

## О БАЛЛОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТОКОВЫХ СЛОЯХ\*

### ON BALLOONING INSTABILITY IN CURRENT SHEETS\*

**А.С. Леонович**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, leon@iszf.irk.ru*

**Д.А. Козлов**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, kozlov-da@iszf.irk.ru*

**A.S. Leonovich**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, leon@iszf.irk.ru*

**D.A. Kozlov**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, kozlov-da@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** Решена задача неустойчивости азимутально-мелкомасштабных альфвеновских и медленных магнитозвуковых (ММЗ) волн в аксиально-симметричной модели геомагнитного хвоста с токовым слоем. Найденные решения описывают неустойчивые в присутствии токового слоя колебания и относятся к области вытянутых в хвост замкнутых магнитных силовых линий. Определены спектры собственных частот основных гармоник стоячих азимутально-мелкомасштабных альфвеновских и ММЗ-волн в локальном и ВКБ-приближениях и проведено их сравнение. Показано, что полученные в этих приближениях свойства рассматриваемых колебаний кардинально различаются. В локальном приближении альфвеновские волны оказываются устойчивыми во всем диапазоне рассматриваемых магнитных оболочек. ММЗ-волны на магнитных оболочках, проходящих через токовый слой, переходят в режим аperiodической (баллонной) неустойчивости. В ВКБ-приближении как альфвеновские, так и ММЗ-волны на силовых линиях, проходящих через токовый слой, переходят в режим неустойчивости при конечной частоте собственных колебаний. Определена структура азимутально-мелкомасштабных неустойчивых альфвеновских волн поперек магнитных оболочек.

**Ключевые слова:** МГД-волны, баллонная неустойчивость, токовый слой, геомагнитный хвост.

**Abstract.** The problem of instability of the magnetotail current sheet to azimuthally small-scale Alfvén and slow magnetosonic (SMS) waves is solved. The solutions describe unstable oscillations in the presence of a current sheet and correspond to the region of stretched closed field lines of the magnetotail. The spectra of eigen-frequencies of several basic harmonics of standing Alfvén and SMS waves are found in the local and WKB approximation, which are compared. It is shown that the oscillation properties obtained in these approximations differ radically. In the local approximation, the Alfvén waves are stable in the entire range of magnetic shells. SMS waves go into the aperiodic instability regime (the regime of the “ballooning” instability), on magnetic shells crossing the current sheet. In the WKB approximation, both the Alfvén and SMS oscillations go into an unstable regime with a non-zero real part of their eigen-frequency, on magnetic shells crossing the current sheet. The structure of azimuthally small-scale Alfvén waves across magnetic shells is determined.

**Keywords:** MHD-waves, ballooning instability, current sheet, geotail.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория баллонной неустойчивости подробно разработана для магнитных конфигураций, встречающихся в задачах ядерного синтеза [Corpi, 1977; Dewar, Glasser, 1983; Cheng, Chance, 1986; Cheremnykh, 2010]. В космических исследованиях теория баллонной неустойчивости используется для объяснения наблюдаемой динамики плазмы в магнитосферах планет. Так, в последние десятилетия набирает популярность гипотеза о том, что триггером начала магнитосферной бури может быть баллонная неустойчивость, развивающаяся в тонком плазменном слое магнитного хвоста [Miura, 2001; Cheng, 2004]. Особенностью этой неустойчивости является то, что

она развивается на замкнутых силовых линиях магнитного поля, опирающихся на высокопроводящую ионосферу и вытянутых в магнитный хвост.

Типична структура магнитного хвоста с образованием токового слоя, разделяющего его на две доли (например геомагнитный хвост). Взаимодействие магнитосферы с солнечным ветром приводит к магнитосферным суббурям, сопровождаемым глобальной перестройкой структуры магнитного поля [Kamide, Maltsev, 2007]. Наблюдения, проведенные в магнитосфере Земли, дают достаточные основания полагать, что эта перестройка начинается с пересоединения магнитного поля в ближней части токового слоя геомагнитного хвоста [Takahashi et al., 1987].

\* На английском языке статья опубликована в журнале “Plasma Physics and Controlled Fusion”. 2013. V. 55. 085013. DOI: 10.1088/0741-3335/55/8/085013. На русском языке публикуется впервые по лицензии издательства IOPscience.

В последние десятилетия было выполнено множество как теоретических [Miura et al., 1989; Ohtani et al., 1989; Hameiri et al., 1991; Liu, 1997], так и экспериментальных работ [Cheng and Lui, 1998; Zhu et al., 2009], в которых доказывается, что триггером такого пересоединения могут служить неустойчивые баллонные моды МГД-колебаний.

Однако после рассмотрения всех этих работ складывается достаточно противоречивое представление о том, что из себя представляют баллонные моды. Общими требованиями, необходимыми для их существования, является наличие градиентов давления плазмы, магнитного поля и кривизны силовых линий магнитного поля. Анализ этих условий показывает, что для их реализации необходимо наличие тока в рассматриваемой плазменной конфигурации, точнее достаточно тонкого токового слоя, поскольку неустойчивость носит пороговый характер и для нее необходима достаточно большая кривизна силовых линий магнитного поля. В магнитосфере Земли такие условия реализуются в токовом слое геомагнитного хвоста. Таким образом, под баллонной неустойчивостью в данном случае следует понимать неустойчивость МГД-колебаний в присутствии токового слоя — токовую неустойчивость.

Кроме того, для того чтобы колебания были неустойчивыми, они должны иметь существенное различие пространственных масштабов вдоль и поперек магнитных силовых линий. В режим токовой баллонной неустойчивости переходят колебания, у которых длина волны вдоль силовых линий много больше длины волны поперек магнитных оболочек и обе они много больше длины волны в направлении, поперечном силовым линиям, лежащим на магнитных оболочках [Liu, 1997; Mazur et al., 2012].

В однородной плазме имеются три независимых моды МГД-колебаний — альфвеновские волны, быстрые (БМЗ) и медленные (ММЗ) магнитозвуковые волны. По поводу того, какие из этих мод становятся неустойчивыми при указанных выше условиях, в разных работах, посвященных баллонной неустойчивости, имеются разные представления. Во всех работах исключаются из рассмотрения БМЗ-волны, поскольку требования, накладываемые на структуру таких колебаний, исключают возможность их свободного распространения в рассматриваемых моделях магнитосферы. В части работ показано, что в режим баллонной неустойчивости при определенных условиях переходят альфвеновские колебания [Parnowski, 2007]. В других работах доказывается, что неустойчивыми становятся ММЗ-волны [Mazur et al., 2012]. Часто баллонные моды трактуются как связанные альфвеновские и ММЗ-колебания, распространяющиеся вдоль силовых линий магнитного поля [Ohtani et al., 1989; Liu, 1997], а их неустойчивость рассматривается как результат такого взаимодействия.

Следует отметить, что имеются два различных подхода к исследованию неустойчивых баллонных мод. Один из них предполагает получение локального дисперсионного уравнения из системы МГД-уравнений, описывающих структуру монохроматических

колебаний в неоднородной плазме, в результате применения к ней приближения эйконала [Liu, 1997; Mazur et al., 2012]. При этом, как правило, ограничиваются изучением их спектра для условий, соответствующих токовой неустойчивости рассматриваемых колебаний. Эти условия реализуются вблизи вершины силовой линии, при этом структура колебаний вдали от токового слоя не рассматривается. В других работах исследуются спектр и структура колебаний вдоль всей силовой линии с соответствующими граничными условиями на концах силовых линий, опирающихся на ионосферу [Ohtani et al., 1989]. Практически нет работ, где исследовалась бы полная пространственная структура неустойчивых колебаний, включая их структуру поперек магнитных оболочек, соответствующую заданным граничным условиям. Однако без такого исследования невозможно сказать, существуют ли вообще в рассматриваемой плазменной конфигурации неустойчивые колебания.

В большинстве упомянутых выше работ задавались модели среды, которые самосогласованно описывают параметры плазмы в вершине силовой линии и не рассматривают их поведение при удалении от токового слоя. Как правило, используются модели среды, однородные по координате, поперечной меридиональным плоскостям, в которых лежат силовые линии магнитного поля. В работах, где система МГД-уравнений решалась численно, часто трудно понять, какая модель среды использовалась. В любом случае рассматривались неоднородности плазмы и магнитного поля только вдоль силовых линий магнитного поля без соответствующей конкретизации неоднородности поперек магнитных оболочек.

В настоящей работе проведено исследование полной пространственной структуры неустойчивых МГД-мод колебаний в области вытянутых в магнитный хвост силовых линий, проходящих через токовый слой. При этом использована детально разработанная и представленная в работе модель аксиально-симметричной магнитосферы, включающая геометрию вытянутых магнитных силовых линий, распределение концентрации и давления плазмы как вдоль силовых линий, так и поперек магнитных оболочек. Определены структура и спектры альфвеновских и ММЗ-колебаний, удовлетворяющих заданным граничным условиям на ионосфере. Проведено сравнение спектров альфвеновских и ММЗ-колебаний, полученных как в локальном, так и в ВКБ-приближениях, в моделях магнитного хвоста с толстым и тонким токовыми слоями. Определена структура неустойчивых альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек, удовлетворяющая граничным условиям на асимптотиках.

Данная работа имеет следующую структуру. В разделе 1 выведено основное уравнение, описывающее структуру неустойчивых альфвеновских и ММЗ-колебаний в аксиально-симметричной магнитосфере в присутствии токового слоя. В разделе 2 подробно представлена использованная модель среды. В разделе 3

в локальном приближении получено дисперсионное уравнение и исследованы спектры альфвеновских и ММЗ-колебаний на магнитных оболочках, проходящих через токовый слой. В разделе 4 проведено исследование структуры рассматриваемых колебаний вдоль магнитных силовых линий в ВКБ-приближении и распределение по магнитным оболочкам спектров их собственных частот. В разделе 5 решена задача о структуре неустойчивых альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек. В заключении перечислены основные результаты работы и проведено их обсуждение.

## 1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Введем ортогональную криволинейную систему координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , связанную с силовыми линиями магнитного поля (см. рис. 1), в которой координату  $x^3$  направим вдоль силовой линии,  $x^1$  — поперек магнитных оболочек, а  $x^2$  дополнит систему координат до правосторонней. Смоделируем магнитное поле с вытянутыми в магнитный хвост замкнутыми силовыми линиями как векторную сумму дипольного магнитного поля и поля азимутального тока, локализованного вблизи экваториальной поверхности. Для описания поля МГД-колебаний используем систему уравнений идеальной МГД

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla \bar{P} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{B}}], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot} [\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d \bar{P}}{dt \bar{\rho}^\gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{v}}$  — векторы магнитного поля и скорости,  $\bar{\rho}, \bar{P}$  — плотность и давление плазмы,  $\gamma=5/3$  — показатель адиабаты. Будем рассматривать возмущения плазмы с малой амплитудой, что позволяет линеаризовать систему уравнений (1)–(4). Обозначим параметры невозмущенной плазмы нижним индексом ноль, а параметры возмущений — величинами без индексов

$$\bar{\rho} = \rho_0 + \rho, \quad \bar{P} = P_0 + P, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}.$$

Будем считать фоновую плазму покоящейся  $\mathbf{v}_0=0$ . В нулевом порядке теории возмущений уравнение (1) дает условие равновесия плазменной конфигурации

$$\nabla P_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0]. \quad (5)$$

Используем также условие вмороженности магнитного поля, связывающее векторы электрического и магнитного поля колебаний,

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] / c. \quad (6)$$

В этом приближении вектор электрического поля перпендикулярен внешнему магнитному полю. В соответствии с теоремой разложения Гельмгольца, произ-

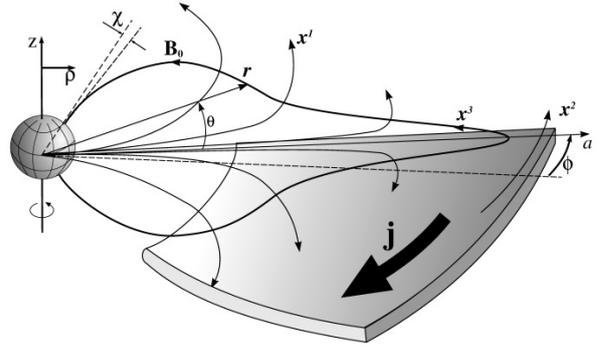


Рис. 1. Модель аксиально-симметричного магнитного поля с вытянутыми силовыми линиями, которое образовано векторной суммой дипольного магнитного поля и поля аксиально-симметричного токового слоя. Системы координат, используемые в расчетах:  $(x^1, x^2, x^3)$  — ортогональная,  $(a, \phi, \theta)$  — неортогональная криволинейные системы координат, связанные с силовыми линиями магнитного поля,  $(\rho, \phi, z)$  — цилиндрическая система координат

вольное векторное поле, в каждой точке которого определены его первые производные, может быть представлено в виде суммы потенциального и вихревого полей. Для вектора электрического поля, продольная компонента которого равна нулю, это разложение имеет вид

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \phi + [\nabla_{\perp} \times \Psi], \quad (7)$$

где  $\nabla_{\perp}$  — градиент в направлении поперек силовых линий магнитного поля,  $\phi$  и  $\Psi$  — скалярный и векторный потенциалы возмущенного электрического поля. При определенной калибровке векторный потенциал можно выбрать так, что в нем отлична от нуля только продольная (вдоль силовых линий магнитного поля) компонента  $\Psi=(0, 0, \psi)$ .

