

МНОГОЧАСТИЧНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

Н.Р. Минькова

MULTIPARTICLE STATISTICAL MODEL OF THE SOLAR WIND

N.R. Minkova

В работе представлен многочастичный статистический подход к моделированию плазмы (газа), в котором учитывается, что макроскопические параметры измеряются с конечным масштабом разрешения [1–3]. Этот подход основан на теореме Лиувилля, которая сформулирована для случая стационарной открытой системы в приближении детального динамического равновесия с окружающей средой. Учет конечности масштабов разрешения измеряющих приборов приводит к описанию плазмы (газа) многочастичными функциями распределения частиц по скоростям, на основе которых выводится функции распределения вероятностей флуктуаций и средние значения макроскопических параметров.

Многочастичный статистический подход позволяет построить при ряде упрощающих предположений модель стационарного солнечного ветра, результаты которой для среднестатистических значений макропараметров совпадают с результатами двухчастичной кинетической модели [4] и согласуются с данными наблюдений в плоскости эклиптики.

The statistical approach to modeling of plasma (gas) flows which macroscopic parameters are measured with finite instrumental resolution scales [1–3] is presented. This approach is based on the Liouville theorem for an open system assumed to be in detailed dynamic balance with surroundings. By considering finite instrumental resolution scales we come to description of plasma (gas) by multiparticle distribution functions. The latter ones serve for deriving probability distributions of fluctuations and corresponding macroscopic parameters.

The multiparticle statistical approach produces under some assumptions the stationary solar wind model whose results (macroscopic parameters) coincide with the two-particle kinetic model [4] and are consistent with in-ecliptic observational data.

Введение

Существующие кинетические модели, которые описывают солнечный ветер в широком диапазоне изменения гелиоцентрического расстояния, строятся в приближении стационарного сферически симметричного потока квазинейтральной бестоковой полностью ионизованной плазмы и основываются на уравнениях для одно- и двухчастичных функций распределения (например, [5, 6]). Двухчастичные кинетические модели воспроизводят наблюдаемое ускорение солнечного ветра в плоскости эклиптики при учете только одного источника энергии – теплового движения частиц у основания солнечной короны, где истекающая плазма предполагается равновесной. Одночастичные (а также гидродинамические модели) дают при тех же допущениях значительно меньшие предельные скорости солнечного ветра (например, [8, 7]), что демонстрирует рисунок.

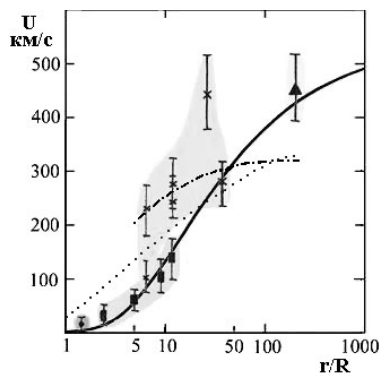


Рис. 1. Данные наблюдений по скорости солнечного ветра [9] и теоретические зависимости, полученные в рамках одночастичной кинетической модели Лемера [8] (штрихпунктирная линия) и двухчастичной кинетической модели [4] (сплошная линия), а также двухжидкостной гидродинамической модели Хартля и Барнеса [7] (пунктирная линия).

В настоящей работе предпринимается попытка проанализировать основные допущения статистической механики, которые лежат в основе одно- и двухчастичных кинетических моделей и обуславливают достаточно существенное их различие при описании ускорения солнечного ветра.

Многочастичная статистическая модель

В рамках классической статистической механики макроскопические параметры (такие как плотность, скорость, температура и другие) определяются на основе одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, описывающей вероятность $f_1 d\mathbf{p}$ того, что частица с координатой \mathbf{r} в момент времени t имеет импульс в интервале значений $(\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p})$. Рассмотрим в качестве примера выражение для числовой плотности:

$$\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle = \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (1)$$

Здесь интегрирование проводится по области определения функции f_1 в пространстве импульсов, вид которой зависит от конкретной постановки задачи.

Определение плотности через одночастичную функцию распределения (1) является следствием задания микроскопической плотности в виде суммы функций Дирака, которые идентифицируют совпадение координаты наблюдения \mathbf{r} с координатой \mathbf{r}_i одной из N частиц рассматриваемой системы [10, 11]:

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}). \quad (2)$$

Действительно, усреднив (2) на основе плотности распределения вероятности $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$, описывающей систему N частиц, мы приходим к соотношению (1):

$$\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle = \int n F d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N = \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (3)$$

Здесь функция F интегрируется по области ее определения с учетом нормировки: $\int F d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N = 1$.

