 3775–3784, 2005.

308. A. D. M. Walker and H. Pekrides, "Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number 4. Standing waves in the ring current region", *J. Geophys. Res.*, vol. 101, pp. 27133–27148, 1996.
309. A. S. Parnowski, "Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth", *Ann. Geophys.*, vol. 25, pp. 1391–1403, 2007.
310. Н. Г. Мазур, Е. Н. Федоров, и В. А. Пилипенко, "Продольная структура баллонных МГД-возмущений в модельной магнитосфере", *Космические исследования*, Т. 52, С. 175–184, 2014.
311. N. V. Erkaev, V. A. Shaidurov, V. S. Semenov, D. Langmayr, and H. K. Biernat, "Peculiarities of Alfvén wave propagation along a nonuniform magnetic flux tube", *Physics of Plasmas*, vol. 12, no. 1, pp. 012905, 2005.
312. E. Frieman and M. Rotenberg, "On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria", *Reviews of Modern Physics*, vol. 32, pp. 898–902, 1960.
313. A. Miura, "A magnetospheric energy principle for hydromagnetic stability problems", *J. Geophys. Res.*, vol. 112, pp. A06234, 2007.
314. B. Inhester, "Resonance absorption of Alfvén oscillations in a nonaxisymmetric magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 91, pp. 1509–1518, February 1986.
315. S. Schulze-Berge, S. Gowley, and L. Chen, "Theory of field line resonances of standing shear Alfvén waves in three-dimensional inhomogeneous plasmas", *J. Geophys. Res.*, vol. 97, pp. 3219–3222, March 1992.
316. E. N. Fedorov, N. G. Mazur, V. A. Pilipenko, and K. Yumoto, "On the theory of field line resonances in plasma configurations", *Phys. Plasmas*, vol. 2, pp. 527–532, February 1995.
317. C. Z. Cheng, "MHD field line resonances and global modes in three-dimensional magnetic fields", *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 108, pp. 1002, January 2003.
318. P. M. Ostwald, F. W. Menk, B. J. Fraser, C. L. Waters, and P. W. McNabb, "Spatial and temporal characteristics of 15-100 mHz ULF waves recorded across a low-latitude azimuthal array", *Ann. Geophys.*, vol. 11, pp. 742–752, August 1993.
319. K.-H. Glassmeier, S. Buchert, U. Motschmann, A. Korth, and A. Pedersen, "Concerning the generation of geomagnetic giant pulsations by drift-bounce resonance ring current instabilities", *Annales Geophysicae*, vol. 17, pp. 338–350, March 1999.
320. A. V. Agapitov and O. K. Cherenykh, "Polarization of ULF waves in the earth's magnetosphere", *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, vol. 27, pp. 117–123, June 2011.
321. S. G. Claudepierre, I. R. Mann, K. Takahashi, J. F. Fennell, M. K. Hudson, J. B. Blake, J. L. Roeder, J. H. Clemmons, H. E. Spence, G. D. Reeves, D. N. Baker, H. O. Funsten, R. H. W. Friedel, M. G. Henderson, C. A. Kletzing, W. S. Kurth, R. J. MacDowall, C. W. Smith, and J. R. Wygant, "Van Allen Probes observation of localized drift resonance between poloidal mode ultra-low frequency waves and 60 keV electrons", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 40, pp. 4491–4497, September 2013.

