

На правах рукописи



Елагандула Нага Варун

**Теоретические исследования солнечных корональных петель:
нелинейная радиальная мода**

Специальность 01.03.03 – Физика Солнца

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Элиста – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова»

Научный руководитель:

Михаляев Бадма Борисович,
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой теоретической физики факультета математики, физики и информационных технологий Калмыцкого государственного университета имени Б. Б. Городовикова.

Официальные оппоненты:

ЦАП Юрий Теодорович,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник лаборатории физики Солнца Федерального государственного бюджетного учреждения науки Крымской астрофизической обсерватории Российской академии наук.

АНФИНОГЕНТОВ Сергей Александрович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник лаборатории радиоастрофизических исследований Солнца Федерального государственного бюджетного учреждения науки Ордена Трудового Красного Знамени Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской Академии наук.

Защита состоится на заседании диссертационного совета Д 003.034.01 при Институте солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 126А, а/я 291.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИСЗФ СО РАН (<http://iszf.irk.ru>).

Автореферат разослан « _____ » _____ 2022 года

Ученый секретарь

диссертационного совета

кандидат физ.-мат. наук

Поляков В.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Введение

В 1970-х годах стало известно, что солнечная атмосфера очень неоднородна [11, 27, 39, 45]. В частности, в нижней части солнечной атмосферы (в фотосфере и хромосфере) магнитное поле сосредоточено в магнитных трубках, где его величина составляет несколько килогаусс. Типичными примерами таких магнитных трубок являются солнечные пятна. В верхних слоях солнечной атмосферы (в верхней части хромосферы и короны) магнитное давление значительно доминирует над газовым давлением плазмы, поэтому магнитное поле более однородно. Однако плазма в этих слоях очень неоднородна, что приводит к сильному изменению альвеновской скорости. Плазму с такими свойствами обычно называют магнитно-структурированной плазмой.

В отличие от фотосферы и хромосферы, различные физические свойства и параметры короны очень сложно определить из-за чрезвычайно слабого света, создаваемого короной. Также важно понять механизмы выброса корональной массы, солнечного ветра и других корональных явлений, для которых информации о распределении магнитных полей и плотности плазмы явно необходимы. Решение этой проблемы лежит в области, называемой *корональной сейсмологией*. Аналогично гелиосейсмологии и геосейсмологии корональная сейсмология изучает поведение и распространение волн и, в частности, магнитозвуковых волн в короне для определения таких физических параметров, как магнитное поле.

Открытие магнитной структуры в солнечной атмосфере усилило интерес теоретиков к изучению распространения волн в магнитно-структурированной плазме. В большинстве теоретических работ были рассмотрены простейшие магнитные структуры, являющиеся магнитными слоями и магнитными трубками. Среди них магнитная трубка является наиболее интересной с точки зрения корональной сейсмологии. В первых исследованиях использовалась линейная теория магнитозвуковых волн. Магнитозвуковые вытекающие волны (*Leaky MHD modes*) в магнитной трубке в линейном приближении впервые были изучены Зайцевым и Степановым [43], далее, вероятно, наиболее полное исследование линейных захваченных магнитозвуковых волн (*Confined MHD modes*) в магнитной трубке было дано Эдвином и Робертсом [8]. Они в своей работе показали, что в общем случае для однородной магнитной трубки существуют медленная и быстрая радиальные, изгибные и баллонные моды, но стоит отметить, что в случае корональных петель из всех магнитозвуковых мод наиболее интересными с точки зрения корональной сейсмологии являются быстрая радиальная мода и быстрая изгибная мода, которые относятся к так называемой категории объемных мод.

В корональных условиях, т.е. при $\beta \ll 1$ (где β является параметром плазмы и определяется как отношение газового давления к магнитному давлению) поверхностная и медленная моды не существуют в линейном приближении, поэтому радиальная и изгибная моды, по сути, означают быструю радиальную и быструю изгибную моды соответственно. В радиальной моде плотность

плазмы модулируется в первом порядке, и поэтому такая мода используется для интерпретации квазипериодических пульсаций (КПП), которые часто наблюдаются при солнечных вспышках.

Большая часть исследований в МГД-волнах проводится только в линейном приближении из-за простоты математических методов, таким образом обычно применяемая корональная сейсмология является линейной корональной сейсмологией, но в немалых случаях, реальная физическая природа этих волновых процессов на самом деле является нелинейной. Так допустим вариации интенсивности излучения возмущений около $3 \sim 4 \%$ от фона, тогда можно использовать линейный подход, но если вариации около 10% или больше, тогда необходимо использовать нелинейный подход.

В линейном приближении пренебрегают членами второго и более высоких порядков, а полученные уравнения фактически описывают явления в приближении первого порядка. В результате многие эффекты, такие как образование солитонов, самофокусировка, фазовая самомодуляция и т.д., не могут быть поняты с помощью простой линейной теории. Как ранее упоминалось, для магнитной трубки в короне (корональной петли) из всех МГД-мод радиальная и изгибная моды остаются важными для корональной сейсмологии и, следовательно, развитие нелинейных теорий этих мод является актуальной задачей.

Начиная с 1980-х годов развитие вычислительной техники способствовало стабильному росту количества научных работ по нелинейным теориям в этой области. Таким образом, нелинейные волны в магнитном слое были впервые рассмотрены Робертсом и Манжени [32], а в магнитных трубках впервые исследованы Робертсом [30], где он вывел так называемое уравнение Лейбовича-Робертса для медленных поверхностных радиальных волн в магнитной трубке, используя усредненные уравнения МГД по поперечному сечению трубки для описания движения возмущений внутри неё. Мерзляков и Рудерман [17, 19] вывели уравнение Бенджамина-Оно без использования усредненных уравнений МГД внутри магнитном слое (*magnetic slab*) и исследовали медленные нелинейные объемные волны в магнитном слое. Мерзляков и Рудерман [18] также изучали распространение быстрых нелинейных поверхностных волн в магнитном слое в случае отсутствия внешнего магнитного поля. Они показали, что эти волны описываются уравнением Хохлова-Заболоцкой [41, 34]. Молотовщиков и Рудерман [21] использовали подход, отличающийся от того, который был применён Робертсом [30], и получили уравнение Лейбовича-Робертса, описывающее медленные волны в магнитной трубке, и далее изучали распространение солитонов медленной моды в магнитных трубках. Накаряков и др. [24] вывели нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для радиальной моды в магнитном слое в корональных условиях с гладким профилем плотности.

