

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Уссурийская астрофизическая обсерватория  
Дальневосточного отделения  
Российской академии наук

На правах рукописи



УДК 523.98

**Лопин Игорь Петрович**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН И КОЛЕБАНИЙ В  
ПРОДОЛЬНО И  
ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ  
СОЛНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ  
ВОЛНОВОДАХ**

Специальность 01.03.03 —  
«Физика Солнца»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Уссурийск — 2018



Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Уссурийской астрофизической обсерватории Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Научный руководитель:**

**Корниенко Геннадий Иванович**, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Уссурийская астрофизическая обсерватория Дальневосточного отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией.

**Официальные оппоненты:**

**Цап Юрий Теодорович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Крымская астрофизическая обсерватория Российской академии наук, заведующий лабораторией отдела Радиоастрономии и геодинамики.

**Кузнецов Алексей Алексеевич**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией радиоастрофизических исследований Солнца.

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук.

Защита состоится "\_\_\_" \_\_\_\_ 2018 г. в \_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д.003.034.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова 126а, а/я 291, ИСЗФ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИСЗФ СО РАН и на сайте <http://www.iszf.irk.ru>.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_ 2018 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д.003.034.01, к-т. физ.-мат. наук



Поляков В.И.



## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Плазма солнечной атмосферы пронизана магнитным полем. В верхней конвективной зоне, фотосфере и нижней хромосфере магнитное поле концентрируется в виде силовых трубок с напряженностью поля от нескольких сотен до нескольких тысяч Гаусс. Такие магнитные образования являются волноводами для ряда магнитогидродинамических (МГД) волн, включая изгибные и радиальные трубочные моды. Считается, что часть энергии конвективных движений может эффективно расходоваться на генерацию различных типов магнитных трубочных волн, которые, в свою очередь, распространяются в верхние слои солнечной атмосферы, приводя к их нагреву посредством различных механизмов диссипации. Именно на этом предположении строится волновая теория нагрева хромосферы и короны Солнца, а также звезд, объясняющая наблюдаемые экстремальные значения температуры плазмы в их внешних областях. В контексте данной теории особое значение приобретают исследования распространения МГД волн вдоль солнечных магнитных трубок. Базовая теория разрабатывается для простейших идеализированных моделей магнитных волноводов и позволяет понять фундаментальные свойства той или иной волновой моды. Дальнейшее развитие анализа связано с изучением влияния продольных и поперечных неоднородностей в структуре как плазмы, так и магнитного поля самой трубки и окружающего ее пространства на дисперсию волн. Данный подход предполагает рассмотрение более реалистичных моделей солнечных волноводов. Получаемые при этом решения для волновых переменных и дисперсионные соотношения позволяют произвести более корректные расчеты волнового потока энергии, переносимого конкретной волновой модой, и оценить вносимый ею вклад в нагрев солнечной атмосферы.

Последние несколько десятилетий большое развитие получили внеатмосферные методы наблюдений Солнца. С помощью космического аппарата TRACE впервые непосредственно удалось зафиксировать изгибные (поперечные) колебания корональных петель, индуцированные нестационарными вспышечными процессами [Aschwanden et al., 1999; Nakariakov et al., 1999]. Это связано с той особенностью изгибной трубочной моды, что она вызывает смещения магнитной трубки как целого с амплитудами, превышающими поперечные размеры самого волновода. Как следствие, это способствует



возможности визуализации данного волнового процесса. Несколько сложнее обстоит дело с радиальной модой, приводящей к пульсациям в поперечном сечении магнитной трубки. Очевидно, что внешние динамические факторы могут возбуждать быстрые МГД моды типа перетяжек (радиальные моды) в петле. Однако пространственного разрешения современных внеатмосферных инструментов недостаточно для прямой (наблюдательной) регистрации таких колебаний, поскольку их амплитуда значительно меньше поперечных размеров петли. Здесь на помощь приходят косвенные методы, позволяющие интерпретировать те или иные нестационарные (периодические) процессы, происходящие в солнечной атмосфере на основе теории колебаний и волн в солнечных магнитных волноводах. Наибольший интерес здесь представляют так называемые квазипериодические пульсации (КПП) излучения вспышечной плазмы. Многочисленные наблюдения солнечных вспышек в широком диапазоне длин волн (частот) указывают на наличие квазипериодического компонента. Периоды колебаний составляют от единиц до нескольких десятков секунд, а их добротность обычно ограничена самим временем наблюдений [Aschwanden, 1987; Зайцев и др., 2001; Резникова и др., 2007]. Установлено, что в случае регистрации КПП в УФ, ИК и рентгеновском диапазонах источником такого излучения являются послевспышечные петли- корональные магнитные образования арочного типа, заполненные плотной и горячей хромосферной плазмой. Естественно предполагать, что причиной КПП могут являться периодические процессы, происходящие в петле, а именно моды колебаний, генерируемых в арке как магнитном волноводе. В этом случае наиболее вероятным кандидатом являются радиальные быстрые магнитозвуковые (БМЗ) колебания, поскольку они непосредственно вызывают вариации плотности плазмы, а следовательно, и ее излучательной способности. Классическая теория волновых мод типа перетяжек для базовой модели цилиндрического волновода с разрывной границей предсказывает их значительное акустическое затухание, связанное с излучением МГД волн магнитной трубкой во внешнее пространство [Meerson et al., 1978]. Однако, как уже было упомянуто выше, КПП характеризуются значительным временем своего существования. Таким образом, возникает проблема поиска моделей магнитных волноводов, в которых радиальные моды колебаний характеризуются либо высокой добротностью, либо не подвержены акустическому затуханию в