Будем считать рассматриваемую модель среды аксиально-симметричной. Тогда решения линеаризованной системы уравнений (1)–(4) можно искать в виде разложения в ряд Фурье по гармоникам вида  $\exp(ik_2 x^2 - i\omega t)$ , где  $k_2$  — азимутальная компонента волнового вектора (если  $x^2=\phi$  — азимутальный угол, то  $k_2=m=0, 1, 2, 3, \dots$  — азимутальное волновое число),  $\omega$  — частота волны. Используя соотношения (6) и (7), можно свести линеаризованную систему уравнений (1)–(4) к трем уравнениям (см. Приложение 1):

$$\begin{aligned} \nabla_1 B_0 \hat{L}_T \nabla_1 \phi - k_2^2 B_0 \hat{L}_P \phi = \\ = ik_2 \left( \nabla_1 B_0 \hat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi - B_0 \hat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi - \right. \\ \left. - B_0 \frac{\kappa_{1g}}{\sqrt{g_3}} \tilde{\Delta}_{\perp} \psi \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_0 \sqrt{g_3}}{4\pi \rho_0} \hat{L}_0 \frac{B_0}{\sqrt{g_3}} \tilde{\Delta} \psi + S^2 \bar{\Delta} \psi - L_2 \psi = \\ = -i \frac{B_0 \sqrt{g_3}}{4\pi k_2 \rho_0} \hat{L}_0 B_0 \hat{L}_T \nabla_1 \phi + ik_2 S^2 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \hat{L}_1 \phi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{L}_0 P = -i \frac{c B_0}{4\pi\omega\sqrt{g_3}} \frac{S^2}{A^2} \times \left[ i \frac{k_2 g_3}{\sqrt{g}} \hat{L}_1 \varphi - \bar{\Delta}_\perp \psi + \frac{B_0}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_1 g_2}} \times \right. \\ \left. \times \nabla_3 \frac{\kappa_{1B} A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right], \quad (10)$$

где  $g_i$  — диагональные компоненты метрического тензора ( $i=1, 2, 3$ ),  $g=g_1 g_2 g_3$ ,  $ds^2=g_1(dx^1)^2+g_2(dx^2)^2+g_3(dx^3)^2$  — квадрат элемента длины,  $\nabla_i \equiv \partial/\partial x^i$ ,  $S = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$  — скорость звука в плазме,  $A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  — альфвеновская скорость. Введены следующие дифференциальные операторы: продольный тороидальный и полоидальный операторы для альфвеновских волн

$$\hat{L}_T = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p \frac{\omega^2}{A^2}, \\ \hat{L}_P = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p^{-1} \frac{\omega^2}{A^2},$$

описывающие в холодной плазме структуру альфвеновских колебаний с тороидальной ( $m=0$ ) и полоидальной ( $m \rightarrow \infty$ ) поляризацией вдоль криволинейных силовых линий магнитного поля,  $p = \sqrt{g_2/g_1}$ , а продольный оператор для магнито-звуковых волн ( $\sigma=1/\gamma$ ) имеет вид

$$\hat{L}_0 = \frac{S^2}{\omega^2} \frac{\rho_0}{P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 + 1.$$

Аналоги оператора Лапласа:

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_\perp + \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{\rho_0}{B_0 \sqrt{g_3}}, \\ \bar{\Delta}_\perp = \frac{B_0}{P_0^\sigma} \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \left( \nabla_1 \frac{p P_0^\sigma}{B_0} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{p} \frac{P_0^\sigma}{B_0} \right), \\ \tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_\perp + \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}}, \\ \tilde{\Delta}_\perp = \frac{g_3}{\sqrt{g}} \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \frac{k_2^2}{g_2}.$$

Операторы

$$\hat{L}_1 = \frac{B_0}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{\kappa_{1B} A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 - \kappa_{1P}, \\ \hat{L}_2 = \frac{B_0 S^2}{\omega^2 P_0^\sigma \sqrt{g_1 g_2}} \nabla_3 \frac{\kappa_{1B} A^2 P_0^\sigma}{B_0 \sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 - \omega^2$$

связаны с градиентами параметров фоновой плазмы поперек магнитных оболочек:

$$\kappa_{1g} = \nabla_1 (\ln g_3), \quad \kappa_{1B} = \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} B_0), \\ \kappa_{1P} = \nabla_1 (\ln \sqrt{g_3} P_0^\sigma / B_0).$$

Уравнения (8) и (9) образуют замкнутую относительно потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$  систему уравнений, а уравнение (10) позволяет определить возмущенное давление по известным распределениям скалярного и векторного потенциалов. Отметим, что для бессилового ( $\mathbf{B}_0 \times \text{rot} \mathbf{B}_0 = 0$ ) магнитного поля, например такого, как дипольное,  $\kappa_{1B} = 0$  и соответственно  $P_0 = \text{const}$ ,  $\kappa_{1P} = \kappa_{1g}$ .

В наших дальнейших расчетах мы будем рассматривать азимутально-мелкомасштабные МГД-колебания, для которых  $|Lk_2/\sqrt{g_2}| \sim m \gg 1$ , где  $L$  — характерный масштаб неоднородности магнитосферной плазмы. Как мы увидим, в направлении вдоль силовых линий рассматриваемые колебания имеют вид стоячих между магнито-сопряженными ионосферами волн. Длина волны основных гармоник таких волн  $\sim L$ . Характерная длина волны рассматриваемых колебаний поперек магнитных оболочек также мала

$$L |\nabla_1 \ln(\varphi)/\sqrt{g_1}| \sim L |\nabla_1 \ln(\psi)/\sqrt{g_1}| \gg 1.$$

При этом операторы  $\Delta_\perp$  в уравнениях (8)–(10) можно приближенно представить в виде

$$\bar{\Delta}_\perp \approx \tilde{\Delta}_\perp \approx \Delta_\perp = \nabla_1^2 / g_1 - k_2^2 / g_2.$$

Оставляя в правой части уравнения (8) наибольшее ( $\sim \Delta_\perp \psi$ ) слагаемое, получим

$$\Delta_\perp \psi = \frac{i\sqrt{g_3}}{k_2 B_0 \kappa_{1g}} \left( \nabla_1 B_0 \hat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 B_0 \hat{L}_P \varphi \right). \quad (11)$$

Подставим (11) в левую часть (9). Оставляя в нем наибольшие слагаемые, получим

$$\hat{L}_S \nabla_1 \hat{L}_T \nabla_1 \varphi - k_2^2 \left( \hat{L}_S \hat{L}_P + \hat{L}_C \right) \varphi = 0, \quad (12)$$

где

$$\hat{L}_C = \frac{\kappa_{1g} \omega^2}{A^2 \sqrt{g_1 g_2}} \hat{L}_1,$$

продольный оператор для ММЗ-волн

$$\hat{L}_S = \frac{\kappa_{1g} \rho_0}{B_0 P_0^\sigma \sqrt{g}} \nabla_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \frac{P_0^\sigma}{\rho_0} \nabla_3 \frac{B_0}{\kappa_{1g}} + \frac{\omega^2}{c_s^2},$$

$c_s = AS/\sqrt{A^2 + S^2}$  — скорость ММЗ-волн в плазме. Как будет показано ниже, уравнение (12) описывает пространственную структуру азимутально-мелкомасштабных МГД-колебаний, в том числе и баллонные моды. Решения, описывающие такие колебания, получаются в предельном случае  $|k_2/\sqrt{g_2}| \gg |\nabla_1 \ln(\varphi)/\sqrt{g_1}| \gg L^{-1}$ , когда в уравнении (12) можно пренебречь слагаемыми  $\sim \nabla_1^2 \varphi$  и решать продольное уравнение вида

$$\hat{L}_S \hat{L}_P \varphi + \hat{L}_C \varphi = 0. \quad (13)$$

Это уравнение следует дополнить граничными условиями на концах замкнутых силовых линий, которые пересекают ионосферу в Северном ( $x^3 = x_+^3$ ) и Южном ( $x^3 = x_-^3$ ) полушариях. В нулевом прибли-

жении будем считать ионосферу идеально проводящей. Это означает, что в точках пересечения силовой линии с ионосферой обращаются в нуль тангенциальные компоненты электрического поля колебаний (при  $E_3=0$ ,  $E_1(x_{\pm}^3)=E_2(x_{\pm}^3)=0$ ). Как следует из (46) и (11), в пределе ( $k_2 \rightarrow \infty$ ) это дает следующие граничные условия на потенциал  $\varphi$ :

$$\varphi(x_{\pm}^3) = 0, \quad \hat{L}_r \varphi|_{x^3=x_{\pm}^3} = 0. \quad (14)$$

Проанализируем возможные решения уравнения (13) в двух приближениях по координате  $x^3$ . Одно из них — так называемое локальное приближение, основанное на предположении о том, что решение (13) можно искать, используя фурье-разложение по гармоникам вида  $\varphi \sim \exp(ik_3 x^3)$ . Чаше говорят о решении в приближении эйконала  $\varphi \sim \exp(i \int k_3 dx^3)$ , но с привязкой  $k_3$  к вершине силовой линии. Однако это то же самое, что искать решение в виде  $\varphi \sim \exp(ik_3 x^3)$ . При этом коэффициенты уравнения (13) следует считать постоянными. В неоднородной плазме такое предположение, строго говоря, является неправомерным, однако имеется значительное число работ в которых оно используется (например, Liu, 1997; Mazur et al., 2012). При этом можно получить локальное дисперсионное уравнение для рассматриваемых МГД-колебаний. Обычно выбираются значения параметров плазмы, соответствующие вершине силовой линии, где имеют место наибольшие градиенты параметров по поперечной координате  $x^1$ . Это обосновывается качественными рассуждениями о том, что рост амплитуды рассматриваемых колебаний определяется именно приэкваториальной областью магнитосферы. Структура таких колебаний вдали от экваториальной поверхности, как правило, не рассматривается.

Более подходящим для решения (13) представляется использование ВКБ-приближения. Оно хорошо описывает структуру и спектр продольных гармоник с большими волновыми числами, однако качественно применимо и для анализа основных гармоник. Точное решение (13) для основных гармоник можно найти только численным интегрированием. В настоящей работе мы ограничимся анализом только локального и ВКБ-приближений. В последующих разделах мы построим решение (13) в двух этих приближениях и проведем их сравнение.

## 2. МОДЕЛЬ СРЕДЫ

Зададим модель магнитного поля следующим образом. Будем в меридиональном сечении описывать форму магнитной силовой линии ее радиусом  $r=f(a, \theta)$ , отсчитываемым от центра Земли (см. рис. 1), где  $a$  — экваториальный радиус силовой линии,  $\theta$  — ее широта, отсчитываемая от экватора. Будем рассматривать модель магнитосферы, симметричную относительно экваториальной плоскости.

Форма силовой линии дипольного магнитного поля описывается уравнением вида  $r=r_d=a \cos^2 \theta$ , а его напряженность

$$B_d = \bar{B}_d \left( \frac{R_E}{a} \right)^3 \frac{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}{\cos^6 \theta},$$

где  $\bar{B}_d = 0.32$  Гс — напряженность магнитного поля на поверхности Земли на экваторе,  $R_E$  — радиус Земли. Для дальнейших расчетов мы используем также цилиндрическую систему координат  $(\rho, \phi, z)$  (см. рис. 1). Компоненты дипольного магнитного поля в этой системе координат  $\mathbf{B}_d=(B_{d\rho}, 0, B_{dz})$  имеют вид:

$$B_{d\rho} = B_d \cos \bar{\theta}, \quad B_{dz} = B_d \sin \bar{\theta},$$

где  $\bar{\theta} = \arccos(3 \sin \theta \cos \theta / \sqrt{1+3 \sin^2 \theta})$  — угол между касательной к дипольной силовой линии и осью  $\rho$ .

Для того чтобы смоделировать магнитное поле азимутального тока  $\mathbf{B}_j=(B_{j\rho}, 0, B_{jz})$ , используем следующую модель для компоненты

$$B_{j\rho} = \frac{B_{j\infty}}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right] \operatorname{th} \frac{z}{\Delta},$$

где  $\tilde{\rho} \approx 10 R_E$  — положение внутренней границы плазменного слоя,  $\Delta_\rho \approx 2 R_E$  — характерная ширина переходной области,  $\Delta$  — характерная толщина токового слоя (см. рис. 1),  $B_{j\infty} \approx 20$  нТл — напряженность магнитного поля в долях геомагнитного хвоста вдали от токового слоя. Известно, что толщина токового слоя варьирует в очень широких пределах [Bin, 2011] от  $\Delta \sim (1-2)R_E$  в магнитоспокойных условиях (толстый токовый слой) до  $\Delta \sim (0.1-0.4)R_E$  в возмущенной магнитосфере (тонкий токовый слой). В наших численных расчетах мы принимали  $\Delta=0.2R_E$  для тонкого токового слоя и  $\Delta=1.5R_E$  для толстого токового слоя.

Поскольку магнитное поле тока должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho B_{j\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial B_{jz}}{\partial z} = 0,$$

имеем

$$B_{jz} = -\frac{B_{j\infty} \Delta}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_\rho} \right) + \frac{1}{\Delta_\rho \operatorname{ch}^2(\rho - \tilde{\rho}) / \Delta_\rho} \right] \ln \operatorname{ch} \frac{z}{\Delta}.$$

Компонента  $B_{jz}$  имеет особенность при  $\rho \rightarrow 0$  и  $z \rightarrow \infty$ , однако в интересующей нас области вытянутых силовых линий  $\Delta \ll \rho$ ,  $z < \rho$  вклад этой компоненты пренебрежимо мал. В реальной магнитосфере магнитное поле, конечно, особенностей не имеет, а его распределение определяется не только током в токовом слое, но и токами на магнитопаузе. Можно было бы добиться в области моделирования такого же распределения компонент фонового магнитного поля, вводя эквивалентные поверхностные токи на конечном расстоянии от токового слоя. Однако расчет пространственного распределения таких токов достаточно сложен и выходит за рамки поставленной нами задачи.

Основная компонента аксиально-симметричного азимутального тока  $\mathbf{j}=(0, j_\phi, 0)$ , соответствующего заданным выше компонентам магнитного поля, имеет вид

$$j_\phi = \frac{c}{4\pi}(\text{rot}\mathbf{B}_0)_\phi \approx \frac{cB_{j\infty}}{8\pi} \frac{1}{\Delta \text{ch}^2(z/\Delta)} \left[ 1 + \text{th} \frac{\rho - \bar{\rho}}{\Delta_\rho} \right].$$

Это выражение описывает азимутальный ток, локализованный вблизи экваториальной поверхности на масштабе  $\Delta$ .

Таким образом, полное фоновое магнитное поле  $\mathbf{B}_0=(B_{0\rho}, 0, B_{0z})$  имеет компоненты  $B_{0\rho}=B_{d\rho}+B_{j\rho}$ ,  $B_{0z}=B_{dz}+B_{jz}$ . Форма магнитной силовой линии этого поля определяется уравнением (см. Приложение 2)

$$f(a, \theta) = a \exp \left[ \int_0^\theta \text{tg}(\bar{\theta} - \theta') d\theta' \right], \quad (15)$$

где  $\bar{\theta}$  — угол между касательной к силовой линии и осью  $\rho$  ( $\sin \bar{\theta} = B_{0z} / B_0$ ,  $\cos \bar{\theta} = B_{0\rho} / B_0$ ). На рис. 2 представлены силовые линии в рассматриваемой модели среды с тонким токовым слоем, рассчитанные по формуле (15).

Выражения для компонент метрического тензора в системе координат  $(a, \phi, \theta)$ , связанной с силовыми линиями магнитного поля, имеют следующий вид (см. Приложение 3):

$$g_1 = \frac{f^2(a, \theta)}{f^2(a, \theta) + (\partial f / \partial \theta)^2} \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2, \quad (16)$$

$$g_2 = f^2(a, \theta) \cos^2 \theta. \quad (17)$$

Отметим, что координаты  $a, \phi, \theta$  не ортогональны, однако однозначно связаны с координатами  $x^1, x^2, x^3$ . В частности, производные от параметров среды по координате  $x^1$  в системе координат  $(a, \theta)$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x^1} \right|_{x^3} = \left. \frac{\partial Q}{\partial a} \right|_\theta - \left. \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right|_a \frac{(\partial f / \partial a)(\partial f / \partial \theta)}{f^2 + (\partial f / \partial \theta)^2}.$$

Модель распределения альфвеновской скорости зададим следующим образом. В области, где доминирует дипольная составляющая магнитного поля ( $\rho < \bar{\rho}$ , где  $\bar{\rho} \approx 10 R_E$  — внутренняя граница плазменного слоя), положим  $A(a, \theta) \equiv A_d = A_j / r_d(a, \theta)$ , где  $A_j \approx 5000$  км/с — альфвеновская скорость на верхней границе ионосферы ( $r_i = R_E + 1500$  км),  $r_d$  — радиус дипольной силовой линии. Эта простая модель достаточно корректно моделирует распределение  $A$  вдоль силовой линии от ионосферы до экваториальной плоскости. Конечно, она не учитывает резкое изменение  $A$  на плазмопаузе, однако мы не будем рассматривать эту область магнитосферы.