322. S. Schäfer, K. H. Glassmeier, P. T. I. Eriksson, P. N. Mager, V. Pierrard, K. H. Fornacon, and L. G. Blomberg, "Spatio-temporal structure of a poloidal Alfvén wave detected by Cluster adjacent to the dayside plasmopause", *Annales Geophysicae*, vol. 26, pp. 1805–1817, June 2008.
323. D. Y. Klimushkin, A. S. Leonovich, and V. A. Mazur, "On the propagation of transversally small-scale standing Alfvén waves in a three-dimensionally inhomogeneous magnetosphere", *J. Geophys. Res.*, vol. 100, pp. 9527–9534, 1995.
324. A. Salat and J. A. Tataronis, "Conditions for existence of orthogonal coordinate systems oriented by magnetic field lines", *J. Geophys. Res.*, vol. 105, pp. 13055–13062, June 2000.
325. П. К. Рашевский, *Курс дифференциальной геометрии, 3-е издание*, М., ГИТТЛ, 1950.
326. S. Hamada, "Hydromagnetic equilibria and their proper coordinates", *Nuclear Fus.*, vol. 2, pp. 23–37, June 1962.
327. S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Wiley, New York, 1982.
328. C. Foullon, C. J. Farrugia, A. N. Fazakerley, C. J. Owen, F. T. Gratton, and R. B. Torbert, "Evolution of Kelvin-Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause", *J. Geophys. Res.*, vol. 113, pp. 11203, November 2008.
329. O. V. Agapitov and O. K. Cheremnykh, "Magnetospheric ULF waves driven by external sources", *Advances in Astronomy and Space Physics*, vol. 3, pp. 12–19, August 2013.
330. H. R. Radoski, "Magnetic toroidal resonances and vibrating field lines", *J. Geophys. Res.*, vol. 71, pp. 1891–1893, April 1966.
331. V. A. Troitskaya and A. V. Gul'Elmi, "Geomagnetic Micropulsations and Diagnostics of the Magnetosphere", *Space Sci. Rev.*, vol. 7, pp. 689–768, December 1967.
332. A. Guglielmi, J. Kangas, and A. Potapov, "Quasiperiodic modulation of the Pc1 geomagnetic pulsations: An unsettled problem", *J. Geophys. Res.*, vol. 106, pp. 25847–25856, November 2001.
333. M. Volwerk, K.-H. Glassmeier, R. Nakamura, T. Takada, W. Baumjohann, B. Klecker, H. Rème, T. L. Zhang, E. Lucek, and C. M. Carr, "Flow burst-induced Kelvin-Helmholtz waves in the terrestrial magnetotail", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 34, pp. 10102, May 2007.
334. H. Turkakin, I. R. Mann, and R. Rankin, "Kelvin-Helmholtz unstable magnetotail flow channels: Deceleration and radiation of MHD waves", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 41, pp. 3691–3697, June 2014.
335. I. R. Mann, A. N. Wright, K. J. Mills, and V. M. Nakariakov, "Excitation of magnetospheric waveguide modes by magnetosheath flows", *J. Geophys. Res.*, vol. 104, pp. 333–354, January 1999.
336. H. Turkakin, R. Rankin, and I. R. Mann, "Primary and secondary compressible Kelvin-Helmholtz surface wave instabilities on the Earth's magnetopause", *J. Geophys. Res.*, vol. 118, pp. 4161–4175, July 2013.
337. A. D. M. Walker, "Excitation of field line resonances by sources outside the magnetosphere", *Ann. Geophys.*, vol. 23, pp. 3375–3388, November 2005.



