

**Модель переноса магнитного поля в хвост  
магнитосферы движущимся плазменным слоем**

**В.В. Денисенко**

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

denisen@icm.krasn.ru

**Кинематическое приближение МГД**

При заданной скорости  $\mathbf{v}$  для изотропного проводника остаются уравнения

$$\mathit{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\mathit{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \quad (4)$$

$\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\sigma$  — проводимость, магнитная проницаемость считается единичной.

Следствием (1) является закон сохранения заряда

$$\mathit{div} \mathbf{j} = 0.$$

Если за границей  $\Gamma$  области  $\Omega$  находится идеальный проводник,

$$B_n |_{\Gamma} = B_n^0(l), \quad (5)$$

где  $l$  — длина дуги  $\Gamma$ , индексы  $l$  и  $n$  означают касательные и нормальную компоненты,  $B_n^0(l)$  — заданная функция.

## Двумерная задача

Рассматриваем двумерную задачу, в которой все величины не зависят от координаты  $z$ , и векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  лежат в плоскости  $x, y$ . Из  $\partial/\partial z = 0$  и  $B_z = 0$  следуют равенства  $rot_x \mathbf{B} = rot_y \mathbf{B} = 0$ , которые в силу (1) означают

$$j_x = j_y = 0. \quad (10)$$

Поскольку векторное произведение  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  имеет только  $z$  компоненту и  $\sigma \neq 0$ , из предыдущих равенств и закона Ома (4) следует, что

$$E_x = E_y = 0. \quad (11)$$

Из этих равенств и (3) получаем  $\partial E_z/\partial x = \partial E_z/\partial y = 0$ , что означает постоянство  $E_z$

$$E_z(x, y) = E_z^0. \quad (12)$$

Равенства (11, 12) обеспечивают выполнение уравнения (3). Перепишем оставшиеся два уравнения для  $\mathbf{B}$ , (2) и  $z$  компоненту (1), исключив  $\mathbf{j}$  с помощью (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \mu_0 \sigma v_x B_y + \mu_0 \sigma v_y B_x &= \mu_0 \sigma E_z^0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Эту систему уравнений необходимо решить с граничным условием (5).

В частном случае, когда проводник покоится, и  $E_z^0 = 0$ , система уравнений (13) становится системой Коши-Римана. Граничное условие (5) соответствует задаче Гильберта с индексом -1. Задача однозначно разрешима, поскольку  $B_n^0(l)$  имеет нулевой интеграл.

Традиционным способом решения задачи (13, 5) является переход к векторному потенциалу  $\psi$ , такому что

$$B_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14)$$

Тогда граничное условие (5) становится условием Дирихле

$$\psi|_{\Gamma} = \psi^0(l),$$

где функция  $\psi^0(l)$  строится интегрированием вдоль границы

$$\psi^0(l) = \int_0^l B_n^0(l') dl'.$$

В силу (14) второе уравнение (13) тождественно выполнено, а из первого получается

$$-\Delta\psi + \mu_0\sigma v_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \mu_0\sigma v_y \frac{\partial\psi}{\partial y} = \mu_0\sigma E_z^0, \quad (15)$$

то есть уравнение конвекции-диффузии.

Наличие младших членов делает операторы краевых задач для этого уравнения несамосопряженными.

## Переход к задаче переноса в гиротропной среде

Рассматриваем практически важный частный случай диффузии магнитного поля в однородной несжимаемой жидкости, когда  $\rho = const$ ,  $\sigma = const$ , или в несколько более общем случае, когда вдоль каждой линии тока сохраняется значение отношения

$$\sigma/\rho = const, \quad (16)$$

из чего следует

$$(\mathbf{vgrad})(\sigma/\rho) = 0.$$

Поэтому с учетом  $div(\rho\mathbf{v}) = 0$

$$div(\mu_0\sigma\mathbf{v}) = \mu_0\rho(\mathbf{vgrad})\frac{\sigma}{\rho} + \mu_0\frac{\sigma}{\rho}div(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (17)$$