В области токового слоя ( $\rho > \bar{\rho}$ ) основное изменение  $A$  происходит по координате  $z$ . Скорость  $A$  меняется от значения  $A_0 \approx 100$  км/с в токовом слое ( $z=0$ ) до  $A_\infty \approx 6000$  км/с в долях геомагнитного хвоста (при  $z \gg \Delta$ , где  $\Delta$  — характерная толщина токового слоя). Примем в этой области следующую модель альфвеновской скорости:

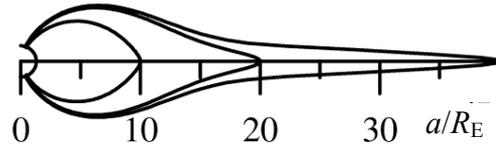


Рис. 2. Форма магнитных силовых линий, рассчитанных по формуле (15), в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем

$$A(z) \equiv A_j = A_0 [1 - (1 - (A_\infty / A_0)) \text{th}(z / \Delta)].$$

Полную модель альфвеновской скорости можно представить в виде

$$A(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[ A_d + A_j - (A_d - A_j) \text{th} \frac{\rho - \bar{\rho}}{\Delta_\rho} \right], \quad (19)$$

где  $\Delta_\rho \approx 2R_E$  — характерная толщина переходной области ближнего плазменного слоя. Модельное распределение альфвеновской скорости в меридиональной плоскости представлено на рис. 3, а для толстого токового слоя. При заданном распределении магнитного поля уравнение (19) определяет распределение плотности плазмы  $\rho_0$ .

Для моделирования скорости звука надо задать модель распределения давления плазмы. Аналогично тому, как это было сделано выше для альфвеновской скорости, зададим распределения давления отдельно для области  $\rho < \bar{\rho}$ , где доминирует дипольное магнитное поле, и области  $\rho > \bar{\rho}$ , где доминирующей компонентой поля является  $B_{j\rho}(z)$ . В первой из этих областей пренебрежем полем азимутального тока, а во второй — дипольным полем. Конечно, такое распределение равновесного давления плазмы можно рассматривать только как приближенное. Как следует из (5), давление  $P_0$  сохраняется вдоль магнитных силовых линий. Если можно было бы задать точное распределение давления на какой-либо поверхности, пересекающей все силовые линии (например, вблизи ионосферы), оно было бы определено во всей модельной магнитосфере. К сожалению, задать такое распределение с хорошей точностью без учета токов на границе магнитосферы не представляется возможным. Поэтому в данной работе мы воспользуемся указанным выше способом приближенного описания распределения равновесного давления плазмы.

При указанных предположениях, поскольку дипольное поле является бессиловым, в области  $\rho < \bar{\rho}$  имеем  $P_0 \equiv P_{0d} = \text{const}$ . В области  $\rho > \bar{\rho}$  из условия равновесия плазменной конфигурации (5) имеем

$$P_0(z) \equiv P_{0j}(z) = P_{0j}(\infty) - \frac{B_{j\rho}^2(z)}{8\pi} + \frac{B_{j\rho}^2(\infty)}{8\pi},$$

где  $P_{0j}(\infty)$  — давление плазмы в долях геомагнитного хвоста вдали от токового слоя. Выберем его так, чтобы

$$\beta_\infty = 8\pi P_{0j}(\infty) / B_{j\rho}^2(\infty) = 0.005.$$

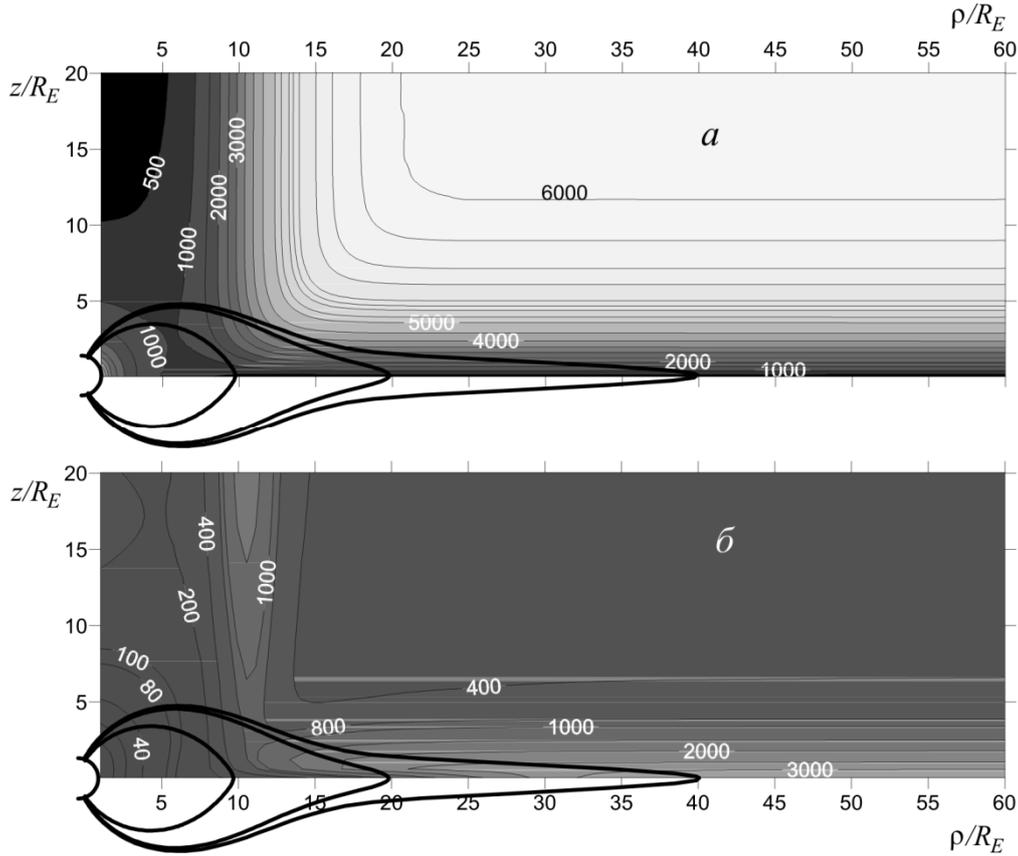


Рис. 3. Распределения альфвеновской скорости  $A$  [км/с] (а) и скорости ММЗ-волн  $c_s$  [км/с] (б) в меридиональной плоскости в модели магнитного хвоста с толстым токовым слоем

Полученное распределение  $P_0(z)$  соответствует модели слоя Харриса, которое считается достаточно хорошим приближением для описания токового слоя геомагнитного хвоста. Поскольку все эффекты, определяющие неустойчивость МГД-колебаний, связаны с поведением давления внутри и вблизи токового слоя, можно надеяться, что полученные далее результаты не слишком изменятся при переходе к более точной модели распределения  $P_0(\rho, z)$ . Для определенности положим также  $P_{0d} = B_{jp}^2(\infty) / 8\pi$ . Полное распределение давления  $P_0(z)$  смоделируем формулой

$$P_0(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[ P_{0d} + P_{0j} - (P_{0d} - P_{0j}) \operatorname{th} \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\Delta_p} \right]. \quad (20)$$

Поскольку распределение  $\rho_0$  определено распределением альфвеновской скорости, мы можем построить распределение скорости звука в плазме. Для модели среды с толстым токовым слоем распределение  $c_s$  в меридиональной плоскости представлено на рис. 3, б.

### 3. БАЛЛОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МГД-КОЛЕБАНИЙ В ЛОКАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Локальное приближение предполагает, что параметры плазмы заданы в вершине силовой линии и не меняются вдоль силовой линии. Из условия

равновесия фоновой плазмы (5) имеем уравнение

$$\nabla_{\perp} P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \nabla_{\perp} \ln(B_0 \sqrt{g_3}) = 0.$$

Используя введенные ранее параметры  $\kappa_{1g}$ ,  $\kappa_{1B}$  и  $\kappa_{1P}$ , его можно переписать в виде

$$\kappa_{1P} - \kappa_{1g} + (1 + 2\sigma/\beta)\kappa_{1B} = 0, \quad (21)$$

где  $\sigma = 1/\gamma = 3/5$ ,  $\beta = 8\pi P_0 / B_0^2$ . Используя это соотношение, можно определить возможные знаки  $\kappa_{1g}$ ,  $\kappa_{1B}$  и  $\kappa_{1P}$ . В рассматриваемой модели среды в вершинах силовых линий, проходящих через токовый слой,  $\kappa_{1g}, \kappa_{1B} < 0$ ,  $\kappa_{1P} > 0$ .

В локальном приближении будем искать решение уравнения (13) в виде  $\varphi \sim \exp(ik_3 x^3)$ . В результате получается дисперсионное уравнение вида

$$\left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - A^2 \right) \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - c_s^2 \right) = \frac{\bar{\kappa}_{1g} c_s^2}{k_{\parallel}^2} \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \bar{\kappa}_{1P} + A^2 \bar{\kappa}_{1B} \right), \quad (22)$$

где  $k_{\parallel} = k_3 / \sqrt{g_3}$ ,  $\bar{\kappa}_1 = \kappa_1 / \sqrt{g_1}$  — физические компоненты рассматриваемых параметров. Для удобства сопоставления с результатами, полученными в предшествующих работах, перепишем (22) в обозначениях, использованных другими авторами [Ohtani et al., 1989; Liu, 1997; Mazur et al., 2012],

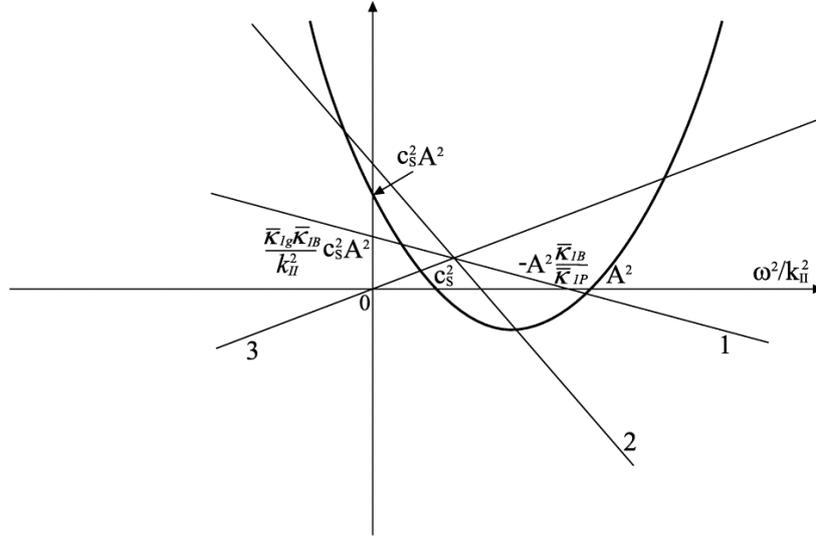


Рис. 4. Графическое решение дисперсионного уравнения (22). Решение в области действительных  $\omega^2$  определяется точками пересечения параболы, описываемой левой частью (22), и прямых линий, соответствующих правой части (22), при различных соотношениях параметров среды. Прямая 1 соответствует решениям для полоидальных альфвеновских и азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн, прямая 2 — нейтральной альфвеновской и аperiodически неустойчивой ММЗ-волне, прямая 3 — нейтральным альфвеновской и ММЗ-волнам в бессиловом магнитном поле

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - A^2\right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - c_s^2\right) = \frac{2\kappa_C c_s^2}{k_{\parallel}^2} \left[ \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \left( 2\kappa_C - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\gamma}\right) \kappa_P \right) + A^2 \frac{\beta}{2} \kappa_P \right], \quad (23)$$

где  $\kappa_C = -\bar{\kappa}_{1g} / 2 = 1 / R$ ,  $R$  — радиус кривизны силовой линии,  $\kappa_P = g_1^{-1/2} \nabla_1 \ln P_0$ ,  $\kappa_B = g_1^{-1/2} \nabla_1 \ln B_0$ . Имеем  $\bar{\kappa}_{1B} = \kappa_B - \kappa_C$ ,  $\bar{\kappa}_{1P} = \kappa_P / \gamma - \kappa_B - \kappa_C$  и условие равновесия плазменной конфигурации в виде

$$\frac{\beta}{2} \kappa_P + \kappa_B - \kappa_C = 0.$$

Проанализируем качественно решения уравнения (22), полагая компоненту волнового вектора  $k_{\parallel}$  заданной. Используем для нее значения, соответствующие стоячим вдоль силовой линии волнам, когда решение (13) можно записать в виде

$$\varphi = C \sin(k_{\parallel} l),$$

где  $k_{\parallel} = \pi n / L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники стоячей волны,  $L$  — длина магнитной силовой линии,  $l$  — координата точки на силовой линии, отсчитываемая от ионосферы Южного полушария ( $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ ),  $C$  — произвольная константа. Решение (22) можно представить в виде

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( A^2 + c_s^2 + \frac{\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1P}}{k_{\parallel}^2} c_s^2 \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( A^2 + c_s^2 + \frac{\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1P}}{k_{\parallel}^2} c_s^2 \right)^2 + \left( \frac{\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1B}}{k_{\parallel}^2} c_s^2 - 1 \right) A^2 c_s^2}. \quad (24)$$

Уравнение (22) описывает две ветки МГД-колебаний. Выражение со знаком плюс перед радикалом описывает альфвеновскую моду, а со знаком минус — ММЗ-моду МГД-колебаний. Для качественного представления о характере полученных решений, определим их графически. На рис. 4 представлены графики левой и правой частей дисперсионного уравнения (22) как функции квадрата фазовой скорости волны  $\omega^2 / k_{\parallel}^2$ . Левая часть описывается параболой, которая пересекается с осью  $\omega^2 / k_{\parallel}^2$  в точках  $c_s^2$  и  $A^2$ , а с вертикальной осью — в точке  $c_s^2 A^2$ . Правая часть представлена прямой, которая пересекается с горизонтальной осью в точке  $-A^2 \bar{\kappa}_{1B} / \bar{\kappa}_{1P}$ , а с вертикальной — в точке  $\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1B} c_s^2 A^2 / k_{\parallel}^2$ .

В работах [Liu, 1997; Mazur et al., 2012] показано, что решения  $\omega^2$ , описываемые (22), (23), могут быть только действительными. При этом решения, соответствующие альфвеновским волнам, всегда имеют  $\omega^2 > 0$ , а решения для ММЗ-волн могут при определенных условиях становиться аperiodически неустойчивыми с  $\omega^2 < 0$ . В области действительных  $\omega^2$  решения (22) определяются точками пересечения прямой линии и параболы. Если  $\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1B} < k_{\parallel}^2$ , то решения (22) представляют собой обычную полоидальную альфвеновскую волну и азимутально-мелкомасштабную ММЗ-волну (прямая 1 на рис. 4). При неограниченном увеличении радиуса кривизны ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\kappa}_{1g} \rightarrow 0$ ) решения (22) имеют вид  $\omega^2 = k_{\parallel}^2 A^2$  и  $\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2$ . Такие моды колебаний называются нейтральными в отличие от неустойчивых (растущих) и устойчивых (затухающих).