принципе. Тщательная разработка теории радиальных пульсаций корональных петель имеет важной целью ее применение для анализа наблюдаемых КПП и оценки физических условий в областях генерации квазипериодического излучения. Последнее составляет задачу корональной сейсмологии - раздела физики Солнца, посвященного определению параметров излучающей плазмы и магнитного поля в короне на основе данных о наблюдаемых осцилляциях корональных арок. Такие косвенные методы оценки имеют особую значимость, поскольку прямые измерения магнитного поля и оценки плотности плазмы на основе параметров электромагнитного излучения затруднены из-за высоких значений корональных температур.

Изложенный выше вводный материал указывает на наличие неразработанных прежде задач, связанных с исследованием свойств изгибных и радиальных волновых мод в атмосфере Солнца.

**Целью** данной работы является теоретическое исследование свойств указанных типов волн, поддерживаемых солнечными магнитными волновыми модами с наличием продольных и поперечных неоднородностей плазмы и магнитного поля.

В контексте изложенной цели можно сформулировать следующие решаемые в настоящей работе **задачи**:

1. Исследование распространения винтовых (изгибных) трубочных волн в рамках модели вертикальной тонкой силовой трубки, стратифицированной гравитацией и расширяющейся с высотой, т.е. имеющей продольную и радиальную компоненты магнитного поля. Рассмотрение данной модели трубки как для случая изотермической, так и для случая неізотермической атмосферы. Аналитический вывод волнового уравнения для винтовых мод, анализ условий их распространения. Изучение влияния внешнего магнитного поля на процесс распространения изгибных волн. Оценка эффективности вертикального переноса энергии изгибными волнами в гравитирующей атмосфере. Исследование влияния азимутальной компоненты магнитного поля стратифицированной трубки на свойства изгибных волн. Применение полученных результатов к теории изгибных колебаний неізотермических корональных петель.



2. Исследование дисперсионных свойств БМЗ волн типа перетяжек (радиальных мод) в корональных магнитных волноводах со сглаженным (непрерывным) поперечным профилем плотности в приближении холодной плазмы. Использование как поперечно-монолитной модели распределения плотности в рамках прямоугольной и цилиндрической геометрии волновода, так и поперечно-слоистой модели для цилиндрической геометрии волновода. Определение условий отсутствия и существования акустического затухания радиальных колебаний для различных моделей поперечного распределения плотности плазмы. Применение разработанной теории для интерпретации вспыхечных КПП.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Выведено уравнение, описывающее распространение винтовых (изгибных) волн вдоль тонких вертикальных стратифицированных силовых трубок с переменным радиусом сечения для случая продольно-неизотермической модели атмосферы внутри и вне трубки с тепловым балансом  $T_i(z) = T_e(z)$  и наличия внешнего магнитного поля.
2. Показано, что в продольно - неизотермических магнитных трубках винтовые (изгибные) моды характеризуются наличием пространственно-локальной критической частоты отсечки, при этом наличие внешнего магнитного поля уменьшает значение этой частоты. Для референсной модели солнечной атмосферы VAL-C рассчитаны высотные зависимости частоты и периода отсечки для различных соотношений величин магнитного поля трубки и внешней среды. В частном случае изотермической атмосферы внутри и вне трубки, винтовые (изгибные) волны могут распространяться при любых частотах. Таким образом, введенная в классической работе [Spruit, 1981] частота отсечки для рассматриваемых волн в рамках данной модели не существует.
3. На основании выведенного волнового уравнения показано, что в продольно - неизотермических корональных петлях, собственные частоты изгибных колебаний модифицируются таким образом, что отношение частоты первого обертона  $\omega_2$  к частоте фундамен-



тальной моды  $\omega_1$  меньше канонического значения, равного 2, т.е.  $\omega_2/\omega_1 < 2$ .