Заметим, что аддитивно-точечная форма задания микроскопической плотности (2) предполагает различимость координат всех частиц, т. е. базируется на основополагающей гипотезе классической статистической механики.

Однако измерения макроскопических параметров проводятся с конечными масштабами разрешения, в пределах которых координаты частиц неразличимы для наблюдателя. Учет этого обстоятельства в рамках классического подхода возможен путем осреднения макроскопических параметров по пробному объему \mathfrak{R} , имеющему масштаб разрешения измерений (масштаб неразличимости). Такое осреднение приводит к суммированию вероятностей нахождения частиц в объеме \mathfrak{R} , что можно проиллюстрировать на примере числовой плотности (3)

$$\frac{1}{V} \int_{\mathfrak{R}} \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle d\mathbf{r} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^M \int f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) d\mathbf{p}_i.$$

Здесь V – объем области \mathfrak{R} , \mathbf{r} – ее средняя координата, M – число частиц в этой области. Суммирование вероятностей характерно для взаимоисключающих событий, в то время как нахождение в пробном объеме частиц, не различимых по их координатам, характеризуется совместной вероятностью одновременных событий. Как следствие, расчет измеряемых макроскопических параметров системы частиц основывается на совместной функции распределения вероятностей $f_M^{(\mathfrak{R})}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_M, \mathbf{p}_M, t)$:

$$\begin{aligned} f_M^{(\mathfrak{R})}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_M, \mathbf{p}_M, t) &= \int v_M^{(\mathfrak{R})} F d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N = \\ &= P(N, M) \int F d\mathbf{r}_{M+1} d\mathbf{p}_{M+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N. \end{aligned} \quad (4)$$

Определение (4) базируется на M -частичной микроскопической фазовой плотности

$$v_M^{(\mathfrak{R})} = \sum_{j_i} \prod_{i=1}^M \delta(\mathbf{r}_{j_i} - \mathbf{r}_i^{(\mathfrak{R})}) \delta(\mathbf{p}_{j_i} - \mathbf{p}_i), \quad (5)$$

имеющей в отличие от (2) мультипликативный характер. Суммирование в (5) проводится по несовпадающим индексам j_i и обеспечивает все возможные перестановки из числа частиц всей системы (N) по числу координат $\mathbf{r}_i^{(\mathfrak{R})}$ в объеме \mathfrak{R} (M), которые порождают эквивалентные макросостояния системы. $P(N, M)$ обозначает количество таких перестановок.

Выражение для $v_M^{(\mathfrak{R})}$ (5) отличается от классического определения микроскопической фазовой плотности [10, 11] тем, что точки наблюдения с координатами $\mathbf{r}_i^{(\mathfrak{R})}$ ($i=1, \dots, M$) расположены компактно – в пробном объеме \mathfrak{R} . Соответственно, M -частичная функция распределения $f_M^{(\mathfrak{R})}(\mathbf{r}_1^{(\mathfrak{R})}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_M^{(\mathfrak{R})}, \mathbf{p}_M, t)$ (4) описывает совместную вероятность для частиц с импульсами вблизи значений \mathbf{p}_i иметь координаты $\mathbf{r}_i^{(\mathfrak{R})}$, принадлежащие области \mathfrak{R} . При этом пробный объем \mathfrak{R} , имеющий масштаб разрешения измерений, исключается из области интегрирования функции F по координатам $N-M$ частиц в соотношении (4), так как при вычислении вероятности нахождения M частиц в \mathfrak{R} другие $N-M$ частиц не могут попасть в этот объем. Классическая же частичная функция f_M вычисляется путем интегрирования

функции F по всему конфигурационному пространству, что обусловлено гипотезой о различимости координат частиц.

Отметим, что компактная микроскопическая фазовая плотность $v_M^{(\mathfrak{R})}$ может быть записана не через функции Дирака, а через соответствующие интервальные функции по переменным $\mathbf{r}_i^{(\mathfrak{R})}$. Это позволит формализовать исключение пробного объема из области интегрирования в соотношении (4).