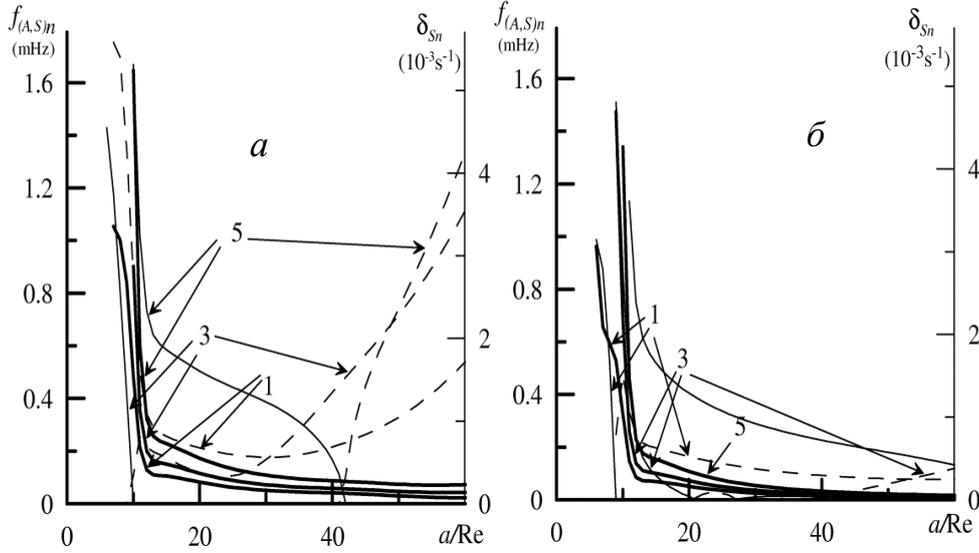


Рис. 5. Распределение собственных частот первых нечетных гармоник  $n=1, 3, 5$  азимутально-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн ( $f_{An}=\Omega_{An}/2\pi$  — толстые сплошные линии) и частот ( $f_{Sn}=\Omega_{Sn}/2\pi$  — тонкие сплошные линии) и инкрементов ( $\delta_{Sn}$  — штриховые линии) стоячих ММЗ-волн, рассчитанных в локальном приближении из дисперсионного уравнения (22). На левой панели представлены собственные частоты в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем, на правой — в модели с толстым токовым слоем

При  $\bar{k}_{1g}\bar{k}_{1B} > k_{\parallel}^2$  альфвеновская волна остается в области положительных значений  $\omega^2$ , а у ММЗ-волны  $\omega^2 < 0$  и одна из ее ветвей становится аperiodически неустойчивой (прямая 2 на рис. 4).

Легко показать, что порог неустойчивости полностью соответствует условию  $k_c k_p > k_{\parallel}^2$ , полученному в [Liu, 1997; Mazur et al., 2012]. Такую неустойчивость и саму МГД-моду обычно называют баллонными (по аналогии с ростом пузыря в области дефекта надутого баллона) — увеличивающаяся кривизна силовой линии ведет к увеличению инкремента возмущения. Причиной рассматриваемых неустойчивых МГД-колебаний является ток в плазме, точнее говоря, достаточно интенсивный и тонкий токовый слой, способный придать необходимую кривизну магнитным силовым линиям. Поэтому следует говорить, по сути дела, о токовой неустойчивости МГД-волн в плазме с токовым слоем. В плазме без токового слоя ( $\bar{k}_{1B} = 0$ ,  $\bar{k}_{1P} = \bar{k}_{1g}$ , например в дипольном поле) решением (22) являются нейтральные полоидальные альфвеновские волны и азимутально-мелкомасштабные ММЗ-волны с  $\omega^2 > 0$  (прямая 3 на рис. 4).

Иногда баллонные моды понимают как связанные альфвеновские и ММЗ-волны, а их неустойчивость трактуют как результат такой связи. Как видно из вышеприведенного рассмотрения, такая трактовка некорректна. При заданном значении  $k_{\parallel}$  в плазме всегда существуют две разные волны — альфвеновская и ММЗ-волна, которые имеют разные собственные частоты. Конечно, в неоднородной плазме все МГД-моды связаны между собой. Однако трактовать появление неустойчивых колебаний как результат такой связи некорректно. Для этого связь должна быть достаточно сильной. Необходимо выпол-

нение, как минимум, двух условий: 1) достаточно близкой пространственной структуры этих мод вдоль силовых линий и 2) совпадения их собственных частот в рассматриваемой области магнитных оболочек, как это имеет место в альфвеновском и магнитозвуковом резонансах [Leonovich and Mazur, 1989; Glassmeier et al., 1999; Rankin et al., 2005; Leonovich et al., 2006]. Как мы видим, в рассматриваемом приближении, по крайней мере, второе из этих условий не выполняется. То, что эти колебания описываются в рамках одного уравнения (или системы связанных уравнений), говорит лишь о том, что обе эти волны могут распространяться вдоль одних и тех же магнитных силовых линий. При этом они не обязаны находиться в состоянии сильного взаимодействия.

Посмотрим теперь, какие из рассмотренных выше сценариев реализуются в рассматриваемой нами модели среды. На рис. 5 представлены распределения по магнитным оболочкам собственных частот стоячих альфвеновских и ММЗ-волн в геомагнитном хвосте. Представлены решения уравнения (22) для тонкого (рис. 5, а) и толстого (рис. 5, б) токовых слоев. Рассмотрены три первых нечетных гармоники ( $n=1, 3, 5$ ) стоячих волн каждого типа. Видно, что частоты альфвеновских волн остаются действительными во всем диапазоне рассматриваемых магнитных оболочек ( $5 < a/R_E < 60$ ).

ММЗ-волны на магнитных оболочках, проходящих через токовый слой, могут переходить в режим аperiodической неустойчивости. Чем выше номер гармоники и толще токовый слой, тем дальше в сторону хвоста происходит этот переход. Так, пятая гармоника ММЗ-волн в модели с толстым токовым слоем вообще не перешла в режим неустойчивости в рассматриваемом диапазоне магнитных оболочек. В модели с тонким токовым слоем первая гармоника

оказывается аperiodически неустойчивой сразу после перехода через ближнюю границу слоя и остается неустойчивой во всем рассматриваемом диапазоне.

Интересно отметить, что собственные частоты альфвеновских и ММЗ-волн близки (но не равны) по порядку величины. Это связано с тем, что в токовом слое  $\beta \ll 1$  ( $S \gg A$ ,  $c_S \approx A$ ), что и дает в рассматриваемом локальном приближении близость собственных частот. Таким образом, оказывается реализованным сценарий, представляемый на рис. 4 пересечением параболы и прямой 2. Исходя из этого сценария, на силовых линиях, проходящих через токовый слой, в более точных расчетах можно ожидать устойчивого поведения полоидальных альфвеновских волн и неустойчивости ММЗ-волн. В следующем разделе посмотрим, каковы структура и спектр собственных частот стоячих альфвеновских и ММЗ-волн в ВКБ-приближении по продольной координате  $x^2$ .

#### 4. СТРУКТУРА И СПЕКТР СТОЯЧИХ АЛЬФВЕНОВСКИХ И ММЗ-ВОЛН НА ВЫТЯНУТЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ В ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИИ

Как было показано в работе [Leonovich, Mazur, 1993], решение (13) в ВКБ-приближении для азимутально-мелкомасштабных колебаний можно искать в виде

$$\varphi = U(x^1) \exp(\Theta(x^1, x^3)),$$

где функция  $U(x^1)$  описывает мелкомасштабную структуру решения по координате  $x^1$ , а  $\Theta(x^1, x^3)$  — большая квазиклассическая фаза, описывающая структуру решения по продольной координате. Характерный масштаб ее изменения по координате  $x^1$  порядка масштаба неоднородности среды. Будем искать решение в виде следующего разложения  $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots$ , где  $|\Theta_0| \gg |\Theta_1| \gg |\Theta_2| \gg \dots$ . Подставляя это решение в (13), в главном порядке теории возмущений получаем уравнение для

$$k_{\parallel} = g_3^{-1/2} \partial \Theta_0(x^1, x^3) / \partial x^3,$$

аналогичное (22). Разрешив его относительно  $k_{\parallel}$ , получаем

$$k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{A^2} + \frac{\omega^2}{2S^2} + \frac{\bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1B}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\omega^2}{S^2} + \bar{\kappa}_{1g} \bar{\kappa}_{1B} \right)^2 + \frac{\omega^2}{A^2} \bar{\kappa}_{1g} (\bar{\kappa}_{1P} + \bar{\kappa}_{1B})}. \quad (25)$$

Здесь знак плюс перед радикалом соответствует ММЗ-волне ( $k_{\parallel} \equiv k_{\parallel S}$ ), а знак минус — полоидальной альфвеновской волне ( $k_{\parallel} \equiv k_{\parallel AP}$ ). В первом порядке теории возмущений имеем уравнение

$$4\Theta_0'^3 \Theta_1' - i6\Theta_0'^2 \Theta_0'' - i(2\kappa_{1B} + \kappa_{1P} - \kappa_{1g}) \Theta_0'^3 = 0,$$

где штрих обозначает производную  $\nabla_l \equiv \partial / \partial l$  и введены параметры

$$\kappa_{1B} = \nabla_l \ln(B_0 / \rho \kappa_{1g}), \quad \kappa_{1P} = \nabla_l \ln(\sqrt{g_1 g_2} P_0^\sigma / \rho_0),$$

$$\kappa_{1g} = \nabla_l \ln p.$$

Отсюда получаем

$$\Theta_1 = \frac{i}{4} \ln(k_{\parallel}^6 A^2 P_0^\sigma g_1^2 / g_2).$$

Полное решение (13) в ВКБ-приближении можно представить в виде

$$\varphi = \frac{U(x^1)}{(A^2 P_0^\sigma g_1^2 / g_2)^{1/4}} \times \left[ k_{\parallel AP}^{-3/2} \left( C_1 e^{i \int_{L^-}^l k_{\parallel AP} dl'} + C_2 e^{-i \int_{L^-}^l k_{\parallel AP} dl'} \right) + k_{\parallel S}^{-3/2} \left( C_3 e^{i \int_{L^-}^l k_{\parallel S} dl'} + C_4 e^{-i \int_{L^-}^l k_{\parallel S} dl'} \right) \right], \quad (26)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные константы, для определения которых используем граничные условия (14). Применяя эти граничные условия, в главном порядке ВКБ-приближения получим  $C_2 = -C_1, C_3 = -C_4$  и дисперсионное уравнение

$$(\kappa_{\parallel}^2 - 1)^2 \sin \Psi_{AP} \sin \Psi_S = 0, \quad (27)$$

где  $\kappa_{\parallel} = (k_{\parallel S} / k_{\parallel AP})_{l=l_{\pm}}$  (полагаем здесь параметры северной и южной ионосферы симметричными),

$$\Psi_{AP} = \int_{L^-}^{l_{\pm}} k_{\parallel AP} dl, \quad \Psi_S = \int_{L^-}^{l_{\pm}} k_{\parallel S} dl.$$

Из уравнения (27) следует, что решением (13) в ВКБ-приближении являются или стоячие полоидальные альфвеновские волны вида

$$\varphi_{APn} = U_{Pn}(x^1) P_n(x^1, x^3),$$

$$P_n(x^1, x^3) = C_{Pn} \sin \left( \int_{L^-}^l k_{\parallel APn} dl \right) / k_{\parallel APn}^{3/2}, \quad (28)$$

где  $C_{Pn}$  — произвольная константа,  $k_{\parallel APn} \equiv k_{\parallel AP}(\Omega_{Pn})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники,  $\omega = \Omega_{Pn}$  — собственная частота стоячей волны, определяемая из дисперсионного уравнения

$$\Psi_{AP}(\Omega_{Pn}) = n\pi, \quad (29)$$

или стоячие ММЗ-волны

$$\varphi_{Sn} = U_{Sn}(x^1) \sin \left( \int_{L^-}^l k_{\parallel Sn} dl \right) / k_{\parallel Sn}^{3/2}, \quad (30)$$

собственные частоты которых определяются дисперсионным уравнением

$$\Psi_S(\Omega_{Sn}) = n\pi. \quad (31)$$

Предварительно оценим возможный тип решений полученных дисперсионных уравнений. Очевидно, что решения дисперсионных уравнений (29), (31) можно искать в области действительных значений  $\omega^2$  (нейтральных  $\omega^2 > 0$  или аperiodических  $\omega^2 < 0$  мод), если  $k_{\parallel}^2 > 0$  на всей силовой линии при любых действительных  $\omega^2$ . Однако, если выражение под радикалом в (25) где-либо на силовой линии при действительном  $\omega^2$  проходит через нуль, решением могут быть периодические неустойчивые

моды с комплексным значением  $\omega^2$ . Анализ (25) показывает, что, для того чтобы выражение под радикалом при любых действительных  $\omega^2$  оставалось положительным, необходимо, чтобы на всей силовой линии выполнялось условие

$$\bar{\kappa}_{1B}(\bar{\kappa}_{1B} + \bar{\kappa}_{1P}) < -(\bar{\kappa}_{1B} + \bar{\kappa}_{1P})^2 \frac{S^2}{A^2} < 0. \quad (32)$$

Если на силовой линии это условие нарушается, то более вероятным будет решение с комплексной частотой.

На рис. 6 представлено распределение параметра  $\bar{\kappa}_{1B}(\bar{\kappa}_{1B} + \bar{\kappa}_{1P})$  на силовой линии  $a=20R_E$  для модели среды с тонким и толстым токовыми слоями. Качественно такое распределение типично для всех силовых линий, проходящих через токовый слой. Видно, что, хотя на большей части силовой линии условие (32) выполняется, в области токового слоя  $\bar{\kappa}_{1B}(\bar{\kappa}_{1B} + \bar{\kappa}_{1P}) > 0$ . Таким образом, вероятным решением дисперсионных уравнений (29), (31) в области силовых линий, проходящих через плазменный слой, будут периодические неустойчивые моды колебаний.

Для численного решения дисперсионных уравнений оказалась удобной следующая процедура. Решения (29), (31) для выбранного номера продольной гармоники  $n$  находятся в ближней к Земле части магнитосферы на одной из магнитных оболочек, не проходящих через токовый слой. Здесь решениями являются обычные полоидальные альфвеновские волны и азимутально-мелкомасштабные ММЗ-волны. Затем при перемещении с малым шагом по экваториальному радиусу, нумерующему магнитные оболочки, находятся решения во всем диапазоне рассматриваемых оболочек.