Из вышеупомянутых работ следует, что нелинейная медленная радиальная мода хорошо изучена в магнитном слое и трубке, а также существует нелинейная теория радиальной моды в корональных условиях в случае плоской геометрии с гладким профилем плотности [24]. Логично, что для дополнения уже

существующих теорий необходимо развивать нелинейную теорию радиальной моды магнитной трубки в короне.

Радиальная мода сильно дисперсионна и, соответственно, в случае средней амплитуды волн основным нелинейным эффектом является нелинейная волновая модуляция, описываемая нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Таким образом, в диссертации **были поставлены и решены следующие задачи:**

1. Вывести нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), описывающее радиальную моду в случае корональных петель.
2. Изучить свойства нелинейных коэффициентов НУШ.
3. Изучить и промоделировать модуляционную неустойчивость в случае плоской волны перенормированной по частоте (частное решение НУШ) и использовать её в первую очередь для качественного моделирования квазипериодических пульсаций (КПП).
4. Промоделировать различные нелинейные эффекты, такие как образование солитонов, солитоноподобных образований и т.п.

Актуальность научной работы

Квазипериодические пульсации (КПП) встречаются почти всегда во время солнечных вспышек. Экспериментальные данные показывают, что КПП могут показывать несколько периодов т.е., много-периодичность [40]. Существует много предложенных механизмов для генерации КПП с периодами более одной секунды, которые можно в общих чертах разделить на две категории, а именно механизмы загрузки/разгрузки и механизмы, основанные на МГД-волнах [22].

Механизмы загрузки/разгрузки — это циклические или квазициклические физические процессы, влияющие на магнитное пересоединение, которое в своей очереди модулирует энерговыделение во время солнечной вспышки. Существенной концепцией этих механизмов является так называемое магнитное капание. Механизмы, основанные на МГД-волнах, интерпретируют наблюдаемые КПП как результат модуляции электромагнитного спектра МГД-волнами и в основном радиальной модой. Модуляция электромагнитного излучения радиальной модой является одним из популярных объяснений КПП [2, 15, 16, 23, 29, 32, 40]. В силу того, что для интерпретации КПП обычно используется линейная теория радиальной моды, в то время как такие пульсации в основном наблюдаются при вспышках, т.е. при высокоэнергетических процессах, становится ясно, что линейная теория не может в полной мере моделировать КПП [12, 13]. Таким образом, актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью развития нелинейной теории радиальной моды.

Цель научной работы

Целью диссертационной работы является исследование и моделирование нелинейной радиальной моды корональных магнитных петель с помощью уравнения НУШ. Для этого сначала выводится НУШ из уравнений идеальной магнитогидродинамики (МГД) с помощью метода различных масштабов с соответствующими граничными условиями и изучаются свойства нелинейных коэффициентов НУШ. Затем изучаются модуляционная неустойчивость системы, условия появления солитонов и солитоноподобных образований.

Научная новизна

1. Получено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды в однородной магнитной трубке для условий солнечной короны. Такое уравнение описывает множество нелинейных явлений, таких как модуляционная неустойчивость, образование солитонов, волновая турбулентность и т.д.
2. Обнаружена супернелинейность в случае радиальной моды корональных петель. Представлена вспомогательная функция, названная супернелинейной функцией Σ , с помощью которой можно определить область возникновения этого явления.
3. Изучена модуляционная неустойчивость в случае радиальной моды магнитной трубки и качественно промоделированы квазипериодические пульсации на основе модуляционной неустойчивости.
4. С помощью НУШ проведено моделирование таких явлений, как классические солитоны, солитоноподобные образования и солитон Перегринна.

Теоретическая и практическая значимость

Исследование направлено главным образом на изучение нелинейного поведения волн корональных петель, поэтому результаты нашей работы могут быть использованы в изучении таких нелинейных явлений, как образование солитонов в корональных петлях, самофокусировка, образование бризеров, фазовая самомодуляция, нелинейная волновая турбулентность, модуляционная неустойчивость и т.д.

Учитывая то обстоятельство, что в ближайшем будущем появятся новые телескопы наземного и космического базирования с разрешающей способностью порядка $\leq 0.1''$, с помощью которых можно будет наблюдать тонкую структуру короны, можно надеяться, что настоящая работа послужит основой для теоретического объяснения наблюдательных проявлений нелинейной радиальной моды в корональных структурах.

Результаты, выносимые на защиту

1. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды однородной магнитной трубки в условиях солнечной короны.
2. Свойства нелинейных коэффициентов полученного НУШ для радиальной моды и на основе этого, исследование появления супернелинейности.
3. Результаты изучения модуляционной неустойчивости в случае нелинейной радиальной моды для различных нелинейных параметров и амплитуд. Качественное моделирование квазипериодических пульсаций (КПП) в послевспышечных событиях на основе модуляционной неустойчивости.
4. Результаты численного моделирования ряда нелинейных эффектов, таких как образование солитонов (классический солитон и солитон Перегринна) и солитоноподобных образований.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена докладами и обсуждениями на семинарах, всероссийских конференциях. Результаты научной работы опубликованы в 10 публикациях, из которых 4 статьи опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК и индексируемых Scopus и WoS, а 6 – в сборниках трудов и материалов конференции.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. XIX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015», 5-9 октября 2015 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2015.
2. Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных «ВНКСФ-22». – 2016, Ростов на Дону, Россия.
3. XXI Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2017”, Fast sausage soliton in the coronal loops. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2017-10-10.
4. XXI Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2017”, Нелинейное уравнение Шредингера для осесимметричных мод солнечных магнитных трубок. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2017.
5. BUKS2018 Workshop on "Waves and Instabilities in the Solar Atmosphere: Confronting the Current State-of-the Art", Nonlinear sausage mode of coronal loops. Tenerife, Spain, 2018.
6. XXII Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2018”, Нелинейные радиальные колебания солнечных корональных трубок. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2018.
7. XXIV Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2020”, Observational evidence of a soliton like feature in the active region NOAA 8214 and its modeling using the nonlinear Schrödinger equation. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2020.
8. XVI ежегодная конференция "Физика плазмы в солнечной системе", Modulational instability of fast sausage mode as one of the possible mechanisms for quasi-periodic pulsations during the solar flares. Москва, ИКИ РАН, 2021.
9. XXV Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2021”, Fast sausage Peregrine solitons as one of the possible candidates for the nanoflares. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2021.