338. В. А. Мазур и Д. А. Чуйко, “Возбуждение магнитосферного МГД-резонатора неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца”, Физика плазмы, Т. 37, С. 913–934, 2011.
339. В. А. Мазур, “Резонансное возбуждение магнитосферы гидромагнитными волнами, падающими из солнечного ветра”, Физика плазмы, Т. 36, С. 953–963, 2010.
340. В. А. Мазур и Д. А. Чуйко, “Влияние МГД-волновода во внешней магнитосфере на отражение гидромагнитных волн от сдвигового течения на магнитопаузе”, Физика плазмы, Т. 39, С. 959–975, 2013.
341. F. Plaschke, K.-H. Glassmeier, H. U. Auster, O. D. Constantinescu, W. Magnes, V. Angelopoulos, D. G. Sibeck, and J. P. McFadden, “Standing Alfvén waves at the magnetopause”, Geophys. Res. Lett., vol. 36, pp. 2104, January 2009.
342. M. O. Archer, M. D. Hartinger, and T. S. Horbury, “Magnetospheric “magic” frequencies as magnetopause surface eigenmodes”, Geophys. Res. Lett., vol. 40, pp. 5003–5008, October 2013.
343. N. M. Viall, L. Kepko, and H. E. Spence, “Relative occurrence rates and connection of discrete frequency oscillations in the solar wind density and dayside magnetosphere”, J. Geophys. Res., vol. 114, pp. 1201, January 2009.
344. A. S. Leonovich, D. Y. Klimushkin, and P. N. Mager, “Experimental evidence for the existence of monochromatic transverse small-scale standing Alfvén waves with spatially dependent polarization”, J. Geophys. Res., vol. 120, pp. 5443–5454, July 2015.
345. W. Liu, J. B. Cao, X. Li, T. E. Sarris, Q.-G. Zong, M. Hartinger, K. Takahashi, H. Zhang, Q. Q. Shi, and V. Angelopoulos, “Poloidal ulf wave observed in the plasmasphere boundary layer”, Journal of Geophysical Research: Space Physics, vol. 118, no. 7, pp. 4298–4307, 2013.
346. R. Rankin, F. Fenrich, and V. T. Tikhonchuk, “Shear Alfvén waves on stretched magnetic field lines near midnight in Earth’s magnetosphere”, Geophys. Res. Lett., vol. 27, pp. 3265–3268, 2000.
347. A. Keiling, “Alfvén Waves and Their Roles in the Dynamics of the Earth’s Magnetotail: A Review”, Space Sci. Rev., vol. 142, pp. 73–156, February 2009.
348. L. M. Zelenyi, A. S. Lipatov, D. G. Lominadze, and A. L. Taktakishvili, “The dynamics of the energetic proton bursts in the course of the magnetic field topology reconstruction in the earth’s magnetotail”, Planet. Space Sci., vol. 32, pp. 313–324, March 1984.
349. W. Allan and A. N. Wright, “Hydromagnetic wave propagation and coupling in a magnetotail waveguide”, J. Geophys. Res., vol. 103, pp. 2359–2368, February 1998.
350. D.-H. Lee and R. L. Lysak, “MHD waves in a three-dimensional dipolar magnetic field: A search for Pi2 pulsations”, J. Geophys. Res., vol. 104, pp. 28691–28700, 1999.
351. R. L. Lysak, Y. Song, and T. W. Jones, “Propagation of Alfvén waves in the magnetotail during substorms”, Ann. Geophys., vol. 27, pp. 2237–2246, May 2009.