На рис. 7 представлено распределение  $k_{\parallel AP}^2$  на различных магнитных оболочках для основной гармоники стоячих альфвеновских волн ( $n=1$ ) в модели магнитосферы с тонким токовым слоем. На оболочках

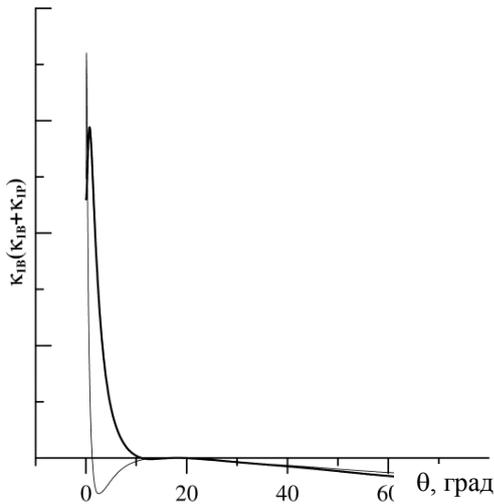


Рис. 6. Распределение вдоль силовой линии  $l=20$  параметра  $\bar{\kappa}_{1B}(\bar{\kappa}_{1B} + \bar{\kappa}_{1P})$  в моделях среды с толстым (толстая линия) и тонким (тонкая линия) токовыми слоями

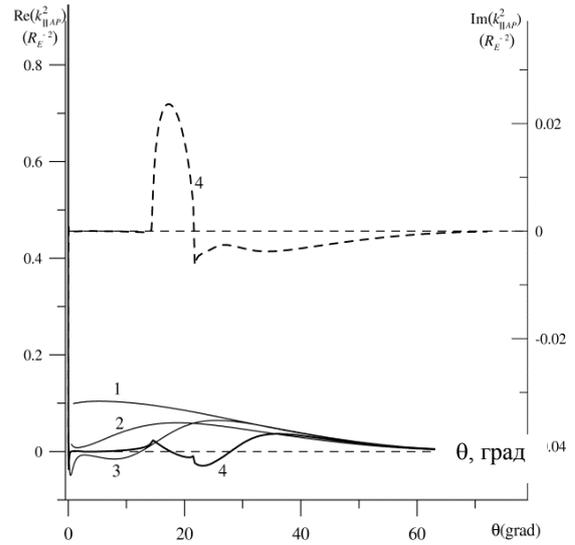


Рис. 7. Распределение вдоль различных силовых линий  $Re k_{\parallel AP}^2$  (сплошные линии) и  $Im k_{\parallel AP}^2$  (штриховая линия) для основной гармоники ( $n=1$ ) стоячих полоидальных альфвеновских волн в модели с тонким токовым слоем. Нейтрально-устойчивые колебания ( $\delta_{P1}=0$ ) на силовых линиях без точек поворота  $Re(k_{\parallel AP}^2) > 0$  на всей силовой линии: 1) на магнитной оболочке  $L=6$ ; 2)  $L=8$ ; 3) нейтрально-устойчивые колебания на силовой линии с четырьмя точками поворота, где  $Re(k_{\parallel AP}^2) = 0$ , на силовой линии  $L=10$ ; 4) неустойчивые ( $\delta_{P1} > 0$ ) периодические колебания на магнитной оболочке  $L=13$

$a=6R_E$  и  $a=8R_E$  вся силовая линия является областью прозрачности для рассматриваемых колебаний (где  $Re(k_{\parallel AP}^2) > 0$ ). На силовой линии  $a=10R_E$ , расположенной в ближней части токового слоя, область прозрачности разделяется на три области — узкую приэкваториальную и две широких, прилегающих к ионосфере. Между ними расположены небольшие области непрозрачности. Известно, что в таких случаях происходит расщепление спектра собственных колебаний тем больше, чем шире и глубже области непрозрачности [Mager et al., 2009]. Поскольку в нашем случае области непрозрачности небольшие, мы не будем рассматривать эффекты, связанные с расщеплением спектра колебаний.

Интегрирование в (28) и (29) осуществляется только в областях прозрачности. В дисперсионном уравнении (29) полная фаза набирается из суммы интегралов по всем областям прозрачности (их число на силовой линии может достигать пяти). На силовой линии  $a=10R_E$  колебание остается обычной полоидальной альфвеновской волной с действительной частотой. Однако на более удаленных силовых линиях, проходящих через плазменный слой, решением, удовлетворяющим граничным условиям (14), является периодическая неустойчивая альфвеновская волна с  $\omega_n \equiv \Omega_{Pn} = \bar{\Omega}_{Pn} + i\delta_{Pn}$ , где  $\bar{\Omega}_{Pn}$  — реальная часть собственной частоты полоидальной альфвеновской волны,  $\delta_{Pn} > 0$  — ее инкремент (рассматриваем здесь только неустойчивую ветвь колебаний). Это существенно отличается от резуль-

тата, полученного в локальном приближении, в котором полоидальная альфвеновская волна остается устойчивой во всем рассматриваемом диапазоне магнитных оболочек. На рис. 7 показано распределение  $\text{Re}(k_{\parallel\text{AP}}^2)$  и  $\text{Im}(k_{\parallel\text{AP}}^2)$  вдоль силовой линии  $a=20R_E$ . Интеграл от  $\text{Im}(k_{\parallel\text{AP}}^2)$  вдоль силовой линии обращается в нуль.

Структура волнового поля вдоль силовой линии  $a=13R_E$  для неустойчивой основной гармоники ( $n=1$ ) стоячих полоидальных альфвеновских волн представлена на рис. 8. Распределение волновой функции  $\varphi_{A1}$  показано вдоль всей силовой линии, за исключением окрестностей точек поворота, где ВКБ-приближение становится некорректным. Для точного определения структуры волновой функции необходимо численно решать исходное уравнение (13). Однако даже из вида приведенной на рис. 8 волновой функции, полученной в ВКБ-приближении, можно сделать следующие выводы. На большей части силовой линии рассматриваемая неустойчивая альфвеновская волна имеет вид обычной стоячей волны. Вблизи экваториальной поверхности в области токового слоя следует ожидать существенного измельчения структуры рассматриваемых колебаний вдоль силовой линии. Эти выводы справедливы и для других гармоник стоячих волн.

Для сравнения на том же рисунке приведена волновая функция  $\varphi_S$ , описывающая структуру ММЗ-волны на той же частоте  $\omega \equiv \Omega_{P1}$ . Показано распределение  $\varphi_S$  вдоль всей силовой линии, включая области непрозрачности (в точках поворота  $k_{\parallel S}^2$  регуляризована мнимой частью частоты). Она, конечно, не удовлетворяет граничным условиям (14). Видно, что ММЗ-волна на данной частоте имеет значительно меньшую длину волны на всей силовой

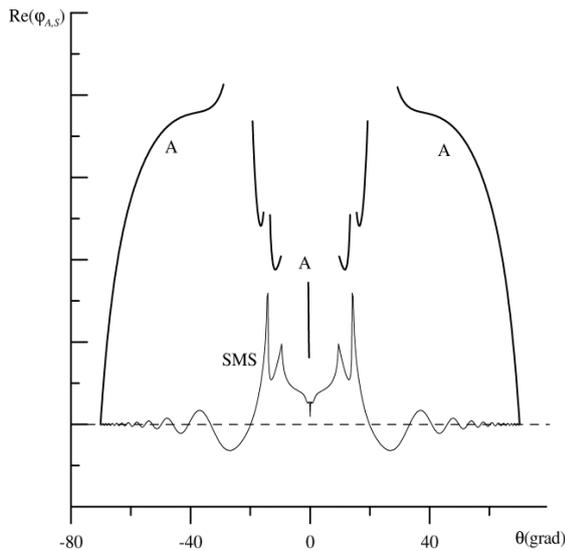


Рис. 8. Продольная структура основной гармоники ( $n=1$ ) неустойчивых полоидальных альфвеновских волн (A) на магнитной оболочке  $L=13$  и, для сравнения, структура ММЗ-волны (SMS) с той же частотой, но не удовлетворяющая граничным условиям на ионосфере. Разрывы в структуре альфвеновской волны соответствуют окрестностям точек поворота, где  $\text{Re}(k_{\parallel}^2)=0$

линии, чем альфвеновская волна. Поэтому говорить здесь о резонансе связанных мод альфвеновских и ММЗ-колебаний нельзя.

На рис. 9 представлено распределение по магнитным оболочкам собственных частот первых пяти гармоник стоячих альфвеновских волн для моделей среды с толстым и тонким токовыми слоями. В модели с тонким токовым слоем области, занимаемые неустойчивыми колебаниями, шире, а абсолютные значения инкрементов больше, чем в модели толстого токового слоя. Наибольшее значение инкремента имеет гармоника  $n=2$ , и достигается оно на магнитных оболочках  $a \approx 30R_E$ . Чем выше номер гармоники, тем меньше величина инкремента и тем дальше в хвост происходит переход от нейтральных стоячих полоидальных альфвеновских волн к неустойчивым колебаниям.

На этом же рисунке приведено распределение собственных частот тороидальных альфвеновских колебаний магнитосферы, описываемых уравнением

$$\hat{L}_T \varphi_{AT} = 0, \quad (33)$$

которое получается из (12) в пределе  $|\nabla_1 \ln \varphi_{AT}| \gg |k_2|$ . Его также можно получить непосредственно из системы уравнений (8)–(9) в этом же пределе. Граничные условия для него, которые в главном порядке определяются из условия идеальной проводимости ионосферы, имеют вид  $\varphi_{AT}(l_{\pm})=0$ . Решение (33), описывающее стоячие тороидальные альфвеновские волны в ВКБ-приближении, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{ATn} &= U_{Tn}(x^1) T_n(x^1, x^3), \\ T_n(x^1, x^3) &= C_{Tn} \sin\left(\int_L^l k_{\parallel ATn} dl\right) / k_{\parallel ATn}^{1/2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $k_{\parallel AT} = \omega/A$ , а собственные частоты определяются дисперсионным уравнением

$$\Psi_{AT}(\Omega_{Tn}) = \int_L^{l_{\pm}} k_{\parallel AT} dl = n\pi. \quad (35)$$

На рис. 10 представлен аналогичный расчет собственных частот азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн. Видно, что все гармоники колебаний переходят в режим периодической неустойчивости практически в одной и той же области ближней части токового слоя. Следует отметить, что в отличие от локального приближения собственные частоты и инкременты ММЗ-волн много меньше частот и инкрементов альфвеновских волн. Это объясняется тем, что собственные частоты в ВКБ-приближении определяются интегралами вдоль силовой линии от скорости Альфвена  $A$  и скорости ММЗ-волн  $c_S$ , а на большей части силовых линий  $A \gg c_S \approx S$ . Еще одно существенное отличие неустойчивых стоячих ММЗ-волн состоит в том, что описывающие их решения, удовлетворяющие граничным условиям (14), существуют только в ограниченном диапазоне магнитных оболочек. На рис. 10 показаны распределения собственных частот только на оболочках, до которых удалось численно проследить каждую из гармоник рассматриваемых

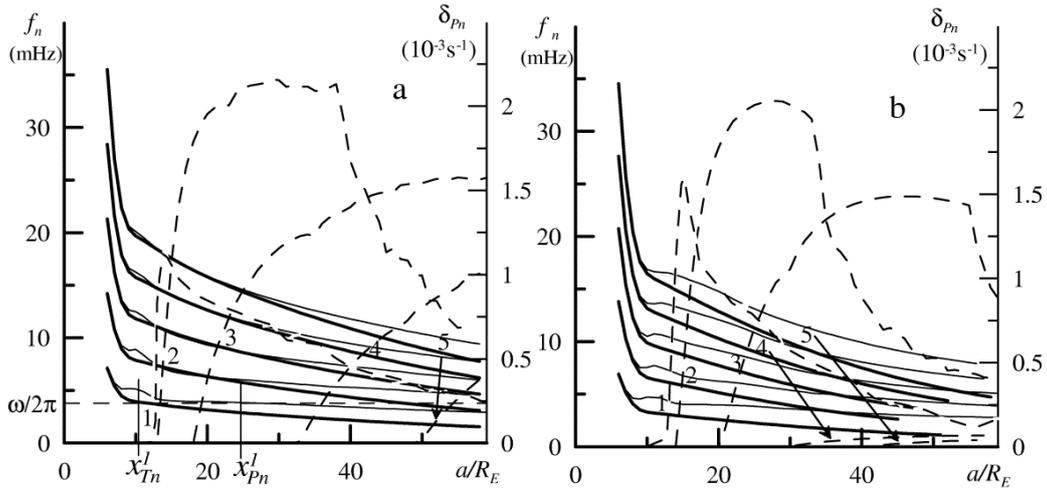


Рис. 9. Распределение собственных частот первых пяти гармоник  $n=1, 2, 3, 4, 5$  стоячих полоидальных альфвеновских волн ( $f_n = \text{Re}(\Omega_{Pn})/2\pi \equiv \bar{\Omega}_{Pn}/2\pi$  — тонкие сплошные линии,  $\delta_{Pn} = \text{Im}\Omega_{Pn}$  — штриховые линии) и тороидальных альфвеновских волн ( $f_n = \Omega_{Tn}/2\pi$  — толстые сплошные линии) поперек магнитных оболочек. На левой панели представлены собственные частоты в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем, на правой — в модели с толстым токовым слоем

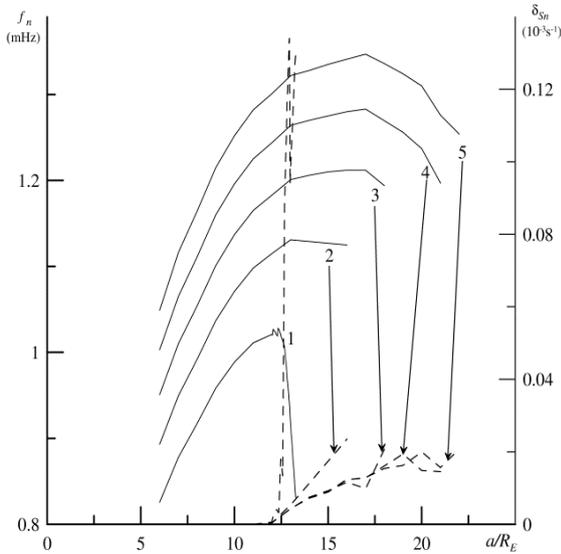


Рис. 10. Распределение собственных частот первых пяти гармоник  $n=1, 2, 3, 4, 5$  стоячих азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн ( $f_n = \text{Re}(\Omega_{Sn})/2\pi$  — сплошные линии,  $\delta_{Sn} = \text{Im}\Omega_{Sn}$  — штриховые линии) поперек магнитных оболочек в модели магнитного хвоста с тонким токовым слоем

ММЗ-волн. Чем выше номер гармоники, тем дальше в хвост простирается область ее существования.

Еще одно замечание, касающееся ММЗ-волн, состоит в том, что реально они являются сильно затухающими модами — это эффект, связанный с близостью их фазовой скорости тепловой скорости ионов плазмы [Leonovich, Kozlov, 2009]. Поэтому, учитывая очень малые инкременты стоячих ММЗ-волн, вряд ли стоит ожидать их раскачки в присутствии даже очень интенсивного токового слоя.

В настоящем разделе исследована структура неустойчивых стоячих альфвеновских и ММЗ-волн

вдоль силовых линий магнитного поля. Однако этого недостаточно. Для того чтобы убедиться в реальности их существования в конфигурации магнитного хвоста с токовым слоем, необходимо построить полное решение уравнения (12), описывающее структуру решений, в том числе в направлении поперек магнитных оболочек. В следующем разделе мы построим такое решение для азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн.

### 5. СТРУКТУРА НЕУСТОЙЧИВЫХ АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН ПОПЕРЕК МАГНИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Для того чтобы построить полное решение (12), необходимо сформулировать граничные условия для рассматриваемых колебаний по координате  $x^1$ . Если на какой-либо магнитной оболочке  $x^1 = \bar{x}^1$  найдено решение краевой задачи (13), (14), то естественным является требование ограниченности амплитуды волнового поля стоячей волны с найденной частотой при удалении от этой оболочки. Можно показать, что для собственных (без внешнего источника) колебаний с комплексной частотой невозможно построить решения (12), удовлетворяющие граничным условиям сразу на двух асимптотиках  $(x^1 - \bar{x}^1) \rightarrow \pm\infty$ . Решение, ограниченное на одной асимптотике, обязательно растет на другой.

Однако для азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн имеется другая возможность [Leonovich, Mazur, 1993]. Если в диапазоне рассматриваемых магнитных оболочек имеется широкополосный источник этих волн, в спектре которого присутствует частота  $\omega = \bar{\Omega}_{Pn}$ , то он возбуждает на

магнитной оболочке  $x^1 = x_{p_n}^1$  полоидальную стоячую альфвеновскую волну. Магнитная оболочка  $x^1 = x_{p_n}^1$  является поверхностью поворота, разделяющей области прозрачности и непрозрачности альфвеновской волны по координате  $x^1$ . Область прозрачности волны расположена между полоидальной ( $x^1 = x_{p_n}^1$ ) и тороидальной ( $x^1 = x_{T_n}^1$ ) резонансными поверхностями  $n$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн (см. рис. 9, а). Расстояние между этими поверхностями на магнитных оболочках, расположенных в области токового слоя, достаточно велико.