Список работ, опубликованных по теме научной работы

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S., **Naga Varun Y.** Nonlinear radial oscillations of coronal loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2016. – V. 56. – №. 8. – P. 1040-1044.
2. **Naga Varun Y.**, Mankaeva G. A., Mikhalyaev B. B. Fast Sausage Solitons and Super Nonlinearity in Coronal Loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2018. – V. 58. – №. 7. – P. 947-952.

3. Mikhalyaev B. B., Mankaeva G. A., **Naga Varun Y.** Modulational Instability of Radial Oscillations of Coronal Loops //Geomagnetism and Aeronomy. –2019. – V. 59. – №. 8. – P. 1108-1113.
4. **Yelagandula Naga Varun.** Modulational Instability of Fast Sausage Mode as One of the Possible Mechanisms for Quasiperiodic Pulsations during Solar Flares //The Astrophysical Journal. – 2021. – Т. 923. – №. 2. – P. 131.
Публикации в сборниках трудов конференций:
5. Михалыев Б.Б., Рудерман М.С., **Нага Варун Е.** Нелинейная радиальная мода корональных петель //Сборник трудов XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015». – 2015. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.281-284.
6. **Нага Варун Е.** Модуляционная неустойчивость магнитозвуковых волн в однородной магнитной трубке в корональных условиях Солнца. //Материалы конференции 22 Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных «ВНКСФ-22», – 2016. Ростов на Дону. – С.312-313.
7. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Fast sausage solitons in the coronal loops //Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017». – 2017. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.231-234.
8. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Nonlinear Schrödinger equation for the sausage mode in homogenous magnetic flux tubes// Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017» – 2017. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.235-238.
9. Михалыев Б. Б., **Нага Варун Е.**, Манкаева Г. А. Модуляционная неустойчивость радиальных колебаний корональных петель // Сборник трудов XXII Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2018» – 2018. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С. 291-294.
10. **Naga Varun Y.**, Solovev A. A., Mikhalyaev B. B. Observational evidence of a soliton like feature in the active region NOAA 8214 and its modeling using the nonlinear Schrödinger equation // Сборник трудов XXIV Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2020» –2020. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.235-238.

Личный вклад автора

Автор принимал участие в постановке задач, проведении теоретических расчетов, анализе и интерпретации результатов. При выводе нелинейного уравнения Шредингера, автор принимал участие проверяющего всех математических расчётов. Автором были созданы расчетные программы для вычисления нелинейных коэффициентов и моделирование нелинейных волн с помощью НУШ. В Главе 3 автором было обнаружена супернелинейность в случае радиальной моды корональных петель, и предложена вспомогательная функция для определения супернелинейности. В Главе 4 автором был предложен новый механизм для появления квазипериодических пульсаций во время солнечных вспышек на основе модуляционной неустойчивости. Определение задач исследования, обсуждение

полученных результатов и подготовка статей к публикации проводилось совместно с научным руководителем и соавторами.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Результаты, списка литературы. Общий объем диссертации составляет 104 страниц, включая 29 рисунков и 3 таблиц. Список литературы содержит 143 наименований. В Результатах представлены выводы по результатам научной работы.

Частично настоящая диссертационная работа выполнялась в рамках проекта РФФ 15-02-20001 «Исследования солнечной активности на основе данных наблюдений многоволновых синоптических комплексов», который был реализован в КалмГУ в 2015-2019 гг.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** отражены актуальность исследования, цель работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, степень достоверности и апробация результатов, список конференций, личный вклад автора и краткое содержание научной работы.

Глава 1 посвящена разбору классической работы Эдвина и Робертса [8] по МГД-волнам (захваченные магнитозвуковые моды) в цилиндрической геометрии и выводится дисперсионное уравнение для магнитозвуковых волн в рамках идеальной МГД. Также в этой главе даётся представление о радиальной и изгибной модах и обсуждаются некоторые их характеристики.

Глава 2 посвящена получению нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды корональных петель ($\beta \approx 0$) с помощью метода различных масштабов [37]. НУШ является универсальным нелинейным уравнением, которое моделирует нелинейное поведение волны в приближении огибающей. Такое уравнение с кубической нелинейностью описывает четырехволновое рассеяние, при котором первичная линейная несущая волна и три нелинейно генерируемые волновые моды взаимодействуют между собой, и, таким образом, НУШ описывает квазимонохроматическую волну в приближении огибающей.

Глава 2 организована следующим образом: в разделе 2.2 выведены основные исходные уравнения и граничные условия в цилиндрических координатах. В разделе 2.3 упоминается линейная теория радиальной моды магнитной трубки при корональных условиях, т.е. при $\beta \approx 0$. В разделе 2.4 с помощью метода различных масштабов получено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды.