352. A. S. Leonovich, D. A. Kozlov, and J. B. Cao, "Standing Alfvén waves with  $m \gg 1$  in a dipole magnetosphere with moving plasma and aurorae", *Adv. Space Res.*, vol. 42, pp. 970–978, 2008.
353. C. Z. Cheng and A. T. Y. Lui, "Kinetic ballooning instability for substorm onset and current disruption observed by AMPTE/CCE", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 25, pp. 4091–4094, 1998.
354. C. Z. Cheng, "Physics of Substorm Growth Phase, Onset, and Dipolarization", *Space Sci. Rev.*, vol. 113, pp. 207–270, 2004.
355. M. H. Saito, Y. Miyashita, M. Fujimoto, I. Shinohara, Y. Saito, and T. Mukai, "Modes and characteristics of low-frequency MHD waves in the near-Earth magnetotail prior to dipolarization: Fitting method", *J. Geophys. Res.*, vol. 113, pp. 6201, June 2008.
356. P. Zhu and J. Raeder, "Ballooning instability-induced plasmoid formation in near-Earth plasma sheet", *J. Geophys. Res.*, vol. 119, pp. 131–141, January 2014.
357. J. B. Cao, X. H. Wei, A. Y. Duan, H. S. Fu, T. L. Zhang, H. Reme, and I. Dandouras, "Slow magnetosonic waves detected in reconnection diffusion region in the Earth's magnetotail", *J. Geophys. Res.*, vol. 118, pp. 1659–1666, April 2013.
358. J. Du, T. L. Zhang, R. Nakamura, C. Wang, W. Baumjohann, A. M. Du, M. Volwerk, K.-H. Glassmeier, and J. P. McFadden, "Mode conversion between Alfvén and slow waves observed in the magnetotail by THEMIS", *Geophys. Res. Lett.*, vol. 38, pp. 7101, April 2011.
359. I. I. Galperin, L. M. Zelenyi, and M. M. Kuznetsova, "Pinching of field-aligned currents as a possible mechanism for the formation of raylike auroral forms", *Kosmicheskie Issledovaniia*, vol. 24, pp. 865–874, November 1986.
360. O. Saka, K. Hayashi, and M. Thomsen, "Pre-onset auroral signatures and subsequent development of substorm auroras: a development of ionospheric loop currents at the onset latitudes", *Ann. Geophys.*, vol. 32, pp. 1011–1023, August 2014.
361. A. S. Leonovich and D. A. Kozlov, "Coupled guided modes in the magnetotails: spatial structure and ballooning instability", *Astrophys. Space Sci.*, vol. 353, pp. 9–23, September 2014.
362. W. H. Matthaeus and M. L. Goldstein, "Measurement of the rugged invariants of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind", *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 6011–6028, August 1982.
363. E. Marsch and C.-Y. Tu, "Spectral and spatial evolution of compressible turbulence in the inner solar wind", *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 11945–11956, August 1990.
364. M. L. Goldstein, D. A. Roberts, and W. H. Matthaeus, "Magnetohydrodynamic Turbulence In The Solar Wind", *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 33, pp. 283–326, 1995.

## Предметный указатель

- Альфвеновские волны**, 21
- — полоидальные, 252
  - — резонансные с  $m \sim 1$ , возбуждаемые источником в виде волнового пакета, 200
  - — резонансные с  $m \sim 1$ , возбуждаемые импульсными источниками, 199
  - — резонансные с  $m \sim 1$ , возбуждаемые стохастическими источниками типа «белый шум», 202
  - — резонансные с  $m \sim 1$ , возбуждаемые широкополосными источниками, 197
  - — тороидальные с  $m \gg 1$ , 252
  - — тороидальные с  $m \sim 1$ , 176
  - —, граничные условия на ионосфере, 152, 161
  - —, колебания, индуцируемые на поверхности Земли магнитосферными волнами, 163, 278
  - —, поляризация колебаний с  $m \gg 1$ , 332
  - —, структура колебаний с  $m \gg 1$  поперек магнитных оболочек, 266, 274

- БМЗ-волны**, 21
- , коэффициент отражения от магнитопаузы в дипольной модели магнитосферы, 237
  - , области прозрачности в дипольной модели магнитосферы, 227
  - , отражение от неоднородности, 32
  - — —, волновой пакет, 42
  - , поток энергии, 98
  - , структура в дипольной магнитосфере, 189, 222
  - , точка отражения, 33, 36, 134

- Вектор**
- волновой, 16, 21
  - координат, 21
  - магнитного поля, 20
  - скорости, 20
- Волновод**, 69
- для БМЗ-волн, 70, 80
  - для квазипоперечных альфвеновских волн, 76, 79
  - — — — цилиндрический, 88
  - для квазипродольных альфвеновских волн, 74
  - — — — цилиндрический, 85

- Генерация альфвеновских волн**
- — —, возбуждение колебаний с  $m \gg 1$  импульсным локализованным источником, 347
  - — —, возбуждение колебаний с  $m \gg 1$  стохастическим источником, 297
  - — —, возбуждение монохроматических колебаний с  $m \gg 1$  локализованным источником, 338
  - — —, импульсное возбуждение колебаний с  $m \gg 1$ , 311
  - — —, импульсное возбуждение колебаний с  $m \sim 1$ , 42
  - — —, модель «альфвеновского броска», зарегистрированного в эксперименте «МАССА», 361
  - — —, монохроматические колебания с  $m \gg 1$ , возбуждаемые в ионосфере ВЧ-радаром, 345
- Геомагнитные пульсации**, 12
- —, модель суббуравых Pi2, 200
  - —, Pc1, Pc3, высокоширотные, 92
  - —, генерация суббуравых Pi2, 241
  - —, классификация, 12