Как и для всякого вектора с нулевой дивергенцией можно построить токовую функцию  $\beta$ :

$$\mu_0\sigma v_x = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \mu_0\sigma v_y = -\frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \int \beta d\Omega = 0. \quad (18)$$

В силу ограниченности проводимости и скорости построенная функция  $\beta$  тоже ограничена.

$$|\beta| \leq \beta_1 \leq \mu_0\sigma_1 v_1 r_1. \quad (19)$$

С использованием токовой функции  $\beta$  уравнения (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} div \mathbf{B} &= 0 \\ rot_z(\kappa\mathbf{B}) &= \mu_0\sigma E_z^0, \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициентом является тензор

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку этот тензор инвариантен относительно поворота вокруг оси  $z$ , уравнения (20) описывают некоторый процесс в гиротропной среде.

## Энергетический метод

Пространство функций  $(F, P)$

$$P|_{\Gamma} = 0, \quad \int F d\Omega = 0 \quad (21)$$

является Гильбертовым пространством с энергетическим скалярным произведением

$$\left[ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix} \right] = \int \begin{pmatrix} grad \xi \\ rot \eta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -\kappa^T \\ -\kappa & \kappa\kappa^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} grad F \\ rot P \end{pmatrix} d\Omega \quad (22)$$

Минимум функционала энергии

$$W(F, P) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix} \right] - \int P \mu_0 \sigma E_z^0 d\Omega + \oint F B_n^0(l) dl \quad (23)$$

дает решение задачи

$$div(-grad F + \beta grad P) = 0$$

$$div(\beta grad F - (1 + \beta^2) grad P) = \mu_0 \sigma E_z^0, \quad (24)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial n} + \beta \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = B_n^0(l). \quad (25)$$

Решение исходной задачи

$$\mathbf{B} = -grad F + \kappa^T rot P \quad (26)$$

В силу (26) квадратичная форма (22) равна энергии магнитного поля с множителем  $2\mu_0$

$$\left[ \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix} \right] = \int B^2 d\Omega.$$

## Модель магнитного поля

### Проводимость

Мы получили значения проводимости  $\sigma = 5 \cdot 10^{-6} S/m$  в ближнем плазменном слое,  $15 - 35 R_E$ , и  $\sigma = 2 \cdot 10^{-6} S/m$  в дальнем хвосте около  $100 R_E$  с множителями  $\ast(1/3 \div 3)$  из оценок

Cattell C.A. Experimental evaluation of the Lundquist number for the Earth's magnetopause and magnetotail. // J. Geophys. Res. V.101. No.A12. P.27309-27316. 1996.

Эти значения дают интегральные проводимости плазменного слоя  $\Sigma = 150, 60 S \ast(1/3 \div 3)$  при его толщине  $\delta z = 5 R_E$ .

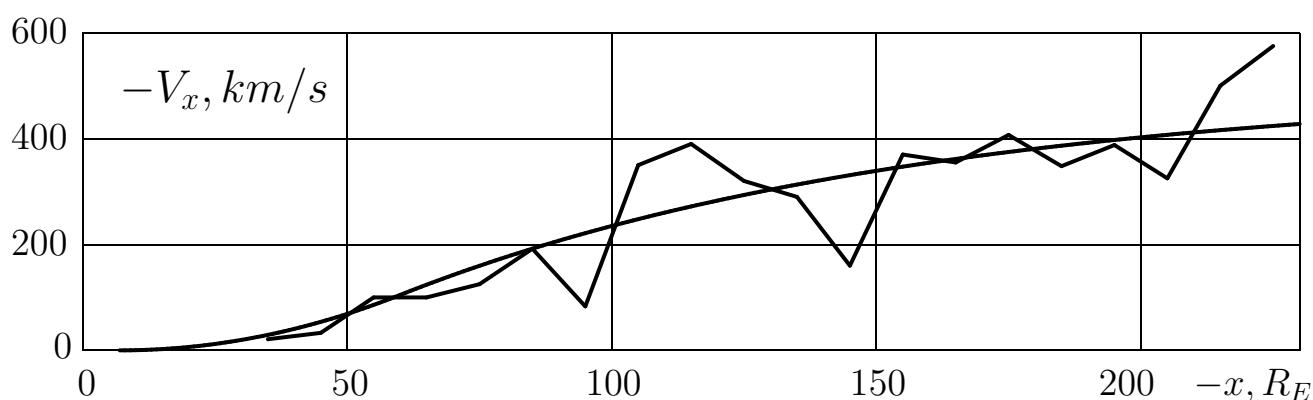
### Скорость

Мы используем распределение скорости вдоль плазменного слоя, аппроксимирующее данные ISEE-3:

Slavin J.A., Smith E.J., Sibeck D.G., Baker D.N., Zwickl R.D., Akasofu S.-I. An ISEE-3 study of average and substorm conditions in the distant magnetotail. // J. Geophys. Res. V.90. No.A11. P.10875-10895. 1985.)

$$-V_x = V_0 (1 - \exp(x - x_1)/x_0) \quad (27)$$

с параметрами  $V_0 = 400 km/s$ ,  $x_1 = -7 R_E$ ,  $x_0 = 100 R_E$ .

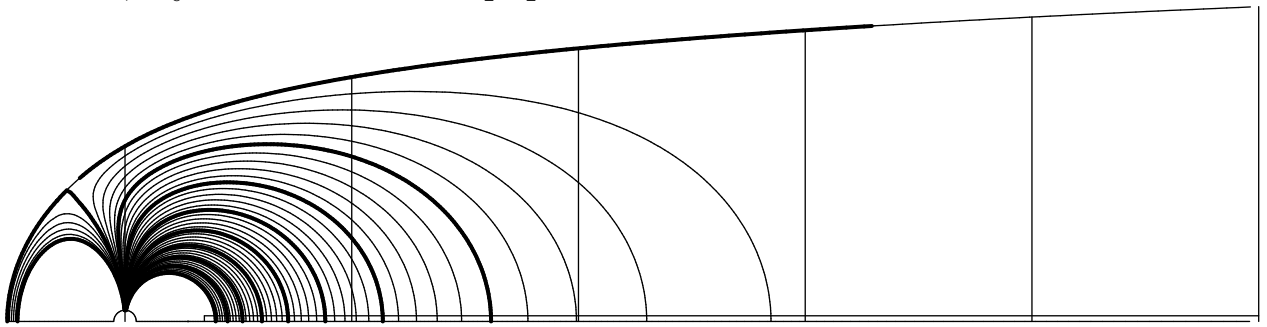


Распределение  $V_x$  — компоненты скорости в плазменном слое.

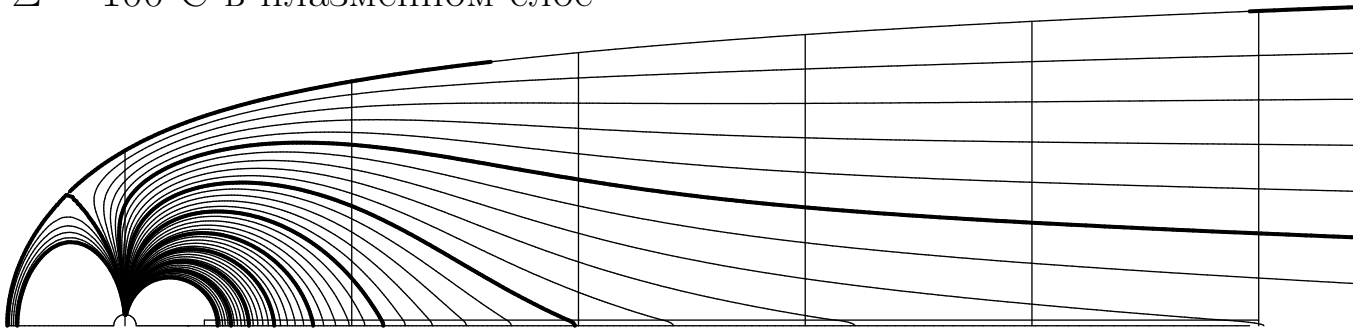
Ломаная — эксперимент, Slavin J.A., et al., 1985.

Кривая — наша аппроксимация.