В разделе 2.2 рассматривается однородная бесконечная длинная магнитная трубка с радиусом a . Равновесным магнитным полем является $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{n}$, где B_0 – постоянная, а \mathbf{n} – единичный вектор, параллельный оси Z трубки. Плотность при равновесии ρ_0 постоянна внутри и снаружи трубки. Следовательно, в цилиндрических координатах (r, φ, z) с осью Z совпадающей с осью трубки, плотность и магнитное поле представляются выражениями:

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_{0i}, & r < a \\ \rho_{0e}, & r > a \end{cases} \quad \text{и} \quad B_0 = \begin{cases} B_{0i}, & r < a \\ B_{0e}, & r > a. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь и далее индексы i и e означают параметры внутри и вне трубки соответственно. Далее, учитывая, что $\varphi \equiv 0$ для радиальной моды, с помощью идеальных магнитогидродинамических (МГД) уравнений и метода последовательных самосогласованных приближений выводится нелинейное уравнение с кубической нелинейностью для радиального компонента v_r , нормированного по альвеновской скорости V_A следующим образом:

$$\frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} - \Delta_2 v_r = N_2(v_r) + N_3(v_r) + O(\epsilon^4), \quad (2.2)$$

где

$$N_2(v_r) = -V_A \Delta_2 \left(\frac{v_r}{r} I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) - V_A \frac{\partial}{\partial r} (v_r I \Delta_2 v_r), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} N_3(v_r) = & V_A^2 \Delta_2 \left[V_A^2 \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + \frac{v_r}{r} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \right] \\ & + V_A^4 \left\{ \left[I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \right] \frac{\partial}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial z} I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \right] \right\} I \Delta_2 v_r \\ & - V_A^4 (\Delta_2 v_r) I^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + V_A^2 \frac{\partial v_r}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + V_A^2 v_r I \Delta_2 \left(\frac{v_r}{r} I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $I = \int dt$: (интеграл по времени), $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{(\mu_0 \rho_0)}}$ и $\Delta_2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}$, где ∇ является дифференциальным оператором набла в цилиндрических координатах, а $N_2(v_r)$ и $N_3(v_r)$ содержат квадратичные и кубические члены. В выражениях (2.3) и (2.4) $\epsilon \ll 1$ является безразмерным параметром, степень которого выражает порядок нелинейности.

В разделе 2.2 вводится функция $\eta(t, z)$ для граничных возмущений, которая определяется через выражение для возмущённого радиуса магнитной трубки $r = a(1 + \eta(t, z))$. С помощью функции $\eta(t, z)$ далее получают следующие кинематические и динамические граничные условия:

$$\frac{v_r}{a} = \frac{1}{V_A} \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{при} \quad r = a(1 + \eta) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}_i^2 = \mathbf{B}_e^2 \quad \text{при} \quad r = a(1 + \eta) \quad (2.6)$$

где v_z – скорость возмущения вдоль оси Z , а \mathbf{B}_i^2 и \mathbf{B}_e^2 пропорциональны магнитному давлению с учётом возмущения внутри и вне трубки. Далее в разделе 2.3 упоминается линейная теория радиальной моды.

В разделе 2.4 находится решение для нелинейного уравнения (2.2) в следующем виде:

$$v_r = \epsilon v_{1r} + \epsilon^2 v_{2r} + \epsilon^3 v_{3r} + \text{c. c.}, \quad (2.7)$$

где

$$v_{1r} = A(Z_1, T_1, Z_2, T_2) \Lambda(r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.8)$$

$$\Lambda \equiv \Lambda(r) = \begin{cases} J_1(r|\lambda_i|), & \text{при } r < a \text{ и } \lambda_i^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_{Ai}^2} \\ \frac{V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{V_{Ae} K_1(a\lambda_e)} K_1(r\lambda_e), & \text{при } r > a \text{ и } \lambda_e^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_{Ae}^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$Z_1 = \epsilon z, T_1 = \epsilon t, Z_2 = \epsilon^2 z, T_2 = \epsilon^2 t \quad (2.10)$$

Здесь J_1 и K_1 являются обычной и модифицированной функциями Бесселя и для дальнейшего применения метода различных масштабов вводятся новые масштабирующие параметры Z_1, T_1, Z_2, T_2 , а амплитуда $A(Z_1, T_1, Z_2, T_2)$ является медленно меняющейся функцией. Такая амплитуда описывает огибающую для четырёхволнового взаимодействия, а v_{2r} и v_{3r} зависят от r, z, t, Z_1, T_1, Z_2 и T_2 . V_{Ai} и V_{Ae} являются внутренней и внешней альвеновскими скоростями, а v_{1r} на самом деле является решением при линейном приближении, т.е. когда правой частью нелинейного уравнения (2.2) пренебрегают.

Далее получено аналитическое выражение для v_{2r} и в конце показано, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) выводится как следствие условия разрешимости для дифференциального уравнения, описывающего v_{3r} . Полученное нелинейное уравнение Шредингера имеет следующую форму:

$$i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_g \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \sigma \Psi |\Psi|^2 = 0 \quad (2.11)$$

где V_g – групповая скорость. Коэффициенты α и σ характеризуют природу нелинейной волны и их общее выражение получается следующим образом:

$$\alpha = \frac{2}{\omega \int_0^\infty s \Lambda^2 ds} \int_0^\infty \gamma^* \left(\frac{\omega V_g}{V_A} - k V_A \right)^2 r \Lambda dr + \frac{V_g (\omega - k V_g)}{2k\omega}, \quad (2.12)$$

$$\sigma = \frac{1}{\int_0^\infty s \Lambda^2 ds} \left(\int_0^\infty \frac{r \Lambda V_A^4 (g_2 - g_3)}{4\omega^3} dr + \frac{V_{Ai}}{2\omega} [a|\lambda_i| J_0(a|\lambda_i|) F - J_1(a|\lambda_i|) G] \right) \quad (2.13)$$