4. Показано, что в поперечно-монолитных моделях корональных волноводов со сглаженным поперечным профилем плотности, СБМЗ волны типа перетяжек (радиальные моды) являются захваченными при всех значениях продольных волновых чисел, если функция профиля плотности убывает медленнее обратного квадрата расстояния до оси волновода. В противном случае, существуют как захваченные, так и излучательные режимы, при этом продольные волновые числа отсечки, разделяющие данные режимы, имеют меньшие значения в петлях с более сглаженной (пологой) границей.
5. Показано, что в корональных петлях со сглаженной границей дисперсия СБМЗ волн, т.е. величина  $dV_{ph}/dk$ , уменьшается. Данный эффект наблюдается в диапазоне малых и промежуточных значений продольных волновых чисел.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые исследовано распространение винтовых (изгибных) волн в вертикальной тонкой стратифицированной и изотермической силовой трубке, находящейся в тепловом балансе с внешней средой, с учетом влияния радиальной составляющей магнитного поля трубки. Показано, что волны являются бегущими для всех значений частот и введенная ранее в работе [Spruit, 1981] частота обрезки, разделяющая волны на два типа: эванесцентные и распространяющиеся, не существует в данной модели. Полученный результат свидетельствует о более эффективном переносе энергии данным типом волн всех частотных диапазонов (включая и низкочастотный) в атмосфере Солнца, чем это считалось ранее на основе классической работы [Spruit, 1981].
2. Впервые получены уравнения для винтовых волновых мод в тонких стратифицированных магнитных трубках с переменным радиусом сечения для неизотермической модели атмосферы и с учетом влияния внешнего магнитного поля. Показано, что в данном случае существует пространственно-локальная частота отсечки, которая тем меньше, чем больше напряженность внешнего магнитного



поля. Для модели солнечной атмосферы VAL-C рассчитано высотное распределение критической частоты и периода для различных соотношений внешнего магнитного поля и поля трубки.

3. Впервые исследовано влияние азимутальной компоненты магнитного поля вертикальной тонкой стратифицированной трубки с переменным сечением на свойства винтовых (изгибных) волн. Показано, что величина вертикального волнового потока энергии увеличивается для винтовых мод, поляризованных в направление закрученности магнитного поля трубки, и уменьшается для винтовых мод с обратной поляризацией.
4. Впервые исследованы дисперсионные свойства БМЗ волн типа перетяжек для модели магнитного коронального волновода с произвольным сглаженным поперечным профилем плотности (поперечно-монолитная модель) в рамках как прямоугольной, так и цилиндрической геометрии волновода. Получены критерии, определяющие дисперсионные свойства данного типа волн, а именно наличие захваченных и излучательных мод в зависимости от функционального вида поперечного распределения плотности плазмы в корональной петле. В частности показано, что радиальные моды являются захваченными при всех значениях продольных волновых чисел для семейства профилей, убывающих на больших расстояниях от оси волновода медленнее обратного квадрата этого расстояния. На основе решения волнового уравнения для специализированных видов поперечного профиля плотности плазмы в волноводе показано, что в волноводах с более крутым поперечным профилем плотности радиальные моды характеризуются большими значениями волновых чисел обрезки, разделяющих захваченные и излучательные волновые режимы, тогда как для более сглаженных профилей соответствующие значения ниже. Полученные результаты указывают на возможность существования радиальных пульсаций корональных петель в безизлучательном режиме, при малых нормированных значениях продольных волновых чисел, что может объяснять наблюдаемую высокую добротность вспыхивающих КПП.



5. Впервые проведено аналитическое исследование влияния сглаженности поперечной границы коронального волновода на поведение дисперсионных кривых симметричных БМЗ волн. Показано, что в областях малых и промежуточных значений волновых чисел, сглаженность границы петли приводит к уменьшению крутизны дисперсионных кривых, т.е. к более плавному понижению фазовой скорости волн с ростом волнового числа. Данная особенность дисперсионных кривых позволяет объяснить наблюдаемые соотношения периодов фундаментальной и первой гармоники радиальных пульсаций во вспышечных КПП. Отметим, что это невозможно сделать в рамках классической модели петли с разрывом плотности на ее границе.