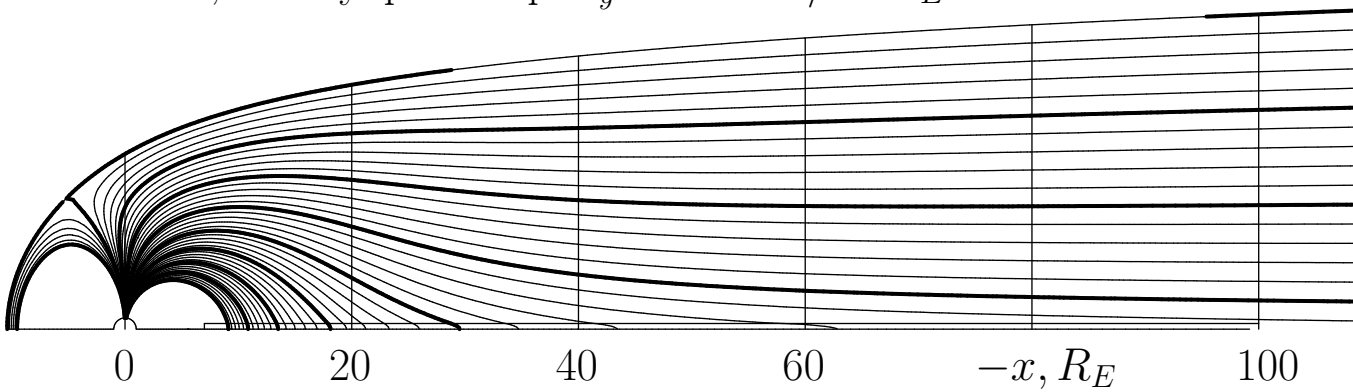
$\Sigma = 0$ , пустая магнитосфера



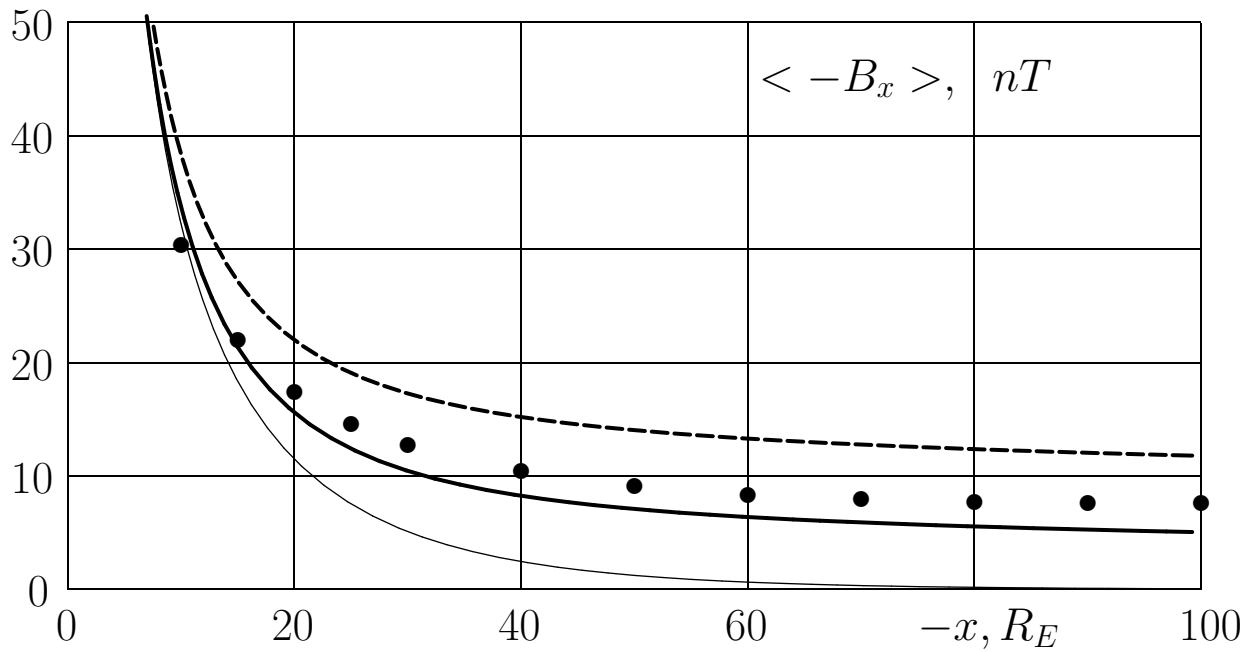
$\Sigma = 100$  С в плазменном слое



$\Sigma = 100$  С, поле утро-вечер  $E_y = 50 \text{ kV} / 50 R_E$



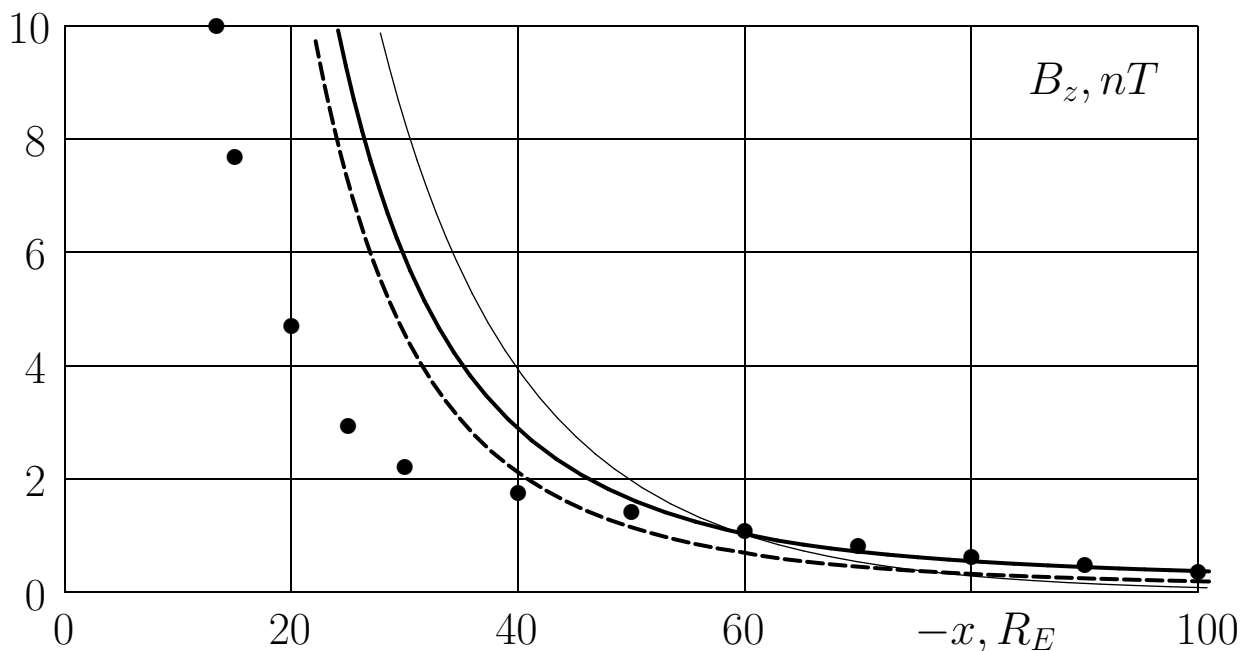
Магнитные силовые линии в замкнутой магнитосфере.  
Поток между соседними линиями  $\delta A = 20 \text{ нТ} * R_E$ .



Усредненная по сечениям  $x = const$  компонента  $-B_x$   
в северной доле хвоста.

$\Sigma = 0$  – тонкая линия,  $\Sigma = 100$  С – жирная линия,  
добавлено поле  $E_y = 50 kV / 50 R_E$  – пунктир.

Точки – Цыганенко-96 с усреднением по сечениям  $x = const$ .



Компонента  $B_z$  в плазменном слое.

$\Sigma = 0$  – тонкая линия,  $\Sigma = 100$  С – жирная линия,  
добавлено поле  $E_y = 50 kV / 50 R_E$  – пунктир.

Точки – Цыганенко-96 с усреднением по линиям  $x = const, z = 0$ .