Где

$$g_2 = \Delta_k \left(\frac{\Lambda d(r\Phi)}{r dr} - 2 \frac{\Phi d(r\Lambda)}{r dr} \right) + \frac{d}{dr} (\Lambda \Delta_{2k} \Phi - 2\Phi \Delta_k \Lambda), \quad (2.14)$$

$$g_3 = \Delta_k \frac{\Lambda d}{r dr} \Lambda \frac{d(r\Lambda)}{dr} + \frac{d}{dr} \Lambda \Delta_{2k} \frac{\Lambda d(r\Lambda)}{r dr} + \frac{k^2 V_A^2}{\omega^2} \Delta_k \Lambda^2 \Delta_k \Lambda + \frac{2k^2 V_A^2}{\omega^2} \Lambda (\Delta_k \Lambda)^2 + 2k^2 \Lambda^2 \Delta_k \Lambda - \frac{2\omega^2 d^2 \Lambda^3}{V_A^2 dr^2}, \quad (2.15)$$

$$F = \frac{1}{\omega^2} \left[V_A^3 \left(\frac{\Phi d\Lambda}{2 dr} - \Lambda \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Lambda^2 d^2 \Lambda}{2 dr^2} + \frac{\Lambda (d\Lambda)^2}{2} + \frac{V_A^2 k^2}{2\omega^2} \Lambda^2 \Delta_k \Lambda \right) \right], \quad (2.16)$$

$$G = \frac{1}{\omega^2} \left[V_A^3 \left\{ ak^2 \Lambda \Phi + \frac{1}{2a} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \frac{d(r\Phi)}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\Phi \frac{d(r\Lambda)}{dr} - \frac{\Lambda dr\Phi}{2 dr} \right) - \Lambda \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} + \Phi \frac{d}{dr} r \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{\Lambda d\Lambda}{2 dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) - \frac{\Lambda^2 d}{2 dr} \left(r \frac{d^2 \Lambda}{dr^2} \right) + \Lambda \frac{d^2 \Lambda d(r\Lambda)}{dr^2 dr} - \frac{\Lambda d\Lambda}{2 dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) + \frac{V_A^2 k^2 d}{2\omega^2 dr} (r\Lambda^2 \Delta_2 \Lambda) - \frac{\Lambda^2 d^2}{2 dr^2} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) + \frac{ak^2 \Lambda^2 d\Lambda}{2 dr} - k^2 \Lambda^2 \frac{d(r\Lambda)}{dr} + \frac{1}{2a} \frac{d}{dr} \left[\frac{r\Lambda d}{dr} \left(\Lambda \frac{d(r\Lambda)}{dr} \right) \right] + \Lambda \frac{d\Lambda}{dr} \frac{d^2}{dr^2} (r\Lambda) + \frac{\Lambda d(r\Lambda)}{2a dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) - \frac{1}{2a} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Lambda d(r\Lambda)}{dr} \right) \right\} \right] \quad (2.17)$$

Здесь $\Delta_k = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k^2$ и $\Delta_{2k} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - (2k)^2$, а в выражениях для F и G квадратными скобками обозначен скачок аргумента на границе магнитной трубки. Y^* и Φ являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 Y^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY^*}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right) Y^* = \Lambda \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \left(\frac{4\omega^2}{V_A^2} - 4k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi = \Delta_{2k} \left(\frac{\Lambda d(r\Lambda)}{r dr} \right) + \frac{d}{dr} (\Lambda \Delta_k \Lambda) \quad (2.19)$$

Глава 3 посвящена изучению коэффициентов α , σ , V_g и графическому представлению их зависимости от различных физических параметров. В разделе 3.2 определяются константы интегрирования в выражении для функции Φ . Затем с помощью этого проводится вычисление коэффициента нелинейного взаимодействия σ . Графические зависимости α , σ показаны на рисунках 3.1, 3.2 соответственно. Рисунок 3.2 показывает, что зависимость σ довольно сложна.

Заметим, что $\sigma < 0$ для всех трех случаев отношений $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$ при $k = k_c$ (k_c – критическое волновое число радиальной моды в линейном приближении). С ростом k увеличивается σ , достигая положительного значения и локального максимума. При дальнейшем увеличении k значения σ становятся отрицательными до достижения сингулярности. Область, где абсолютное значение σ аномально увеличивается в окрестностях сингулярности, мы называем супернелинейной зоной. На рис. 3.2 эти зоны отмечены как А, В и С для трех различных случаев $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$.

Подобные сингулярности в нелинейном коэффициенте σ встречаются и в гидродинамике для нелинейных капиллярно-гравитационных волн в воде с присутствием поверхностного натяжения [10, 15].

Глава 4 посвящена изучению таких нелинейных явлений, как модуляционная неустойчивость, возникновение солитонов и солитоноподобных образований. Модуляционная неустойчивость моделируется в случае решения для НУШ в виде плоской волны, перенормированной по частоте, а затем моделируются квазипериодические осцилляции радиальной моды, которые могут вызвать квазипериодические пульсации во время солнечных вспышек. Затем обсуждаются классические солитоны и так называемый солитон Перегрини и моделируется формирование этих солитонов.

При численном решении и моделировании НУШ раскладывается на систему одновременных нелинейных дифференциальных уравнений в терминах действительных функций и далее применяется алгоритм `pdsolve` в математической программе Maple-2019.2 для того, чтобы решать систему полученных нелинейных уравнений.

В разделе 4.2 диссертации выводится дисперсионное соотношение для флуктуаций или возмущений в решении в виде плоской волны и демонстрируется модуляционная неустойчивость для случаев большой и малой амплитуд с положительными и отрицательными значениями α и σ . Моделирование показывает, что вначале вся магнитная трубка находится в состоянии когерентной радиальной скорости, но из-за модуляционной неустойчивости небольшие возмущения, которые в противном случае являются гармоническими вокруг когерентного состояния, экспоненциально возрастают и разбивают когерентное состояние на множество волновых пакетов. Далее показано, что для больших амплитуд модуляционная неустойчивость может привести к возникновению солитоноподобных образований, которые, будучи относительно стабильными, могут перемещаться на большие расстояния от своего начального положения.