**Практическая значимость** диссертационной работы состоит в том, что проведенное исследование свойств изгибных волн, распространяющихся в тонких стратифицированных магнитных трубках в гравитирующей неизотермической атмосфере, позволяет более детально понять эффективность вертикального переноса энергии данным типом возмущений и оценить вклад, вносимый изгибными волнами в нагрев верхней атмосферы Солнца. Исследование дисперсионных свойств БМЗ волн типа перетяжек в корональных волноводах со сглаженной границей позволяет понять и интерпретировать КПП, генерируемые во вспышечных петлях. В частности, наблюдаемая высокая добротность и отношение периодов фундаментальной и первой гармоники радиальных пульсаций петель может быть объяснено в рамках теории БМЗ волн в петлях со сглаженным поперечным профилем плотности, что затруднительно сделать на базе классической модели петли со ступенчатым профилем плотности на ее границе. Развитая теория позволяет использовать наблюдаемые характеристики КПП для оценки параметров вспышечной плазмы и магнитного поля, что составляет основную задачу корональной сейсмологии.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается адекватностью используемых в исследовании приближений, моделирующих реальные параметры плазмы и магнитного поля в солнечной атмосфере. Математические методы, используемые в работе, являются разработанными и широко применяемыми во многих областях естественных и технических наук. Ряд



обобщений, представленных в данной работе, имеет частным случаем известные результаты более ранних исследований.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: XI Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и Наука» с международным участием, Сибирский Федеральный Университет, 15-25 апреля 2013г., г. Красноярск; на 17-й Международной солнечной конференции “Физика солнечной плазмы и активность Солнца”, 4-10 сентября 2016 г., п. Научный, АР Крым, Россия; на объединенном семинаре в ИСЗФ СО РАН, 20 апреля 2017г., на семинарах в Уссурийской астрофизической обсерватории, п. Горнотаежное.

**Личный вклад.** Вклад автора на всех этапах исследований является основным.

**Публикации.** Материалы диссертации изложены в 7 научных работах, все из которых опубликованы в ведущих рецензируемых зарубежных научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, обозначаются цели и задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

### **Первая глава Волны в солнечных магнитных трубках**

В первой части Главы 1 дается краткий исторический обзор развития исследований колебаний и волн в солнечных магнитных структурах. Отмечается, что особый интерес к данному разделу физики Солнца обусловлен появлением наблюдений с помощью космических аппаратов, которые позволили зарегистрировать волновые процессы в корональных петлях. Кроме того, детальное понимание свойств волновых мод в магнитных волноводах необходимо в контексте теории волнового нагрева солнечной атмосферы-одного из актуальных направлений современной гелиофизики.



Во второй части главы 1 представлена краткая теория волновых мод в однородных магнитных трубках. Теоретические работы для этой простейшей модели были осуществлены в конце 70-х, начале 80-х годов прошлого столетия. Отмечаются работы [Рютов, Рютова, 1975; Defouw, 1976], где впервые получены волновые уравнения для асимметричных (изгибных) и симметричных волновых мод соответственно, в длинноволновом приближении. Наиболее полный анализ волн в однородных трубках произвольного радиуса дан в работе [Edwin, Roberts, 1983]. В данной части главы выведено дисперсионное соотношение как для захваченных (затухающих с удалением от оси трубки), так и для излучательных (представляющих собой радиально распространяющиеся волны) мод. На основании полученного дисперсионного уравнения приведены соотношения для длинноволнового предела. В заключении показан графический вид типичных дисперсионных кривых для различных волновых мод и соотношений параметров плазмы и магнитного поля.

## **Вторая глава Изгибные волны и колебания в тонких продольно-неоднородных магнитных трубках**

посвящена исследованию распространения изгибных волн вдоль вертикальных силовых трубок, стратифицированных гравитацией и, как следствие, расширяющихся с высотой. Предполагается, что трубка находится в тепловом балансе со внешней средой и вертикально неизотермична, т.е.  $T_i(z) = T_e(z)$ . Кроме того, магнитное поле трубки имеет азимутальную компоненту, прямо пропорциональную расстоянию до ее оси. Схематическое изображение рассматриваемой модели показано на рис.1. Равновесная конфигурация такой модели предполагает, что в нулевом приближении компоненты магнитного поля даются соотношением

$$B_z(z) = B_0 f(z), \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}, \quad B_\phi(r, z) = Ar f(z), \quad (1)$$

при этом для предела тонкой трубки выполняются условия  $B_r \ll B_z$  и  $B_\phi \ll B_z$ . Указанные неравенства определяют пространственную область применимости приближения тонкой трубки, эквивалентную ограничению  $R(z) \ll 4H(z)$ . В работе показано, что для неизотермической модели солнечной атмосферы от области температурного минимума до переходного слоя, аппроксимируемой линейным или квадратичным профилем, предел тонкой трубки применим на всех указанных высотах.