Интегрируя функцию $f_M^{(\mathfrak{R})}$ (4) по координатам частиц из объема $\mathfrak{R}(\mathbf{r})$ и их импульсам, получаем вероятность флуктуаций числа частиц в этом объеме:

$$w_M(\mathbf{r}, t) = 1/P(M, M) \int f_M^{(\mathfrak{R})} d\mathbf{r}_1^{(\mathfrak{R})} d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{r}_M^{(\mathfrak{R})} d\mathbf{p}_M. \quad (6)$$

Среднее значение числа частиц в объеме \mathfrak{R} , или локальная числовая плотность, вычисляется тогда как среднее значение флуктуирующей величины:

$$\langle M \rangle = \sum_{M=0}^N M w_M(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Таким образом, видим, что при классическом определении локальных среднестатистических параметров среды, основанном на предположении о пространственной различимости составляющих ее частиц и, соответственно, на суммировании вероятностей каждой частицы находиться в заданном объеме, статистическое описание такой среды сводится к одночастичным кинетическим моделям. Гипотеза же о пространственной неразличимости частиц, обусловленной масштабом разрешения измерений, закладывает в основу определения локальных средних характеристик совместную вероятность нахождения M частиц в пробном объеме \mathfrak{R} , т. е. M -частичные функции распределения $f_M^{(\mathfrak{R})}$ (4).

Гипотеза о детальном динамическом равновесии

Для корректного применения многочастичного подхода важным является вопрос, который затрагивает основы любой кинетической модели. Как следует определять систему N частиц, для которой выполняется теорема Лиувилля и на основе которой строится цепочка приведенных M -частичных функций распределения ($M < N$) и соответствующих кинетических уравнений [10]? Обычно этот вопрос решается путем выделения изолированной системы, состоящей из постоянного числа частиц N («термостат»). Как можно выделить такую систему для случая солнечного ветра, частицы которого, вылетая с поверхности Солнца, движутся как по траекториям, имеющим возвратные точки (частицы атмосферы), так и по траекториям, уходящим на бесконечность (убегающие частицы)? Учитывая топологию фазового пространства, представляется логичным выделить в конфигурационном пространстве объем Ξ , содержащий N частиц и ограниченный поверхностью S , составленной из двух сфер (граничную поверхность можно взять произвольной формы; сферы выбраны для большей простоты изложения). В случае динамического равновесия рассматриваемой открытой системы, занимающей объем Ξ , с окружающей средой встречные потоки частиц, пересекающих граничную поверхность

S взаимно компенсируются как по числу частиц, так и по переносимой ими энергии и моменту количества движения. Таким образом, законы сохранения в целом для всей рассматриваемой системы N частиц выполняются так же, как и для изолированной системы. При этом обмен энергией, моментом количества движения на границе S при динамическом равновесии ничем не отличается в фазовом пространстве импульсов от такого обмена между частицами при их столкновениях внутри объема Ξ . Изменение индивидуальности частиц при обмене через границу S не отражается на фазовом портрете динамически равновесной системы, если сохраняется число частиц системы (каждого сорта) и выполняются другие законы сохранения при каждом акте обмена (а не только в среднем за время равновесного обмена). Последнее условие можно назвать приближением детального динамического равновесия.

Предположим, что рассматриваемая открытая система находится в детальном динамическом равновесии с окружающей средой и, таким образом, обладает теми же свойствами в фазовом пространстве импульсов, что и изолированная система. Тогда для нее справедлива теорема Лиувилля, следствием которой является постоянство функции распределения F всей системы вдоль траекторий частиц системы:

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) = \text{const.} \quad (8)$$

Уравнение (8), дополненное граничными условиями на поверхности S , с которой выходят траектории частиц: $F|_S = F_0$, позволяет найти функцию F во всем объеме, занимаемом системой.

В рамках рассматриваемого подхода частичная функция $f_M^{(\mathfrak{R})}$ находится из уравнений (4), (8). Такой выбор метода вычисления функций $f_M^{(\mathfrak{R})}$ обусловлен тем, что вывод кинетических уравнений для них представляется затруднительным, так как размерность этих уравнений M , равная числу частиц в пробном объеме \mathfrak{R} , зависит от координаты этого объема r и изменяется на порядки в потоке солнечного ветра.

Заметим, для стационарного потока выбор объема системы Ξ может быть произвольным, но число частиц в нем должно быть достаточным для обеспечения применимости статистического подхода.

Тестовые задачи

Для тестирования многочастичного статистического подхода рассмотрим две классические задачи. Применяя данный подход к решению задачи о флуктуациях плотности в ограниченном объеме, занятом однородным идеальным газом, приходим к известному решению – биномиальному распределению вероятности актуальных значений числа частиц в выделенном объеме (которое, как известно, в пределе при больших значениях числа частиц переходит в распределение Пуассона, а при относительно малых флуктуациях в распределение Максвелла) [12]. Для задачи об идеальном газе в гравитационном поле получаем также биномиальное распределение для флуктуаций числовой плотности с ее средним значением, совпадающим с классическим распределением Больцмана (барометрической формулой).