Продемонстрировав модуляционную неустойчивость, показано, как такое явление вызывает квазипериодические осцилляции радиальной моды в короне. Несмотря на то, что решение НУШ в виде плоской волны представляет интерес, такое когерентное состояние в корональных петлях спокойных областей Солнца должно быть редким, поскольку решение описывает состояние, в котором радиус вдоль петли увеличивается наружу с определенной амплитудой радиальной скорости, вызывая глобальный цилиндрический режим. Однако можно представить себе формирование глобальной когерентной моды в активных областях

следующим образом: активные области, по существу, непотенциальны, и через корональные петли протекают токи, которые обеспечивают равновесие петли в магнитном поле. Если по какой-то причине ток в петле прерывается, избыточное давление, вызванное магнитным полем, толкает стенки петли наружу. Это состояние действительно может быть описано решением НУШ в виде перенормированной плоской волны. Поскольку это состояние модуляционно неустойчиво, должны наблюдаться квазипериодические осцилляции в радиальной моде в различных точках корональной петли. Так как скорость и смещение действуют в одном направлении, радиус петли колеблется вместе с радиальной скоростью, вызывая соответствующие возмущения плотности плазмы вдоль петли. Это позволяет предложить один из возможных механизмов для появления квазипериодических пульсаций. Квазипериодические пульсации часто наблюдаются во время вспышечной активности, т.е. в активных областях. Возмущения плотности плазмы, вызванные квазипериодическими осцилляциями радиальной моды, могут модулировать электромагнитные волны всего спектра, что может приводить к возникновению некоторых наблюдаемых квазипериодических пульсаций.

В разделе 4.3 обсуждаются известные решения НУШ в виде классического солитона и солитона Перегринна и далее в разделе 4.3 вводится модельная функция в следующей форме:

$$\Psi(z, t) = A(z, t)e^{i\left(A(z, t)\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}(z - v_g t)\right)} \quad (4.1a)$$

$$\text{где } A(z, t) = Ae^{-|A|(z+t)} \quad (4.1b)$$

Такая модельная функция описывает состояние импульсного типа для большой начальной амплитуды A . Однако такая функция не является точным решением НУШ. Поэтому модельная функция используется для получения соответствующих начальных условий, а затем устанавливаем $\Psi(\infty, t) = 0$, т.е. функция должна сводиться к нулю на бесконечности, так как такое условие очевидно с физической точки зрения, и, таким образом, весь набор граничных условий в комплексных переменных для численного решения НУШ выглядят следующим образом:

$$\Psi(0, t) = A(0, t)e^{-i\left(A(0, t)\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}v_g t\right)}; \Psi(z, 0) = A(z, 0)e^{i\left(A(z, 0)\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}z\right)} \quad (4.2)$$

$$\text{где } A(0, t) = Ae^{-|A|t}, A(z, 0) = Ae^{-|A|z} \text{ и } \Psi(\infty, t) = 0 \quad (4.3)$$

Далее решение было получено численно с помощью команды `pdsolve` в математической программе (Maple 2019.2) и графически проанализировано для различных нелинейных параметров, групповых скоростей и амплитуд. Такой анализ показал, что образование солитонов может наблюдаться в широком диапазоне нелинейных параметров при достаточно большой амплитуде, и в разделе 4.3 приводятся два таких случая на рисунках 4.10 и 4.11, демонстрирующих образование классических солитонов и солитонов Перегринна.

Интересно отметить, что солитоны Перегринна возникают в основном при относительно больших значениях σ и ближе к начальной границе, то есть ближе к точкам подножия хромосферы. Поскольку они в основном появляются вблизи хромосферы, то должны играть важную роль в импульсном нагреве нижней короны.