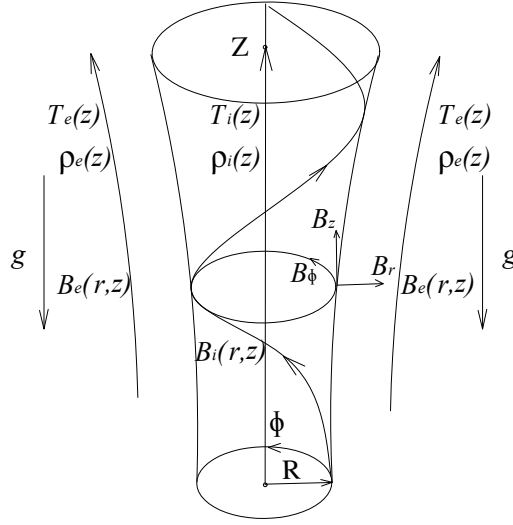


Рис. 1 — Схематическое изображение модели силовой трубки, стратифицированной гравитацией и расширяющейся с высотой

Вывод волнового уравнения для изгибных волн сначала проводится для модели трубки находящейся в среде без магнитного поля. В приближении тонкой трубки, решения уравнений для смещений плазмы и вариаций полного давления плазмы внутри трубки ищутся в виде разложения в ряд по радиальному расстоянию. При подстановке данных разложений в систему уравнений МГД учитываются только главные члены разложений. Решения для волновых переменных во внешней незамагниченной и гравитирующей атмосфере ищутся путем непосредственного решения уравнений МГД. Далее, применение граничных условий для флуктуирующих переменных приводит к получению искомого уравнения, описывающего распространение изгибных волн вдоль тонких стратифицированных неизотермических магнитных трубок. Наличие внешнего магнитного поля (без магнитного закручивания) означает, что в окрестности силовой трубки его компоненты можно представить по аналогии с уравнением (1). Вывод волнового уравнения для этого обобщения проводится в предположении, что внутри трубки и ее внешней



окрестности выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \gg \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2)$$

т.е. характерный масштаб изменения волновых переменных в радиальном направлении много меньше масштаба изменения как возмущенных так и равновесных параметров вдоль оси  $z$ . Результирующее волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Xi_r}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c_k^2(z)} + \delta_B^2 \left[ \frac{1}{2f(z)^2} \left( \frac{df(z)}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2f(z)} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right] \right) \Xi_r = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\xi_r = \Xi_r / \sqrt{f(z)}$  – поперечное смещение трубки и  $\delta_B^2 = (B_{0i}^2 - B_{0e}^2) / (B_{0i}^2 + B_{0e}^2)$ . Уравнение (3) может быть переписано в терминах локальной шкалы высот  $H(z)$  с помощью граничных условий и барометрического соотношения в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Xi_r}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c_{k0}^2} \frac{H_0}{H(z)} - \frac{\delta_B^2}{4H^2(z)} \frac{dH(z)}{dz} \right) \Xi_r = 0, \quad (4)$$

Из полученного уравнения, в частности следует, что для изотермической модели атмосферы, когда  $H(z) = H = \text{const}$  изгибные волны распространяются при всех значениях частот. Это означает, что введенная в классической работе [Spruit, 1981] частота отсечки для изгибных волн является ошибочной. В случае неизотермической атмосферы, согласно уравнению (4), винтовые моды характеризуются наличием пространственно-локальной частоты отсечки. Критерий, определяющий являются ли волны бегущими (стоячими) или эванесцентными на данном атмосферном уровне, может быть сформулирован на основе теоремы сравнения (теорема Незера). Показано, что волны распространяются, если их частота удовлетворяет условию

$$\omega^2 > \frac{c_{k0}^2}{4H_0 H(z)} \left( \delta_B^2 \frac{dH(z)}{dz} + \frac{H^2(z)}{z^2} \right), \quad z > 0. \quad (5)$$

На основании уравнения (5) было рассчитано распределение  $\omega_c(z)$  и  $T_c(z)$  для референсной модели солнечной атмосферы VAL-C, аппроксимированной полиномом степени  $n = 10$ . Использовались значения  $c_{k0} \approx 7.5$  км/с и  $H_0 \approx 160$



км. Графические данные для различных значений соотношения  $x_B = B_{ze}/B_{zi}$  приведены на рис. 2. Согласно полученным результатам, присутствие внешнего магнитного поля приводит к уменьшению локальной частоты отсечки (и соответственно увеличению значения локального критического периода). Данная редукция тем больше, чем больше значение параметра  $x_B$ . Отмечается, что уравнение (3) справедливо и при отсутствии теплового баланса между трубкой и внешней средой.