Стационарный солнечный ветер

Рассмотрим стационарный бесстолкновительный поток квазинейтральной двухкомпонентной (электрон-протонной) плазмы, сферически расширяющейся в гравитационном поле. Для частиц плазмы, истекающей со сферической поверхности радиуса r_0 , расположенной в короне Солнца, задается максвелловское распределение по скоростям. Взаимодействие между частицами учитывается только через среднее поле поляризации плазмы (столкновениями пренебрегается). Дебаевский радиус предполагается много меньшим масштаба разрешения измерений. Тогда функция распределения F для всех N частиц системы запишется как произведение функций распределения N_e электронов f_e и N_p протонов f_p :

$$F = \prod_{i=1}^{N_e} f_e(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \prod_{j=1}^{N_p} f_p(\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j). \quad (9)$$

Из соотношений (4), (6), (9) получаем вероятность w_M нахождения M частиц плазмы в объеме \mathfrak{R} :

$$w_M = \prod_{k=e,p} \frac{N_k!}{(N_k - M_k)! M_k!} \Theta_k^{M_k} (1 - \Theta_k)^{N_k - M_k}. \quad (10)$$

Здесь учтено количество перестановок идентичных по свойствам частиц из объемов \mathfrak{R} и Ξ – \mathfrak{R} , дающих эквивалентные макросостояния. Индексы e, p относятся к электронам и протонам. Среднее значение (7) полиномиального распределения (10) $\prod_{k=e,p} N_k \Theta_k$ ($\Theta_k = \int f_k d\mathbf{r} d\mathbf{p}_k$) и допущение о квазинейтральности плазмы ($N_e = N_p = N/2$) приводят к выражению для числовой плотности $\langle n \rangle$ как среднегогеометрическому плотностей электронов n_e и протонов n_p :

$$\langle n \rangle = \sqrt{n_e n_p}, \quad (11)$$

$$n_k = \frac{n_0}{2} e^{-\Delta \bar{\Phi}_k} \left(2 - \text{Erf} \left(\sqrt{|\bar{\Phi}_k|} \right) - \sqrt{\frac{|\bar{\Phi}_k|}{\pi}} e^{\bar{\Phi}_k} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} e^{-\frac{\Delta \bar{\Phi}_k}{\rho^2 - 1}} \left(2 - \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{|\bar{\Phi}_k|}{1 + \rho^{-1}}} \right) \right) \right), \quad k=e, p,$$

где $\Delta \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}_k - \bar{\Phi}_{k,0}$, $\bar{\Phi}_k = (m_k \phi + q_k \psi) / (k_B T_0)$, m_k, q_k – масса и заряд частиц k -го сорта, ϕ – гравитационный потенциал Солнца, ψ – потенциал поляризации плазмы, k_B – постоянная Больцмана, T_0 – температура частиц плазмы при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\rho = r/r_0$, $\bar{\Phi}_{k,0} = \bar{\Phi}_{k,0}|_{\rho=1}$.

Заметим, что выражение (11) представляет собой частный случай более общей формулы для числовой плотности квазинейтральной ($\sum_k q_k n_k = 0$) полностью ионизованной K -компонентной плазмы, которая соответствует Q -частичной кинетической модели

$$\langle n \rangle = \prod_{k=1}^K n_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_k = |q_k|/Q, \quad Q = \sum_k |q_k|. \quad (12)$$

Размерность модели Q определяется набором минимальных значений K целых чисел l_k , удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^K q_k l_k = 0$.

Плотность потока частиц Nu рассчитывается на основе многочастичного момента импульсов:

$$w_{Nu} = \frac{1}{N_e! N_p!} \int f_M^{(\mathfrak{R})} \prod_i \frac{2\mathbf{p}_i}{m_i} d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i, \quad (13)$$

где умножение (по индексу i) проводится по всем частицам. В рамках принятых допущений приходим к полиномиальному распределению для флуктуаций потока частиц плазмы Nu со средним значением:

$$\begin{aligned} \langle Nu \rangle &= \sqrt{\langle Nu_e \rangle \langle Nu_p \rangle} = \\ &= \frac{N_0 k_B T_0}{\pi \sqrt{m_e m_p}} e^{q_0/2k_B T_0} \sqrt{(1 - \bar{\Phi}_{e,0})(1 - \bar{\Phi}_{p,0})} \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зависимости (11) и (14), выведенные выше на основе многочастичного подхода, совпадают с выражениями для плотности и потока частиц, полученными на основе двухчастичной кинетической модели [4], и согласуются с данными наблюдений для солнечного ветра вблизи плоскости эклиптики (поляризационный потенциал ψ рассматривался в равновесном приближении). Расхождение теоретической зависимости для числовой плотности потока плазмы (14) с данными измерений не превышает 30 % [13, 14], а теоретическое значения скорости солнечного ветра $\langle u \rangle = \langle Nu \rangle / \langle n \rangle$, рассчитанные по формулам (11), (14), лежат в пределах разброса наблюдательных данных [9, 14].