- —, колебания с дискретным спектром «магических» частот, 230
- —, модель дневных Pc3, 202
- —, модель колебаний Pi2 и SSC, 309
- Годограф колебаний
  - — в области альфвеновского резонанса, 38, 59
  - — в области магнитозвукового резонанса, 60
- Дисперсия альфвеновских волн**
  - — — поперечная, 26, 62
  - — —, поляризационное расщепление спектра альфвеновских колебаний с  $t \gg 1$ , 253
  - — —, связанная с кривизной силовых линий магнитного поля, 288
  - — —, связанная с малыми кинетическими эффектами, 424
- Затухание**
  - БМЗ-волн в области альфвеновского резонанса, 72
  - МГД-волн бесстолкновительное, 24
  - МГД-волн столкновительное, 23
  - альфвеновских волн в ионосфере, 263
- Конвекция магнитосферной плазмы под действием МГД-волн**, 114
- Координатные поверхности**, 405
- Линейная трансформация**
  - — альфвеновских и ММЗ-волн в токовом слое магнитного хвоста, 392
  - — крупномасштабной альфвеновской волны в кинетическую, 286
- МГД-волны**
  - , разложение на потенциальную и вихревую составляющие, 64
- ММЗ-волны**, 21
  - , граничные условия на ионосфере, 152
  - , точка отражения, 134
- Магнитная гидродинамика (МГД)**, 12
- Метод**
  - Лапласа решения дифф. уравнений, 290
  - Фурье решения дифф. уравнений, 329
  - стационарной фазы, 281
  - контурных интегралов решения дифф. уравнений, 393
- Модель**
  - геомагнитного хвоста, цилиндрическая, 104, 133
  - магнитного хвоста с токовым слоем, 370
  - магнитопаузы, тангенциальный разрыв, 99
  - магнитосферы, 14
    - — «box model», 32
    - — дипольная, 172, 184
    - — дипольная — с вращающейся плазмой, 205
    - — параболическая, 244
    - — околоземной среды
      - — — с ионосферой в виде тонкого слоя, 148
      - — — с наклонным геомагнитным полем, 153
      - — — переходного слоя в «теплой» плазме, 54
      - — — в «холодной» плазме, 36
    - — плазменного волокна, цилиндрическая, 85
    - — плазменного слоя геомагнитного хвоста, 241
    - — сдвигового течения в виде переходного слоя, 141
    - — сдвигового течения плазмы, 117
    - — среды, 19
    - — стохастического источника колебаний типа «белый шум», 301
    - — трехмерно-неоднородной магнитосферы, 405
- Неустойчивость**
  - , инкремент, 16
  - Кельвина–Гельмгольца, 132

- МГД-колебаний, 15
- баллонная сцепленных альфвеновских и ММЗ мод колебаний
- — — — —, расчет инкремента в локальном приближении, 375
- — — — —, расчет инкремента в ВКБ-приближении, 378
- — — — —, численный расчет инкремента, 387
- глобальных мод геомагнитного хвоста в цилиндрической модели, 142
  
- Плазменный параметр  $\beta$** , 13, 21
- Правило обхода особой точки, 35
- Приближение
- ВКБ, 37, 43, 177, 190, 223, 249, 257
- геометрической оптики, 16
- глубокой потенциальной ямы, 74
- идеальной плазмы, 36
- локальное, 369
- мелкой потенциальной ямы, 74
- тангенциального разрыва, 94
  