Возбуждаемая на полоидальной резонансной поверхности альфвеновская волна убегает в области прозрачности к тороидальной резонансной поверхности. Поверхность  $x^1 = x_{T_n}^1$  является сингулярной поверхностью поворота, в окрестности которой волна полностью поглощается. По своей структуре такая волна в области прозрачности является бегущей поперек магнитных оболочек, оставаясь при этом стоячей волной вдоль магнитных силовых линий. В процессе перемещения от полоидальной резонансной поверхности к тороидальной, поляризация альфвеновской волны также меняется от полоидальной к тороидальной.

Далее мы построим решение, описывающее структуру неустойчивых азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн, возбуждаемых в магнитосфере сторонними токами в ионосфере Земли. Для этого в граничных условиях на ионосфере следует учесть ее конечную проводимость и наличие сторонних токов, которые представляют собой поправки следующего порядка теории возмущений к условию идеальной проводимости ионосферы. С их учетом граничные условия для альфвеновских волн на ионосфере имеют вид [Leonovich, Mazur, 1996]

$$\varphi(l_{\pm}) = \mp i \frac{v_{\pm}}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{\pm}}{V_{\pm}}, \quad (36)$$

знаки  $+$ ,  $-$  указывают на параметры ионосферы в Северном ( $+$ ) и Южном ( $-$ ) полушариях,

$$v_{\pm} = c^2 \cos \chi_{\pm} / 4\pi \Sigma_{p_{\pm}},$$

$$V_{\pm} = \Sigma_{p_{\pm}} / \cos \chi_{\pm},$$

где  $\Sigma_{p_{\pm}}$  — интегральная педерсеновская проводимость ионосферы,  $\chi_{\pm}$  — угол между силовой линией и вертикалью к ионосфере (см. рис. 1), а функция  $J_{\parallel}^{\pm}$  связана с плотностью продольных токов на ионосфере  $j_{\parallel}^{\pm}$  соотношением

$$\Delta_{\perp}^{(\pm)} J_{\parallel}^{\pm} = j_{\parallel}^{\pm}.$$

В окрестности полоидальной поверхности будем искать решение (12) для  $n$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн в виде

$$\varphi_n = U_{p_n}(x^1) [P_n(x^1, x^3) + h_n(x^1, x^3)], \quad (37)$$

где функция  $P_n(x^1, x^3)$  описывает структуру стоячей волны в нулевом приближении (ее вид в ВКБ-приближении дается (28)), а  $h_n(x^1, x^3)$  —

поправка 1-го приближения, учитывающая неидеальность граничных условий на ионосфере

$$h_n(x^1, l_{\pm}) = \mp i \frac{v_{\pm}}{\omega} \frac{\partial P_n}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}} - \frac{J_{\parallel}^{\pm}}{V_{\pm}} U_{p_n}^{-1}(x^1). \quad (38)$$

В главном порядке теории возмущений

$$\hat{L}_S(\Omega_{p_n}) \hat{L}_P(\Omega_{p_n}) P_n + \hat{L}_C(\Omega_{p_n}) P_n = 0.$$

Подставляя в (12) решение в виде (37), в первом порядке теории возмущений имеем

$$\begin{aligned} & \nabla_1^2 U_{p_n}(x^1) \frac{\Omega_{p_n}^2}{c_S^2} \hat{L}_P(\Omega_{p_n}) P_n - \\ & - k_2^2 U_{p_n}(x^1) \frac{(\omega^2 - \Omega_{p_n}^2)}{c_S^2} \hat{L}_P(\Omega_{p_n}) P_n - \\ & - k_2^2 U_{p_n}(x^1) \frac{\Omega_{p_n}^2}{c_S^2} \hat{L}_P(\Omega_{p_n}) h_n \approx 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на большей части силовой линии  $c_S \ll A$  и

$$\begin{aligned} & |\hat{L}_S(P_n + h_n)| \approx |\Omega_{p_n}^2(P_n + h_n) / c_S^2| \gg \\ & \gg |\hat{L}_C(\Omega_{p_n})(P_n + h_n)|. \end{aligned}$$

Домножая это уравнение слева на  $P_n c_S^2 / \Omega_{p_n}^2$  и интегрируя вдоль силовой линии между магнитосопреженными ионосферами, получим

$$\beta_{p_n} \nabla_1^2 U_{p_n} - k_2^2 [\alpha_{p_n} (\omega^2 - \Omega_{p_n}^2) + k_2^2 \bar{\delta}_{p_n}] U_{p_n} = 0, \quad (39)$$

где

$$\alpha_{p_n} = \int_{l_-}^{l_+} \frac{P_n^2}{p A^2} dl,$$

$$\beta_{p_n} = \int_{l_-}^{l_+} P_n \hat{L}_T(\Omega_{p_n}) P_n dl,$$

$$\bar{\delta}_{p_n} = \int_{l_-}^{l_+} P_n \hat{L}_P(\Omega_{p_n}) h_n dl = - \frac{h_n}{p} \frac{\partial P_n}{\partial l} \Big|_{l_{\pm}}.$$

Учитывая граничное условие (38) и выбирая нормировку собственных функций  $P_n$  так, чтобы  $\alpha_{p_n} = 1$ , получим уравнение

$$\nabla_1^2 U_{p_n} - k_{yp}^2 [(\omega + i\gamma_{p_n})^2 - \Omega_{p_n}^2] U_{p_n} = I_{p_n}, \quad (40)$$

описывающее структуру стоячих азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн по координате  $x^1$  вблизи полоидальной резонансной поверхности. Здесь  $k_{yp}^2 = k_2^2 / \beta_{p_n}$ ,

$$\gamma_{p_n} = \frac{1}{2\beta_{p_n} \Omega_{p_n}^2} \left[ \frac{v_+}{p_+} \left( \frac{\partial P_n}{\partial l} \right)_+^2 + \frac{v_-}{p_-} \left( \frac{\partial P_n}{\partial l} \right)_-^2 \right] -$$

декремент затухания альфвеновских волн за счет конечной проводимости ионосферы вблизи полоидальной поверхности,

$$I_{p_n} = - \frac{1}{\beta_{p_n}} \left[ \frac{J_{\parallel}^+}{p_+ V_+} \left( \frac{\partial P_n}{\partial l} \right)_+ + \frac{J_{\parallel}^-}{p_- V_-} \left( \frac{\partial P_n}{\partial l} \right)_- \right] -$$

источник альфвеновских волн, связанный со сторонними токами в ионосфере.

Аналогично можно получить уравнение, описывающее структуру альфвеновских волн по координате  $x^1$  вблизи тороидальной резонансной поверхности:

$$\nabla_1[(\omega + i\gamma_{T_n})^2 - \Omega_{T_n}^2] \nabla_1 U_{T_n} - k_{yT}^2 U_{T_n} = 0, \quad (41)$$

где  $k_{yT}^2 = \beta_{T_n} k_2^2$ ,

$$\alpha_{T_n} = \int_{l_-}^{l_+} \frac{p T_n^2}{A^2} dl,$$

$$\beta_{T_n} = \int_{l_-}^{l_+} T_n \hat{L}_p (\Omega_{T_n}) T_n dl.$$

Нормировка собственных функций  $T_n$  выбрана так, что  $\alpha_{T_n} = 1$ ,

$$\gamma_{T_n} = \frac{1}{2\beta_{T_n} \Omega_{T_n}^2} \left[ v_+ p_+ \left( \frac{\partial T_n}{\partial l} \right)_+^2 + v_- p_- \left( \frac{\partial T_n}{\partial l} \right)_-^2 \right] -$$

декремент затухания альфвеновских волн вблизи тороидальной резонансной поверхности за счет конечной проводимости ионосферы. В уравнении (41) не учтены токи в ионосфере, поскольку для рассматриваемых волн они дают вклад много меньший, чем токи вблизи полоидальной поверхности.

Обычная процедура определения функции  $U_n(x^1)$  состоит в том, что решаются уравнения (40) и (41), описывающие структуру колебаний вблизи резонансных поверхностей. Затем производится их сшивка в области прозрачности с использованием ВКБ-приближения по координате  $x^1$  [Leonovich, Mazur, 1993]. Однако получаемые в результате этого выражения достаточно громоздки и приближение ВКБ не всегда применимо. Имеется другой подход, который позволяет корректно описывать структуру волнового поля вблизи резонансных поверхностей и качественно правильно его поведение между ними [Leonovich, Mazur, 1997]. Для этого вместо пары уравнений (40), (41) вводится модельное уравнение вида

$$\nabla_1[(\omega + i\gamma_{T_n})^2 - \Omega_{T_n}^2] \nabla_1 U_n - k_y^2 [(\omega + i\gamma_{P_n})^2 - \Omega_{P_n}^2] U_n = I_{\parallel n}, \quad (42)$$

где  $k_y^2 = k_2^2 \beta_{T_n} / \beta_{P_n}$ . Напомним, что собственные частоты тороидальных колебаний действительны, а неустойчивых полоидальных колебаний — комплексны:  $\Omega_{P_n} = \bar{\Omega}_{P_n} + i\delta_{P_n}$ . Если на интервале  $\Delta_1 = x_{T_n}^1 - x_{P_n}^1$  функции  $\Omega_{T_n}(x^1)$  и  $\bar{\Omega}_{P_n}(x^1)$  меняются мало, то для них можно использовать приближенное представление вида

$$\bar{\Omega}_{P_n}^2 \approx \omega^2 \left( 1 - \frac{x^1 - x_{P_n}^1}{a_n} \right),$$

$$\Omega_{T_n}^2 \approx \omega^2 \left( 1 - \frac{x^1 - x_{T_n}^1}{a_n} \right),$$

где  $a_n = (\nabla_1 \ln \Omega_{T_n}^2)^{-1} \approx (\nabla_1 \ln \bar{\Omega}_{P_n}^2)^{-1}$  — характерный масштаб изменения этих функций на рассматриваемом

интервале. При этом в уравнении (42) можно перейти к безразмерной поперечной координате  $\xi = (x^1 - x_{P_n}^1) / \Delta_1$  и записать его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi - 1 + i\varepsilon_{T_n}) \frac{\partial U_n}{\partial \xi} - \kappa^2 (\xi - i\varepsilon_{P_n}) U_n = \frac{a_n \Delta_1 I_{\parallel n}}{\omega^2}, \quad (43)$$

где  $\kappa = k_y \Delta_1$ ,  $\varepsilon_{T_n} = 2\gamma_{T_n} a_n / \omega \Delta_1$ ,  $\varepsilon_{P_n} = 2(\delta_{P_n} - \gamma_{P_n}) a_n / \omega \Delta_1$ . Решение (43) будем искать методом Фурье, представляя функцию  $U_n(x^1)$  в виде разложения

$$U_n(x^1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_n(k) e^{-ik\xi} dk. \quad (44)$$

Будем считать функцию источника  $I_{\parallel n}$  мало меняющейся в ионосфере на масштабе локализации волны  $\sqrt{g_1(x^1, l_{\pm})} \Delta_1$ . Подстановка (44) в (43) дает уравнение

$$i(k^2 + \kappa^2) \frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial k} + [ik + k^2(1 - i\varepsilon_{T_n}) + i\kappa^2 \varepsilon_{P_n}] \tilde{U}_n = \frac{a_n \Delta_1}{\omega^2} I_{\parallel n} \delta(k),$$

решение которого

$$\tilde{U}_n = \frac{a_n \Delta_1 I_{\parallel n}}{\omega^2} \frac{\sqrt{2\pi} \kappa \theta(-k)}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}} \times \exp[ik(1 - i\varepsilon_{T_n}) - i\kappa(1 - i(\varepsilon_{T_n} + \varepsilon_{P_n})) \arctg(k/\kappa)],$$

где  $\theta(-k)$  — ступенчатая функция Хевисайда. При подстановке в (44) это дает

$$U_n(\xi) = \frac{a_n \Delta_1 I_{\parallel n} \kappa}{\omega^2} \times \int_0^{\infty} \frac{\exp[ik(\xi - 1 + i\varepsilon_{T_n}) + i\kappa(1 - i(\varepsilon_{T_n} + \varepsilon_{P_n})) \arctg(k/\kappa)]}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}} dk. \quad (45)$$

При  $\xi \rightarrow 0$  ( $x^1 \rightarrow x_{T_n}^1$ ) имеем

$$U_n \sim \ln(\xi + i\varepsilon_{T_n}),$$

т.е. на тороидальной резонансной поверхности при  $\varepsilon_{T_n} \rightarrow 0$  поле альфвеновской волны имеет хорошо известную логарифмическую особенность. Таким образом, компоненты волнового поля  $E_1$ ,  $B_2$ ,  $v_2$  и  $P$  имеют особенность  $\sim \xi^{-1}$  (см. (8)).

Полная структура волнового поля азимутально-мелкомасштабных ( $\kappa=50$ ) альфвеновских волн поперек магнитных оболочек представлена на рис. 11. Рассмотрены различные соотношения между инкрементом токовой неустойчивости и диссипацией альфвеновских волн на ионосфере вблизи тороидальной и полоидальной резонансных поверхностей. На рис. 11, *в* представлена структура нейтрально устойчивой альфвеновской волны ( $\delta_{P_n}=0$ ) при равных декрементах вблизи тороидальной и полоидальной поверхностей:

$$\varepsilon_{T_n} = -\varepsilon_{P_n} = 10^{-2}.$$

На рис. 11, *б* приведена структура волны, у которой инкремент полностью скомпенсирован декрементом затухания вблизи полоидальной резонансной поверхности ( $\varepsilon_{P_n} \sim \delta_{P_n} - \gamma_{P_n} = 0$ ) при том же декременте вблизи

тороидальной поверхности ( $\varepsilon_{Tn}=10^{-2}$ ). На рис. 11, а представлена структура умеренно неустойчивой альфвеновской волны с  $\varepsilon_{Pn} = 4\varepsilon_{Tn} = 4 \cdot 10^{-2}$ . Аналогичную структуру азимутально-мелкомасштабные альфвеновские волны имеют при наличии неустойчивостей, связанных с неравновесными распределениями энергичных частиц в плазме [Klimushkin, 2000; Klimushkin, 2007].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты данной работы.

1. Получено уравнение (12), описывающее структуру азимутально-мелкомасштабных альфвеновских и ММЗ-волн в аксиально-симметричной магнитосфере с токовым слоем. Его частным случаем является уравнение (13), описывающее структуру волн вдоль силовых линий магнитного поля в окрестности магнитной оболочки, где азимутальная длина волны рассматриваемых колебаний много больше радиальной (для альфвеновских волн — это полоидальная резонансная оболочка). Из-за высокой проводимости ионосферы поле рассматриваемых колебаний представляет собой стоячие вдоль силовых линий волны. В присутствии достаточно интенсивного токового слоя эти волны могут становиться неустойчивыми.