В отличие от одночастичных кинетических (и гидродинамических) моделей результаты, полученные в рамках многочастичного подхода, согласуются с данными наблюдений как по скорости, так и по плотности солнечного ветра при учете только энергии теплового движения частиц истекающей плазмы (без введения дополнительных источников энергии), что может служить аргументом в пользу последнего.

Заключение

Проведенный в работе анализ показал, что допущение о различимости координат частиц, принятое в классической механике, приводит к линейаризованной модели плазмы, которая базируется на одночастичных функциях распределения. При этом по существу предполагается, что измерения проводятся с бесконечно малыми масштабами разрешения.

Учет конечности масштабов разрешения измерений подразумевает неразличимость координат частиц на этих масштабах и приводит к описанию плазмы на основе многочастичных функций распределения. Этот подход позволяет вычислить вероятность флуктуаций макроскопических параметров и их средние значения. Для замыкания модели используется гипотеза о детальном динамическом равновесии открытой системы с окружающей средой, что позволяет применить к этой системе теорему Лиувилля (о сохранении элементарного фазового объема).

Модель стационарного бесстолкновительного солнечного ветра, построенная в рамках многочастичного подхода, позволяет получить зависимости для макропараметров солнечного ветра (плотности и скорости), совпадающие с результатами двухчас-

тичной кинетической модели [4]. При этом наблюдаемое ускорение солнечного ветра в плоскости эклиптики воспроизводится в отличие от одночастичных и гидродинамических моделей только за счет энергии теплового движения частиц у основания солнечной короны, где плазма предполагается равновесной. Этот эффект «дополнительного» ускорения потока плазмы в рамках многочастичного статистического подхода связан с учетом конечных масштабов разрешения измерений, полагаемых много большими масштаба межчастичного взаимодействия в плазме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минькова Н.Р. Многочастичный статистический подход к моделированию солнечной бесстолкновительной плазмы // Известия вузов. Физика. 2004. Т. 47, № 10. Приложение. (Прикладные проблемы сплошных сред. Тематический выпуск). С. 73–80.
2. Минькова Н.Р. Двухчастичные и многочастичные статистические модели потока солнечной плазмы: Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Томск. 2005. 131 с.
3. Minkova N.R. Statistical modeling of the solar plasma expansion // GSI-Report GSI-2007-2. 2007. P. 79.
4. Vasenin Y.M., Minkova N.R., Shamin A.V. A kinetic model of solar wind // AIP Conference Proceedings, 2003. V. 669, Series Plasma Physics: 11th International Congress on Plasma Physics: ICPP2002. P. 516–519.
5. Cranmer S.R. Coronal holes and the high-speed solar wind // Space Science Reviews. 2002. V. 101. P. 229–294.
6. Vasenin Y.M., Minkova N.R. Two-particle quasi-neutral kinetic model of collisionless solar wind // J. of Physics A. Mathematical and General. 2003. V. 36, Issue 22. P. 6215–6220.
7. Хундхаузен А. Расширение короны солнечный ветер. М.: Мир, 1976. С. 111.
8. Lemaire J.F., Pierrard V. The kinetic treatment of space plasmas // Conference Proceedings, 2003. V. 663. Rarefied gas dynamics. 23rd International symposium. P. 857–864.
9. Якубов В.П. Доплеровская сверхбольшебазовая интерферометрия. Томск: Водолей, 1997. С. 136.
10. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1. М.: Мир, 1978. С. 89.
11. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. С. 22, 31, 595–597.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Статистическая физика, Ч. 1. Т. 5. М.: Наука, 1964. С. 421–423.
13. Рубцов С.Н., Яковлев О.Н., Ефимов А.И. Динамика и турбулентность солнечного ветра в области его формирования по данным радиопросвечивания с применением аппаратов «Венера-15» и «Венера-16» // Космические исследования. 1987. Т. 25, № 2. С. 251.
14. Koehnlein W. Radial dependence of solar wind parameters in the ecliptic (1.1 R–61 AU) // Solar Physics. 1996. V. 169. P. 209–213.

Томский государственный университет, Томск