- Резонанс**
- ММЗ-волн с БМЗ, 107
- — — — в дипольной магнитосфере, 205
- — — —, точка резонанса, 54, 56, 107, 135
- альфвеновских волн с БМЗ, 32, 33, 66, 171
- — — — в дипольной магнитосфере, 187
- — — —, обратное влияние резонансной альфвеновской волны на поле БМЗ, 182, 192
- — — —, поглощение энергии в области резонанса, 40
- — — —, точка резонанса, 36, 107, 135
- Резонатор
- «box model» для БМЗ-волн, 230
- для БМЗ-волн в ближнем плазменном слое, 243
- для БМЗ-волн в плазмосфере, модель с дипольным магнитным полем, 238
- для БМЗ-волн во внешней магнитосфере, модель с дипольным магнитным полем, 238
- для полоидальных альфвеновских волн на плазмопаузе, 294
  
- Сдвиговые течения**, 116
- Система координат, триортогональная, 448
- Скорость
- альфвеновских волн, 12
- — —, модель распределения в магнитосфере Земли, 233
- групповая, 16
- — БМЗ-волн, 21
- — ММЗ-волн, 21
- — альфвеновских волн, 21, 28
- конвекции плазмы за счет потока БМЗ-волн через магнитопаузу, 113
- поперечная групповая альфвеновских волн с  $m \gg 1$ , 255
- Спектральная функция стохастических МГД-колебаний солнечного ветра, 427
- Стохастические колебания
- —, параметры эллипса поляризации альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$ , 306
- —, парные корреляторы, 301
- —, эллипс поляризации, 436
- Сцепленные моды МГД-колебаний, 386
  
- Тангенциальный разрыв**, условия сшивки, 97, 135
- Тензор
- диэлектрической проницаемости, 26, 48, 63
- метрический аксиально-симметричной ортогональной системы координат, 206
- проводимости плазмы, 150
- Теория, линейная, 15

**Уравнение**

- Шредингера, 70, 86
- Эйри неоднородное, 67
- Эйри однородное, 39, 58
- дисперсионное, 21
- — для БМЗ-волн в сдвиговом течении, 137
- — для БМЗ-волн, 27
- — для альфвеновских волн, 21, 27
- — для магнитозвуковых волн, 21
- для альфвеновских волн с  $m \gg 1$ , 406
- для баллонных мод МГД-колебаний, 369
- кинетическое для ионов, 109
- модельное для описания поперечной структуры альфвеновских волн с  $m \gg 1$ , 320

**Уравнения**

- Гамильтона, 16
- МГД-колебаний в неидеальной плазме, 64
- МГД-колебаний в одномерно-неоднородной плазме, 36

- для МГД-волн в дипольной магнитосфере с холодной плазмой, 186

- идеальной МГД, 20
- — — линеаризованные, 20

Условие равновесия плазменной конфигурации, 54, 373

Устойчивость сдвиговых МГД-течений, 116

- — —, плавный переходной слой, 140

- — —, тангенциальный разрыв, 134

**Характеристики** (линии постоянной фазы) альфвеновских волн с  $m \gg 1$  на координатных поверхностях  $x^3 = \text{const}$ , 408

**Частота колебаний**, 21

- — локальная, 16

**Эксперимент «МАССА»**, 361

Научное издание

*ЛЕОНОВИЧ Анатолий Сергеевич*  
*МАЗУР Виталий Айзикович*

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МГД-КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСФЕРЫ

Редактор *О.В. Салецкая*  
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*  
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 22.03.2016. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 33. Тираж 300 экз.  
Заказ № 4951.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17 Б  
E-mail: [porsova@fml.ru](mailto:porsova@fml.ru), [sale@fml.ru](mailto:sale@fml.ru)  
Сайт: <http://www.fml.ru>  
Интернет-магазин: <http://www.fmllib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в ООО «Паблит»  
127282, г. Москва, ул. Полярная, д. 31 В, стр. 1  
Сайт: [www.publit.ru](http://www.publit.ru)  
Тел.: 8(495) 685-93-18

ISBN 978-5-9221-1687-9