2. Найдены общие аналитические выражения для формы силовых линий такого поля и компонент метрического тензора связанной с ним системы криволинейных координат. Заданы распределения плотности и температуры плазмы, позволяющие реалистично смоделировать двумерные (в плоскости

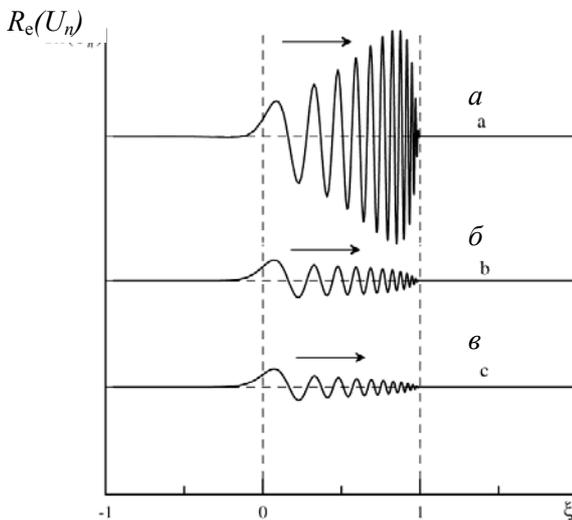


Рис. 11. Структура азимутально-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн поперек магнитных оболочек: а — волна с умеренным инкрементом неустойчивости ( $\varepsilon_{Pn}=4\varepsilon_{Tn}$ ) вблизи полоидальной резонансной поверхности ( $\xi=0$ ) и слабым затуханием ( $\varepsilon_{Tn}=10^{-2}$ ) вблизи тороидальной ( $\xi=1$ ) и полоидальной поверхностей; б — волна, в которой инкремент вблизи полоидальной поверхности полностью скомпенсирован декрементом затухания на ионосфере ( $\varepsilon_{Pn} \sim \delta_{Pn} - \gamma_{Pn} = 0$ ); в — нейтрально-устойчивая волна ( $\delta_{Pn}=0$ ) при слабом затухании вблизи тороидальной и полоидальной поверхностей ( $\varepsilon_{Tn} = -\varepsilon_{Pn} = 10^{-2}$ )

магнитного меридиана) распределения скорости звука и альфвеновской скорости в плазменной конфигурации геомагнитного хвоста.

3. В локальном приближении по координате  $x^3$  получено дисперсионное уравнение (22), описывающее азимутально-мелкомасштабные альфвеновские и ММЗ-волны. Проведен анализ возможных типов решений этого уравнения. Как для качественного, так и для численного анализа использованы параметры среды в вершинах вытянутых магнитных силовых линий. Показано, что в дипольно-подобном магнитном поле (в отсутствие токового слоя) решения дисперсионного уравнения (22) описывают обычные нейтральные (не растущие и не затухающие со временем) полоидальные альфвеновские волны и азимутально-мелкомасштабные ММЗ-волны. При наличии токового слоя возможен переход ММЗ-колебаний в режим аperiodической неустойчивости. Такие колебания принято называть баллонными модами, а неустойчивость — баллонной. Реальной причиной такой неустойчивости является токовый слой. Поэтому следует говорить о токовой неустойчивости МГД-колебаний или о неустойчивости токового слоя относительно этих колебаний.

4. Решена задача о структуре и спектре стоячих полоидальных альфвеновских волн и азимутально-мелкомасштабных ММЗ-волн в ВКБ-приближении по координате  $x^3$ . Показано, что решения, полученные в ВКБ-приближении, кардинально отличаются от решений, полученных в локальном приближении. В приближении ВКБ как альфвеновские, так и ММЗ-волны на силовых линиях, проходящих через токовый слой, переходят в режим неустойчивости в виде периодических колебаний. Учитывая высокую диссипативность ММЗ-волн за счет их взаимодействия с ионами фоновой плазмы (не рассматриваемую в настоящей работе) и очень малый инкремент, рассчитанный в ВКБ-приближении, вряд ли можно ожидать их перехода в режим неустойчивости в реальной магнитосфере.

Таким образом, токовые неустойчивости альфвеновских и ММЗ-волн, рассчитанные в локальном и ВКБ-приближении, кардинально различаются. Поэтому следует признать, что результаты, полученные в локальном приближении, не могут применяться для описания неустойчивых МГД-колебаний в реальной конфигурации магнитного хвоста.

5. Решена задача о структуре неустойчивых азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн поперек магнитных оболочек. Показано, что в рассматриваемой модели среды не могут существовать неустойчивые собственные колебания, ограниченные по амплитуде во всем диапазоне магнитных оболочек. Решение, ограниченное по амплитуде, можно построить, если имеется сторонний источник рассматриваемых колебаний. Такой источник возбуждает стоячую альфвеновскую волну на полоидальной резонансной магнитной оболочке. Эта волна убегает поперек магнитных оболочек от полоидальной резонансной поверхности к тороидальной (оставаясь при этом стоячей вдоль силовых линий), где полностью поглощается из-за конечной проводимости

ионосферы. При достаточно большом инкременте амплитуда волны при удалении от полоидальной поверхности растет. Вне интервала между полоидальной и тороидальной поверхностями амплитуда волны асимптотически убывает. В процессе перемещения между резонансными поверхностями поляризация рассматриваемых альфвеновских волн меняется от полоидальной до тороидальной.

Обсудим полученные выше результаты с точки зрения энергетического принципа. В работах [Frieman, Rotenberg, 1960] было показано, что в неподвижной плазме, ограниченной идеально проводящими стенками, собственные колебания могут существовать либо в форме периодических нейтральных мод с  $\omega^2 > 0$  (если при возмущении плазмы изменение ее потенциальной энергии положительно  $\delta W > 0$ ), либо аperiodически неустойчивых мод с  $\omega^2 < 0$  (если  $\delta W < 0$ ). При этом предполагается, что силовые линии магнитного поля замкнуты и не пересекают ограничивающую плазму стенку, а сама плазма рассматривается как бездиссипативная среда.

В работах [Hameiri et al., 1991; Miura, 2007] эти результаты были обобщены на случай магнитного поля, подобного тому, что имеется в магнитосферах планет, когда магнитные силовые линии пересекают высокопроводящую ионосферу. Однако при этом предполагалось также наличие идеально проводящих стенок, ограничивающих рассматриваемый объем плазмы. Это, конечно, не соответствует реальной ситуации в магнитосфере, которая имеет свободную внешнюю границу, частично проникаемую для МГД-волн. Однако при рассмотрении баллонных мод, сильно локализованных поперек магнитных оболочек, наличие идеально проводящих стенок вдали от области локализации колебаний рассматривается как несущественное.

При решении задачи об устойчивости баллонных мод, как правило, ограничиваются решением задачи о структуре колебаний вдоль магнитных силовых линий. В результате решения соответствующей задачи с заданными граничными условиями на ионосфере определяется спектр собственных частот таких колебаний. Эти частоты рассматриваются как частоты собственных колебаний всей рассматриваемой плазменной системы. Частоты собственных альфвеновских и ММЗ-колебаний, полученные в локальном приближении в настоящей и некоторых предшествующих работах, вполне укладываются в указанные выше представления. В то же время комплексные частоты азимутально-мелкомасштабных стоячих волн, полученные в ВКБ-приближении, не соответствуют этим представлениям.

Рассмотрим причины такого расхождения на примере азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн, рассмотренных детально в настоящей работе. Основной причиной, по нашему мнению, является ошибочное отождествление гармоник стоячих вдоль силовых линий волн, удовлетворяющих граничным условиям на ионосфере, с собственными колебаниями всей плазменной системы. Дело в том, что в магнитном поле с кривыми силовыми линиями у альфвеновских волн появляется своеобразная

поперечная дисперсия, которая приводит к расщеплению резонансных магнитных оболочек для альфвеновских колебаний [Leonovich, Mazur, 1993]. При наличии внешнего источника раскачка альфвеновских колебаний с тороидальной ( $m=0$ ) и полоидальной ( $m \rightarrow \infty$ ) поляризацией происходит на разных, но достаточно близких, магнитных оболочках.

При изучении структуры азимутально-мелкомасштабных ( $m \gg 1$ ) альфвеновских колебаний поперек магнитных оболочек выяснилось, что невозможно построить решения для собственных мод таких колебаний, удовлетворяющие условию ограниченности их амплитуды сразу на двух асимптотиках вдали от резонансных поверхностей. Эта особенность азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн не связана с наличием или отсутствием токового слоя и конечного давления плазмы, а обусловлена только кривизной силовых линий магнитного поля. Такие решения удается построить только для колебаний, возбуждаемых внешним источником. В настоящей работе в качестве такого источника рассмотрены продольные сторонние токи на ионосфере.

Распределенный монохроматический источник возбуждает азимутально-мелкомасштабную альфвеновскую волну на полоидальной резонансной магнитной оболочке. Эта оболочка является поверхностью поворота для рассматриваемых волн по поперечной координате  $x^1$ . Если в ВКБ-приближении ввести поперечную компоненту волнового вектора  $k_1(x^1)$ , то на полоидальной магнитной оболочке  $k_1^2(x_{PN}^1) = 0$ . С одной стороны, от полоидальной оболочки расположена область прозрачности для рассматриваемых волн, где  $k_1^2(x^1) > 0$ , а с другой — область непрозрачности, где  $k_1^2(x^1) < 0$ . Благодаря поперечной дисперсии, связанной с кривизной магнитных силовых линий, у альфвеновских волн появляется поперечная компонента групповой скорости поперек магнитных оболочек. Волна в области прозрачности убегает от полоидальной поверхности и достигает тороидальной резонансной оболочки, где ее энергия полностью поглощается за счет диссипации. При этом сам механизм диссипации не важен: это может быть и диссипация, связанная с джоулевым нагревом ионосферной плазмы на концах магнитных силовых линий, и измельчение пространственной структуры колебаний за счет других эффектов, приводящих к поперечной дисперсии альфвеновских волн [Leonovich, Mazur, 1995], что также в конечном итоге приводит к полной диссипации волн.

Таким образом, азимутально-мелкомасштабная альфвеновская волна имеет сложную пространственную структуру поперек магнитных оболочек и является сильно диссипативной модой колебаний. Поэтому ее нельзя рассматривать как собственную моду МГД-колебаний всей плазменной системы. Такие колебания могут существовать в рассматриваемой системе только как вынужденные колебания при наличии внешнего источника. Если баллонная

неустойчивость, возникающая при наличии токового слоя, превосходит локальный декремент таких колебаний, связанный с диссипацией в ионосфере, то их амплитуда увеличивается при удалении от области генерации на полоидальной резонансной оболочке. Однако в окрестности тороидальной резонансной оболочки колебания полностью поглощаются.

Этот пример показывает, что при исследовании баллонной неустойчивости недостаточно найти решение только продольной задачи, описывающей структуру колебаний вдоль магнитных силовых линий и определить спектр их собственных частот. Необходимо также исследовать их полную пространственную структуру, включая структуру волнового поля поперек магнитных оболочек. Собственные моды колебаний продольной задачи не всегда являются собственными модами всей плазменной системы.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00031-а и Программы Президиума РАН № 22.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Вывод уравнений для потенциалов $\phi$ и $\psi$

Из определения (7) имеем следующие выражения для компонент возмущенного электрического поля

$$\begin{aligned} E_1 &= -\nabla_1 \phi + ik_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi, \\ E_2 &= -ik_2 \phi - \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi, E_3 = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Используя эти выражения и уравнения (2) и (6), получаем для компонент возмущенного магнитного поля и поля скоростей:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{c}{\omega} \frac{g_1}{\sqrt{g}} \nabla_3 \left( k_2 \phi - i \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right), \\ B_2 &= \frac{c}{\omega} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_3 \left( i \nabla_1 \phi + k_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right), \\ B_3 &= i \frac{c}{\omega} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \left( \nabla_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi - k_2^2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right), \\ v_1 &= -\frac{cP^{-1}}{B_0} \left( ik_2 \phi + \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right), \\ v_2 &= \frac{cP}{B_0} \left( \nabla_1 \phi - ik_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \psi \right). \end{aligned}$$

Из третьей составляющей линеаризованного векторного уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{i}{\omega \rho_0} \nabla_3 P + \\ &+ \frac{icB_0 \kappa_{1B}}{4\pi \rho_0 \omega^2 \sqrt{g_1 g_2}} \left( k_2 \phi - i \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \psi \right). \end{aligned}$$

Из линеаризованных уравнений (3) и (4) получаем

следующее выражение для возмущенного давления

$$\begin{aligned} P &= -i \frac{S^2 \rho_0}{\omega P_0^\sigma \sqrt{g}} \left[ \nabla_1 \left( \frac{\sqrt{g}}{g_1} P_0^\sigma v_1 \right) + ik_2 \frac{\sqrt{g}}{g_2} P_0^\sigma v_2 + \right. \\ &\left. + \nabla_3 \left( \frac{\sqrt{g}}{g_3} P_0^\sigma v_3 \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для компонент поля скоростей, получаем уравнение (10).

Уравнение (8) получается из первых двух составляющих линеаризованного векторного уравнения (1) следующим образом. Первое из этих уравнений домножается слева на  $-ik_2 \rho_0$ , а от второго после умножения на  $\rho_0$  берется производная  $\nabla_1$ . После этого уравнения складываются. В результате из полученного таким путем уравнения исключается возмущенное давление, а оставшиеся слагаемые выражаются через потенциалы  $\phi$  и  $\psi$ . Уравнение (9) получается из второй составляющей линеаризованного уравнения (1), если на него подействовать слева оператором  $(i/k_2) \hat{L}_0 \rho_0$  и выразить его слагаемые через  $\phi$  и  $\psi$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Определение формы силовой линии по заданным компонентам фонового магнитного поля

Пусть форма силовой линии описывается ее радиусом  $r=f(a, \theta)$ , который в экваториальной плоскости равен  $f(a, 0)=a$ . Из определения силовой линии векторного поля следует, что вектор магнитного поля всегда направлен по касательной к силовой линии:

$$\frac{df}{B_{0r}} = \frac{fd\theta}{B_{0\theta}},$$

что позволяет получить уравнение для численного нахождения формы силовой линии:

$$\frac{d \ln f}{d\theta} = \frac{B_{0r}}{B_{0\theta}} = \frac{B_{0p} \cos \theta + B_{0z} \sin \theta}{-B_{0p} \sin \theta + B_{0z} \cos \theta}. \quad (47)$$

Вводя  $\sin \bar{\theta} = B_{0z} / B_0$ ,  $\cos \bar{\theta} = B_{0p} / B_0$ , получим нужную формулу.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### Определение компонент метрического тензора

Определим семейство координатных поверхностей  $g(\lambda, \theta)$  (см. рис. 12), ортогональных к магнитным оболочкам  $f(a, \theta)$ , для которых выполняется условие ортогональности их координатных линий в меридиональной плоскости

$$\frac{\partial \ln f(a, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ln g(\lambda, \theta)}{\partial \theta} = -1. \quad (48)$$

Рассмотрим две бесконечно близкие силовые линии

$f(a, \theta')$  и  $f(a+da, \theta')$ . По определению отрезок координатной линии  $g(\lambda+d\lambda, \theta')$ , отсекаемый этими силовыми линиями на широте  $\theta$

$$\Delta = \sqrt{g_1} da. \quad (49)$$

Из рис. 12 видно, что

$$\begin{aligned} dl^2 &= (f(a, \theta + d\theta) - f(a + da, \theta + d\theta))^2 - \Delta^2 \approx \\ &\approx \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 - g_1 \right] da^2. \end{aligned}$$

Сравнивая это с (47), получим

$$d\theta^2 = \frac{(\partial f / \partial a)^2 - g_1}{f^2(a, \theta) + (\partial f / \partial \theta)^2} da^2. \quad (50)$$

Запишем в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$  в координатной плоскости  $\phi = const$  координаты векторов  $\mathbf{r}(a, \theta) = (\rho_1, z_1)$  и  $\mathbf{r}(a+da, \theta+d\theta) = (\rho_2, z_2)$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= f(a, \theta) \cos \theta, \quad z_1 = f(a, \theta) \sin \theta, \\ \rho_2 &= f(a, \theta + d\theta) \cos(\theta + d\theta) \approx \\ &\approx \rho_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \right] \sin \theta - f(a, \theta) \sin \theta d\theta, \\ z_2 &= f(a, \theta + d\theta) \sin(\theta + d\theta) \approx \\ &\approx z_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \right] \cos \theta + f(a, \theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Имеем

$$\Delta^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = g_1 da^2.$$

Используя выражения для  $\rho_1, \rho_2, z_1, z_2$ , а также (50), получим для  $g_1$  выражение (16).