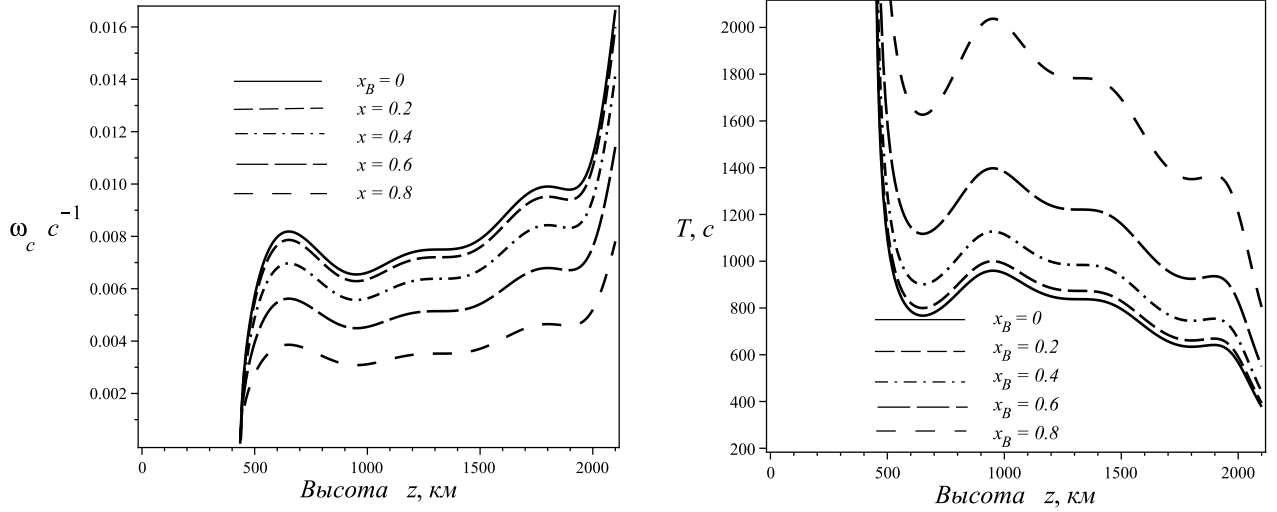


Рис. 2 — Распределение по высоте локальной частоты отсечки  $\omega_c$  (слева) и периода  $T_c$  (справа) для модели атмосферы VAL-C и различных значений параметра  $x_B = B_{zi}/B_{ze}$ .

Приводится вывод аналитического выражения для эффективного вертикального потока энергии, переносимого винтовыми модами вдоль стратифицированных расширяющихся силовых трубок. Для частного случая изотермической атмосферы, соответствующее выражение имеет вид

$$\langle F_z \rangle = (\rho_{i0} + \rho_{e0}) c_{k0} v_0^2 \left( 1 + \frac{\rho_{i0}}{\rho_{i0} + \rho_{e0}} \frac{V_{Ai0}^2}{c_{k0}} \frac{m \alpha_0}{\omega R_0} \right) \pi R_0^2, \quad (6)$$

где  $\alpha_0 = AR_0/B_{i0}$ . Показано, что хотя, как следует из уравнений (3) и (4), компонента  $B_\phi$  не влияет на дисперсию волн, она изменяет значение вертикального потока энергии. При этом, считая  $A > 0$ , находим из уравнения (6), что волновой поток энергии увеличивается для моды с  $m = 1$ , т.е. азимутально поляризованной в направлении закрученности магнитных силовых линий в трубке. Для винтовой моды с обратной поляризацией  $m = -1$ , зна-



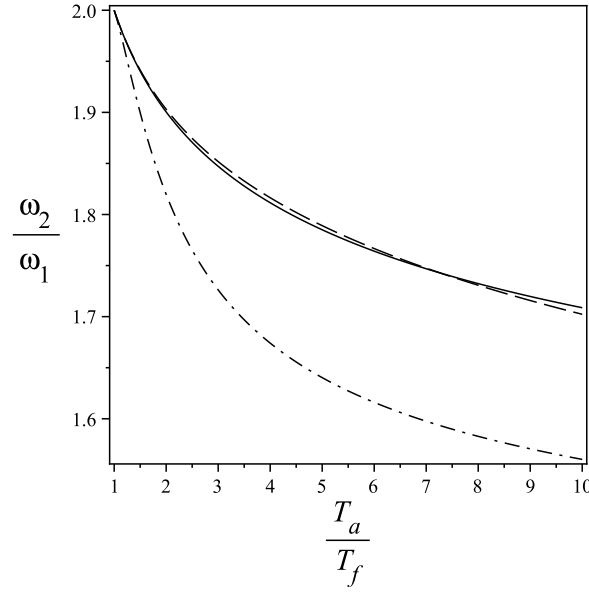


Рис. 3 — Зависимость отношения частоты первой гармоники к частоте фундаментальной моды как функция отношения температур в вершине петли и ее основаниях. Сплошная кривая соответствует квадратичному профилю, пунктир и пуктир-точка соответствуют обобщенному профилю Лоренца с  $n = 2$  и  $10$  соответственно.