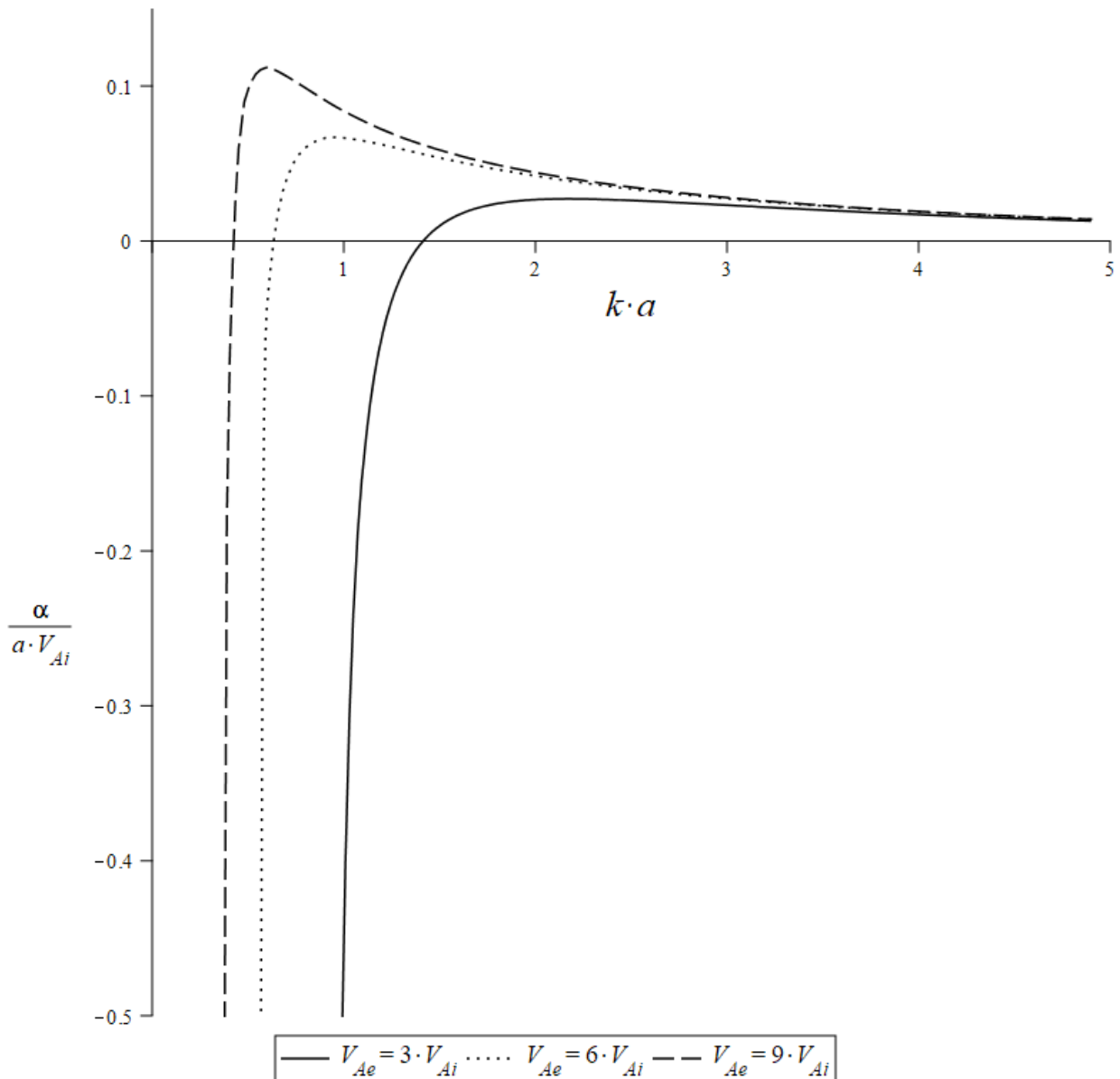


Рис 3.1. Зависимость безразмерного нелинейного коэффициента $\frac{\alpha}{aV_{Ai}}$ от безразмерного волнового числа ka .

(Результат был получен автором совместно с Михалевым Б.Б.)

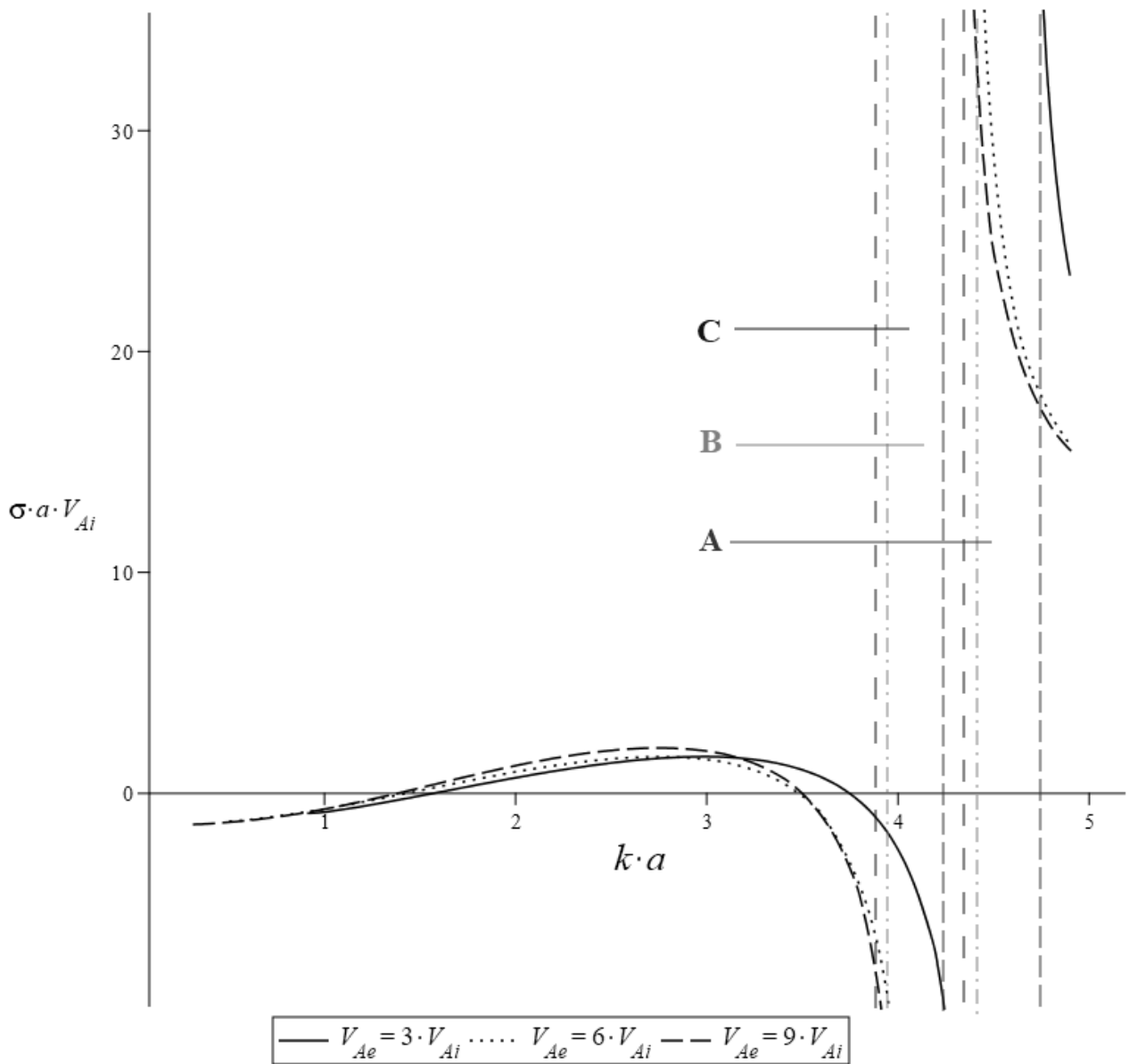


Рис 3.2. Зависимость безразмерного нелинейного коэффициента $\sigma a V_{Ai}$ от безразмерного волнового числа $k a$. Супернелинейные зоны обозначены для трёх случаев латинскими буквами А, В и С.

(Результат был получен автором)

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Abramowitz M., Stegun I. A., Romer R. H. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, 1988.
- [2]. Aschwanden M. J. New millennium solar physics. – New York: Springer International Publishing, 2019.
- [3]. Aschwanden M. Physics of the solar corona: an introduction with problems and solutions. – Springer Science & Business Media, 2006.
- [4]. Aschwanden M. Self-organized criticality in astrophysics: The statistics of non-linear processes in the universe. – Springer Science & Business Media, 2011.