Для  $g_2$  имеем по определению  $\Delta_\phi = \sqrt{g_2} d\phi$  — отрезок азимутальной координатной линии, лежащей на магнитной оболочке  $a = const$ , который отсекается двумя бесконечно близкими меридиональными плоскостями  $\phi$  и  $\phi + d\phi$ , на широте  $\theta$ . С другой стороны  $\Delta_\phi = f(a, \theta) \cos \theta d\phi$ . Приравнявая эти два выражения, получаем (17).

В общем случае, когда уравнение силовой линии нельзя представить в виде  $r = \alpha(a)\beta(\theta)$ , получить выражение для  $g_3(a, \theta)$  оказывается затруднительным. Однако можно получить выражение для его логарифмической производной  $\nabla_1 \ln g_3$ .

Используя векторное тождество

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

можно показать, что из первой формулы Френе для силовой линии:

$$(\mathbf{e}_B \cdot \nabla) \mathbf{e}_B = k \mathbf{e}_1,$$

где  $\mathbf{e}_B = \mathbf{B}_0 / B_0$  — касательный вектор,  $\mathbf{e}_1$  — нормаль, направленная по касательной к ортогональной траектории,  $k$  — кривизна силовой линии, следует, что

$$\nabla_1 \ln g_3 = 2\sqrt{g_1} \frac{(f^2 + 2f'^2 - ff'')}{(f^2 + f'^2)^{3/2}}. \quad (51)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Birn J. Magnetotail dynamics: Survey of recent progress // The dynamic magnetosphere. Springer Science; Business Media B.V., 2011. P. 49–54 (IAGA Special Sopron Book Ser. V. 3). DOI: 10.1007/978-94-007-0501-2\_4.
- Cheng C.Z. Physics of substorm growth phase, onset, and dipolarization // Space Sci. Rev. 2004. V. 113, N 1–2. P. 207–270. DOI: 10.1023/B:SPAC.0000042943.59976.0e.
- Cheng C.Z., Chance M.S. Low-n shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas // Phys. Fluids. 1986. V. 29, N 11. P. 3695–3701. DOI: 10.1063/1.865801.
- Cheng C.Z., Lui A. T.Y. Kinetic ballooning instability for substorm onset and current disruption observed by AMPTE/CCE // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25. P. 4091–4094. DOI: 10.1029/1998GL900093.
- Cheremnykh O.K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces // Plasma Phys. and Controlled Fusion. 2010. V. 52, N 9. 095006. DOI: 10.1088/0741-3335/52/9/095006.
- Coppi B. Topology of ballooning modes // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39, N 16. P. 939–942. DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.939.
- Dewar R.L., Glasser A.H. Ballooning mode spectrum in general toroidal systems // Phys. Fluids. 1983. V. 26, N 10. P. 3038–3052. DOI: 10.1063/1.864028.
- Frieman E., Rotenberg M. On hydromagnetic stability of stationary equilibria // Rev. Modern Phys. 1960. V. 32. P. 898–902. DOI: 10.1103/RevModPhys.32.898.
- Glassmeier K.-H., Othmer C., Cramm R., et al. Magnetospheric field line resonances: A comparative planetology approach // Surveys in Geophys. 1999. V. 20. P. 61–109. DOI: 10.1023/A:1006659717963.
- Hameiri E., Laurence P., Mond M. The ballooning instability in space plasmas // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 1513–1526. DOI: 10.1029/90JA02100.
- Kamide Y., Maltsev Y. P. 2007 Geomagnetic Storms // Handbook of the Solar-Terrestrial Environment / Ed. Y. Kamide, A C-L Chian. Berlin: Springer. P. 355–374.
- Klimushkin D.Y. The propagation of high-m Alfvén waves in the Earth's magnetosphere and their interaction with high-energy particles // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 23303–23310. DOI: 10.1029/1999JA000396.
- Klimushkin D.Y. How energetic particles construct and destroy poloidal high-m Alfvén waves in the magnetosphere // Planet. Space Sci. 2007. V. 55. P. 722–730. DOI: 10.1016/j.pss.2005.11.006.
- Leonovich A.S., Kozlov D.A. Alfvénic and magnetosonic resonances in a nonisothermal plasma // Plasma Phys. and Controlled Fusion. 2009b. V. 51, N 8. 085007. DOI: 10.1088/0741-3335/51/8/085007.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (monochromatic oscillations) // Planet. Space Sci. 1989. V. 37. P. 1095–1116. DOI: 10.1016/0032-0633(89)90081-0.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // Planet. Space Sci. 1993. V. 41. P. 697–717. DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Linear transformation of the standing Alfvén wave in an axisymmetric magnetosphere // Planet. Space Sci. 1995. V. 43. P. 885–893. DOI: 10.1016/0032-0633(94)00207-8.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Penetration to the Earth's surface of standing Alfvén waves excited by external currents in the ionosphere // Ann. Geophys. 1996. V. 14. P. 545–556. DOI: 10.1007/s00585-996-0545-1.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. A model equation for monochromatic standing Alfvén waves in the axially-

symmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 11443–11456. DOI: 10.1029/96JA02523.

Leonovich A.S., Kozlov D.A., Pilipenko V.A. Magnetosonic resonance in a dipole-like magnetosphere // *Ann. Geophys.* 2006. V. 24. P. 2277–2289. DOI: 10.5194/angeo-24-2277-2006.

Liu W.W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 4927–4931. DOI: 10.1029/96JA03561.

Mager P.N., Klimushkin D.Y., Pilipenko V.A., et al. Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // *Annales Geophysicae*. 2009. V. 27. P. 3875–3882. DOI: 10.5194/angeo-27-3875-2009.

Mazur N.G., Fedorov E.N., Pilipenko V.A. Dispersion relation for ballooning modes and condition of their stability in the near Earth plasma // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2012. V. 52. P. 603–612. DOI: 10.1134/S0016793212050118.

Miura A. Ballooning instability as a mechanism of the near-Earth onset of substorms // *Space Sci. Rev.* 2001. V. 95, N 1–2. P. 387–398. DOI: 10.1023/A:1005249915285.

Miura A. A magnetospheric energy principle for hydromagnetic stability problems // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. A06234. DOI: 10.1029/2006JA011992.

Miura A., Ohtani S., Tamao T. Ballooning instability and structure of diamagnetic hydromagnetic waves in a model magnetosphere // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94. P. 15231–15242. DOI: 10.1029/JA094iA11p15231.

Ohtani S., Miura A., Tamao T. Coupling between Alfvén and slow magnetosonic waves in an inhomogeneous finite-beta plasma. I. Coupled equations and physical mechanism // *Planet. Space Sci.* 1989. V. 37. P. 567–577. DOI: 10.1016/0032-0633(89)90097-4.

Parnowski A.S. Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Ann. Geophys.* 2007. V. 25. P. 1391–1403. DOI: 10.5194/angeo-25-1391-2007.

Rankin R., Kabin K., Lu J. Y., et al. Magnetospheric field-line resonances: Ground-based observations and modeling // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. A10S09. DOI: 10.1029/2004JA010919.

Takahashi K., Zanetti L.J., McEntire R.W., et al. Disruption of the magnetotail current sheet observed by AMPTE/CCE // *Geophys. Res. Lett.* 1987. V. 14. P. 1019–1022. DOI: 10.1029/GL014i010p01019.

Zhu P., Raeder J., Germaschewski K., et al. Initiation of ballooning instability in the near-Earth plasma sheet prior to the 23 March 2007 THEMIS substorm expansion onset // *Annales Geophysicae*. 2009. V. 27. P. 1129–1138. DOI: 10.5194/angeo-27-1129-2009.

## REFERENCES

Birn J. Magnetotail dynamics: Survey of recent progress. *The dynamic magnetosphere*. Springer Science; Business Media B.V., 2011, pp. 49–54 (IAGA Special Sopron Book Ser. vol. 3). DOI: 10.1007/978-94-007-0501-2\_4.

Cheng C.Z. Physics of substorm growth phase, onset, and dipolarization. *Space Sci. Rev.* 2004, vol. 113, no. 1–2, pp. 207–270. DOI: 10.1023/B:SPAC.0000042943.59976.0e.

Cheng C.Z., Chance M.S. Low-n shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas. *Phys. Fluids*. 1986, vol. 29, no. 11, pp. 3695–3701. DOI: 10.1063/1.865801.

Cheng C.Z., Lui A. T.Y. Kinetic ballooning instability for substorm onset and current disruption observed by AMPTE/CCE. *Geophys. Res. Lett.* 1998, vol. 25, pp. 4091–4094. DOI: 10.1029/1998GL900093.

Cheremnykh O.K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Controlled Fusion*. 2010, vol. 52, no. 9. 095006. DOI: 10.1088/0741-3335/52/9/095006.

Coppi B. Topology of ballooning modes. *Phys. Rev. Lett.* 1977, vol. 39, no. 16, pp. 939–942. DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.939.

Dewar R.L., Glasser A.H. Ballooning mode spectrum in general toroidal systems. *Phys. Fluids*. 1983, vol. 26, no. 10, pp. 3038–3052. DOI: 10.1063/1.864028.

Frieman E., Rotenberg M. On hydromagnetic stability of stationary equilibria // *Rev. Modern Phys.* 1960, vol. 32, pp. 898–902. DOI: 10.1103/RevModPhys.32.898.

Glassmeier K.-H., Othmer C., Cramm R., et al. Magnetospheric field line resonances: A comparative planetology approach. *Surveys in Geophys.* 1999, vol. 20, pp. 61–109. DOI: 10.1023/A:1006659717963.

Hameiri E., Laurence P., Mond M. The ballooning instability in space plasmas. *J. Geophys. Res.* 1991, vol. 96, pp. 1513–1526. DOI: 10.1029/90JA02100.

Kamide Y., Maltsev Y. P. 2007 Geomagnetic Storms. *Handbook of the Solar-Terrestrial Environment* / Ed. Y. Kamide, A C-L Chian. Berlin: Springer, pp. 355–374.

Klimushkin D.Y. The propagation of high-m Alfvén waves in the Earth's magnetosphere and their interaction with high-energy particles. *J. Geophys. Res.* 2000, vol. 105, pp. 23303–23310. DOI: 10.1029/1999JA000396.

Klimushkin D.Y. How energetic particles construct and destroy poloidal high-m Alfvén waves in the magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 2007, vol. 55, pp. 722–730. DOI: 10.1016/j.pss.2005.11.006.

Leonovich A.S., Kozlov D.A. Alfvénic and magnetosonic resonances in a nonisothermal plasma. *Plasma Phys. and Controlled Fusion*. 2009b, vol. 51, no. 8. 085007. DOI: 10.1088/0741-3335/51/8/085007.

Leonovich A.S., Mazur V.A. Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (monochromatic oscillations). *Planet. Space Sci.* 1989, vol. 37, pp. 1095–1116. DOI: 10.1016/0032-0633(89)90081-0.

Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1993, vol. 41, pp. 697–717. DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.

Leonovich A.S., Mazur V.A. Linear transformation of the standing Alfvén wave in an axisymmetric magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1995, vol. 43, pp. 885–893. DOI: 10.1016/0032-0633(94)00207-8.

Leonovich A.S., Mazur V.A. Penetration to the Earth's surface of standing Alfvén waves excited by external currents in the ionosphere. *Ann. Geophys.* 1996, vol. 14, pp. 545–556. DOI: 10.1007/s00585-996-0545-1.

Leonovich A.S., Mazur V.A. A model equation for monochromatic standing Alfvén waves in the axially-symmetric magnetosphere. *J. Geophys. Res.* 1997, vol. 102, pp. 11443–11456. DOI: 10.1029/96JA02523.

Leonovich A.S., Kozlov D.A., Pilipenko V.A. Magnetosonic resonance in a dipole-like magnetosphere. *Ann. Geophys.* 2006, vol. 24, pp. 2277–2289. DOI: 10.5194/angeo-24-2277-2006.

Liu W.W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited. *J. Geophys. Res.* 1997, vol. 102, pp. 4927–4931. DOI: 10.1029/96JA03561.

Mager P.N., Klimushkin D.Y., Pilipenko V.A., et al. Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma. *Annales Geophysicae*. 2009, vol. 27, pp. 3875–3882. DOI: 10.5194/angeo-27-3875-2009.

Mazur N.G., Fedorov E.N., Pilipenko V.A. Dispersion relation for ballooning modes and condition of their stability in the near Earth plasma. *Geomagnetism and Aeronomy*. 2012, vol. 52, pp. 603–612. DOI: 10.1134/S0016793212050118.

Miura A. Ballooning instability as a mechanism of the near-Earth onset of substorms. *Space Sci. Rev.* 2001, vol. 95, no. 1–2, pp. 387–398. DOI: 10.1023/A:1005249915285.

Miura A. A magnetospheric energy principle for hydromagnetic stability problems. *J. Geophys. Res.* 2007, vol. 112, A06234. DOI: 10.1029/2006JA011992.

Miura A., Ohtani S., Tamao T. Ballooning instability and structure of diamagnetic hydromagnetic waves in a model magnetosphere. *J. Geophys. Res.* 1989, vol. 94, pp. 15231–15242. DOI: 10.1029/JA094iA11p15231.

Ohtani S., Miura A., Tamao T. Coupling between Alfvén and slow magnetosonic waves in an inhomogeneous finite-beta plasma. I. Coupled equations and physical mechanism. *Planet. Space Sci.* 1989, vol. 37, pp. 567–577. DOI: 10.1016/0032-0633(89)90097-4.

Parnowski A.S. Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth. *Ann. Geophys.* 2007, vol. 25, pp. 1391–1403. DOI: 10.5194/angeo-25-1391-2007.

Rankin R., Kabin K., Lu J. Y., et al. Magnetospheric field-line resonances: Ground-based observations and modeling. *J. Geophys. Res.* 2005, vol. 110, A10S09. DOI: 10.1029/2004JA010919.

Takahashi K., Zanetti L.J., McEntire R.W., et al. Disruption of the magnetotail current sheet observed by AMPTE/CCE. *Geophys. Res. Lett.* 1987, vol. 14, pp. 1019–1022. DOI: 10.1029/GL014i010p01019.

Zhu P., Raeder J., Germaschewski K., et al. Initiation of ballooning instability in the near-Earth plasma sheet prior to the 23 March 2007 THEMIS substorm expansion onset. *Annales Geophysicae*. 2009, vol. 27, pp. 1129–1138. DOI: 10.5194/angeo-27-1129-2009.