чение потока энергии пониженно. Соответственно, при рассмотрении чисто изгибной моды, являющейся суперпозицией двух винтовых мод с  $m = \pm 1$  и одинаковой амплитудой, вклад азимутальной компоненты поля в значение волнового потока энергии становится нулевым. Приведена оценка волнового потока согласно формуле (6) с поправкой на так называемый фактор заполнения  $f = nS/S_s$ , где  $n$ -количество силовых трубок на уровне фотосферы,  $S$  - площадь сечения отдельной трубки и  $S_s$ -площадь солнечной поверхности. Полученное значение для трубок без закручивания, либо чисто изгибной моды составляет  $\langle F_u \rangle \approx 4.2 \cdot 10^7$  эрг/(см<sup>2</sup>с). С учетом магнитного закручивания, значение потока может увеличиваться (для  $m = 1$ ) или уменьшаться (для  $m = -1$ ) в 2-3 раза для  $\alpha_0 = 0.1$ , в 3-5 раз для  $\alpha_0 = 0.2$ . Делается вывод, что изгибные волны можно рассматривать в качестве одного из основных источников в теории волнового нагрева хромосферы и короны солнца.

Следует отметить, что уравнение (3) справедливо и при отсутствии силы тяжести, когда распределение газового давления и плотности вдоль трубки обусловлены иными причинами. Кроме того, уравнение применимо для моделей корональных петель с конечным плазменным  $\beta$ . В частности, в пределе  $\beta = 0$ , когда  $B_{i0} = B_{e0}$ , уравнение (3) сводится к уравнению, полу-



ченному в работе [Ruderman et al., 2008], где изучались изгибные колебания корональных петель с переменным поперечным сечением. В этой связи, в настоящей работе исследуются изгибные колебания неизотермических корональных петель в пределе  $\beta = 0$ , с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 \Xi_r}{\partial s^2} + \frac{\omega^2}{c_{kf}^2} \frac{T_f}{T(s)} \Xi_r = 0, \quad (7)$$

где  $s$ -расстояние, отсчитываемое вдоль петли. В частности рассматриваются распределение температуры, в виде квадратичного профиля и обобщенного профиля Лоренца, представленного ниже

$$T(s) = \frac{T_a a}{a + (2s/L - 1)^{2n}}. \quad (8)$$

где  $a = T_f/(T_a - T_f)$ ,  $n = 1, 2, \dots$   $T_a = T(L/2)$  и  $T_f = T(0, L)$  температура плазмы в вершине и основаниях петли соответственно. Здесь, большие значения индекса  $n$  соответствуют росту температуры преимущественно в ногах петли, тогда как область в районе вершины петли является практически изотермичной. Решение уравнения (7) строилось с помощью ВКБ-приближения и применялись граничные условия замороженности оснований петель. В результате были получены выражения для отношения частоты первого обертона к частоте фундаментальной моды  $\omega_2/\omega_1$  как функции отношения температур  $T_a/T_f$  для различных параметров профиля. Результаты расчетов даны на рис.3, из которых следует что для более крутого профиля Лоренца с большим индексом  $n$ , соответствующая редукция для  $\omega_2/\omega_1$  больше. Для всех профилей отношение  $\omega_2/\omega_1$  уменьшается с ростом  $T_a/T_f$ . В работах [Verwichte et al., 2004; van Doorselaere et al., 2007] анализировались одновременные наблюдения двух продольных гармоник поперечных колебаний нескольких корональных петель. Авторами были получены отношения  $\omega_2/\omega_1 \approx 1.82$  и  $\omega_2/\omega_1 \approx 1.58$  для двух разных петель. Согласно рис. 3 такие значения, в частности, могут быть реализованы в корональных петлях с большим температурным градиентом (большие  $n$ ) в районе оснований петли и практически изотермической вершиной. При этом необходимо, чтобы  $T_a/T_f \approx 2.5$  и  $T_a/T_f \approx 7$  для первого и второго случая соответственно. Отметим, что это вполне реальные условия,



учитывая тот факт, что температура в петлях изменяется от  $\approx 10^5 K$  в основаниях до  $(1 - 2) \cdot 10^6 K$  в районе их вершин.

В заключении формулируются выводы, обобщающие результаты данной главы.