- [5]. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1967. – V. 299. – №. 1456. – P. 59-76.
- [6]. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory //Journal of Fluid Mechanics. – 1967. – V. 27. – №. 3. – P. 417-430.
- [7]. Edwin P. M., Roberts B. Impulsively generated fast coronal pulsations //NASA Conference Publication. – 1986. – T. 2449.
- [8]. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetic cylinder //Solar Physics. – 1983. – V. 88. – №. 1-2. – P. 179-191.
- [9]. Falkovich G. Fluid mechanics: A short course for physicists. – Cambridge University Press, 2011.
- [10]. Grimshaw R. H. J. Envelope solitary waves // Solitary waves in fluids (ed. RHJ Grimshaw). – 2007. – P. 159-179.
- [11]. Harvey J. Observations of small-scale photospheric magnetic fields //Highlights of Astronomy. – Springer, Dordrecht. – 1977. – P. 223-239.
- [12]. Huang J. et al. Quasi-periodic pulsations with varying period in multi-wavelength observations of an X-class flare //The Astrophysical Journal. – 2014. – V. 791. – №. 1. – P. 44.
- [13]. Inglis A. R., Nakariakov V. M., Melnikov V. F. Multi-wavelength spatially resolved analysis of quasi-periodic pulsations in a solar flare //Astronomy & Astrophysics. – 2008. – V. 487. – №. 3. – P. 1147-1153.
- [14]. Kawahara T. Nonlinear self-modulation of capillary-gravity waves on liquid layer //Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – V. 38. – №. 1. – P. 265-270.
- [15]. Kopylova Y. G. et al. Oscillations of coronal loops and second pulsations of solar radio emission //Astronomy Letters. – 2007. – V. 33. – №. 10. – P. 706-713.
- [16]. Kopylova Y. G., Stepanov A. V., Tsap Y. T. Radial oscillations of coronal loops and microwave radiation from solar flares //Astronomy Letters. – 2002. – V. 28. – №. 11. – P. 783-791.
- [17]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1985. – V. 95. – №. 1. – P. 51-68.
- [18]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1986. – V. 105. – №. 2. – P. 265-289.
- [19]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1986. – V. 103. – №. 2. – P. 259-276.
- [20]. Merzlyakov E. G. Nonlinear long wave modulation in symmetric waves of a plane magnetic layer //Fluid Dynamics. – 1985. – V. 20. – №. 2. – P. 305-309.
- [21]. Molotovshchikov A. L., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1987. – V. 109. – №. 2. – P. 247-263.
- [22]. Nakariakov V. M., Melnikov V. F. Quasi-periodic pulsations in solar flares //Space Science Reviews. – 2009. – V. 149. – №. 1-4. – P. 119-151.

- [23]. Nakariakov V. M., Melnikov V. F., Reznikova V. E. Global sausage modes of coronal loops // *Astronomy & Astrophysics*. – 2003. – V. 412. – №. 1. – L7-L10.
- [24]. Nakariakov V. M., Roberts B., Petrukhin N. S. Nonlinear dynamics of fast magnetosonic waves ducted by a smooth plasma inhomogeneity // *Journal of plasma physics*. – 1997. – V. 58. – №. 2. – P. 315-327.
- [25]. Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions // *The ANZIAM Journal*. – 1983. – V. 25. – №. 1. – P. 16-43.
- [26]. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2003.
- [27]. Priest E. R. The structure of coronal loops // *Solar Physics*. – 1978. – V. 58. – №. 1. – P. 57-87.
- [28]. Prudnikov A. P., Brychkov Y. A., Marichev O. I. *Integrals and Series, Vol. 2: More Special Functions*, edited by Gordon and Breach Science Publishers. // Second Printing, 1998.
- [29]. Roberts B. *MHD waves in the solar atmosphere*. – Cambridge University Press, 2019.
- [30]. Roberts B. Solitary waves in a magnetic flux tube // *The Physics of fluids*. – 1985. – V. 28. – №. 11. – P. 3280-3286.
- [31]. Roberts B., Edwin P. M., Benz A. O. On coronal oscillations // *The Astrophysical Journal*. – 1984. – T. 279. – P. 857-865.
- [32]. Roberts B., Mangeney A. Solitons in solar magnetic flux tubes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1982. – V. 198. – №. 1. – P. 7-11.
- [33]. Rosenberg H. Evidence for MHD pulsations in the solar corona // *A&A*. – 1970. – V. 9. – P. 159.
- [34]. Rudenko O., Soluyan S. *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Consultants Bureau, New York, 1977). // *Studies in Soviet Science*. Translation from Russian by Robert T. Beyer, 1977.
- [35]. Ruderman M. S. *Nonlinear waves in the magnetically structured solar atmosphere* // *Turbulence, Waves and Instabilities in the Solar Plasma*. – Springer, Dordrecht. – 2003. – P. 239-274.
- [36]. Ruderman M. S. *Nonlinear waves in the solar atmosphere*. // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2006. – V. 364. – №. 1839. – P. 485-504.
- [37]. Shivamoggi B. *Perturbation methods for differential equations*. – Springer Science & Business Media, 2002.
- [38]. Sulem C., Sulem P. L. *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*. – Springer Science & Business Media, 2007.
- [39]. Vaiana G. S., Rosner R. Recent advances in coronal physics // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. – 1978. – V. 16. – №. 1. – P. 393-428.
- [40]. Van Doorsselaere T., Kupriyanova E. G., Yuan D. Quasi-periodic pulsations in solar and stellar flares: an overview of recent results (invited review) // *Solar Physics*. – 2016. – V. 291. – №. 11. – P. 3143-3164.

- [41]. Zabolotskaya E. A., Khokhlov R. V. Quasi-standing waves in nonlinear acoustics of restricted beams. //Akust. Zh. [Soviet Phys. Acoust.]. – 1969. – V. 15. – №. 1. – P. 40-47.
- [42]. Zabolotskaya E. A., Shvartsburg A. B. Nonlinear acoustic wave-guide //Soviet physics acoustics-USSR. – 1987. – V. 33. – №. 2. – P. 221-222.
- [43]. Zajtsev V. V., Stepanov A. V. On the origin of pulsations of type IV solar radio emission. Plasma cylinder oscillations (I) //IGAFS. – 1975. – V. 37. – P. 3-10.
- [44]. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: the beginning //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238. – №. 5. – P. 540-548.
- [45]. Zwaan C. On the appearance of magnetic flux in the solar photosphere //Solar Physics. – 1978. – V. 60. – №. 2. – P. 213-240.