### **Третья глава Быстрые симметричные волны и колебания типа перетяжек в корональных волноводах с непрерывным поперечным профилем плотности**

посвящена исследованию дисперсионных свойств симметричных быстрых магнито-звуковых (БМЗ) волн типа перетяжек в корональных арках с непрерывным поперечным профилем плотности. Очевидно, что такое представление является более точным приближением реальной поперечной структуры корональных петель, нежели классическое приближение с разрывом плотности на границе арки. В работе отмечается, что особый интерес к изучению дисперсионных свойств данной моды связан с тем, что именно симметричные БМЗ колебания корональных петель могут являться источником наблюдаемых квазипериодических пульсаций (КПП) излучения вспышечных и послевспышечных петель. Исходя из этого, появляется возможность проведения оценок параметров плазмы и магнитного поля в областях формирования КПП на основе характеристик наблюдаемых колебаний, что является предметом корональной сейсмологии.

В первом разделе главы анализ проводится в рамках прямоугольной геометрии для плоского магнитного слоя, характеризующегося поперечным распределением плотности вида

$$\rho(x) = \rho_e + (\rho_i - \rho_e)f(x), \quad (9)$$

где  $\rho_i$  плотность на оси слоя,  $\rho_e$  плотность на большом удалении от оси  $|x| \rightarrow \infty$ . Функция  $f(x)$  монотонно убывающая четная функция  $x$ , такая что  $f(0) = 1$  и  $f(\infty) = 0$ . Рассматривается приближение холодной плазмы  $\beta = 0$ , так что магнитное поле везде однородно и направлено вдоль оси  $z$ . Волновое уравнение для быстрых мод записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{V_a^2(x)} - k^2 \right) \xi_x = 0. \quad (10)$$



Здесь,  $V_a^2(x) = B^2/(\mu_0\rho(x))$  скорость Альвена и  $k$  продольное (вдоль оси  $z$ ) волновое число. На основании теоремы сравнения (теоремы Незера об осциллирующих и экспоненциальных решениях), примененной к уравнению (10), показано, что если функция профиля  $f(x)$  убывает от оси магнитного слоя медленнее чем  $x^{-2}$ , то все поперечные гармоники симметричной и асимметричной волновых мод являются захваченными при любых значениях продольных волновых чисел. В противном случае, если функция профиля убывает от оси слоя быстрее чем  $x^{-2}$ , то только фундаментальная гармоника изгибной моды является захваченной для всех  $k$ . Вся остальная бесконечная совокупность поперечных гармоник, как симметричной, так и асимметричной мод характеризуются наличием волновых чисел отсечки, разделяющих излучательный и захваченный волновые режимы. В переходном случае, когда функция профиля убывает как  $x^{-2}$ , как показывает анализ, все поперечные гармоники обеих волновых мод имеют одинаковое значение волнового числа отсечки  $k_c$ , за исключением фундаментальной изгибной гармоник, которая является захваченной при всех  $k$ . Данные выводы подтверждены путем решения уравнения (11) записанного для точки обрезки, определяемой условием  $\omega_c = V_{Ae}k_c$ . Уравнение решалось для функции профиля вида  $f(x) = 1/(|x|/(da) + 1)^\mu$ . Результаты показывают, что значения волновых чисел отсечки увеличиваются с ростом параметра  $\mu > 2$ , т.е. для более крутых профилей (соответствующих более резкой границе магнитного слоя). Для  $\mu < 2$ , возможно только решение  $k_c = 0$ , и для переходного случая  $\mu = 2$ , значение волнового числа отсечки дается выражением

$$k_c a = \frac{1}{2d} \left( \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

и не зависит от радиального порядка гармоник. Решение уравнения (10) для указанного профиля можно записать через аналитические функции для значений индекса  $\mu = 1, 2$ . В работе представлены данные решения и даны соответствующие дисперсионные соотношения, которые согласуются с полученными выше результатами. Приближенное решение уравнения (10) может быть получено с помощью ВКБ-приближения. Используя данный подход, в



работе получены неявные выражения для волновых чисел отсечки

$$\begin{aligned} k_c \int_0^\infty \sqrt{f(x)} dx &= \sqrt{\chi} \pi \left( 1 + l - \frac{1}{4} \right), \\ k_c \int_0^\infty \sqrt{f(x)} dx &= \sqrt{\chi} \pi \left( \frac{1}{2} + l - \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

для симметричной и асимметричной мод соответственно, которые справедливы для произвольной функции профиля  $f(x)$ . Данный результат применен для функции профиля в виде обобщенной экспоненты

$$f(x) = \exp \left[ - \left( \frac{|x|}{a} \right)^\alpha \right], \quad (13)$$

где параметр  $\alpha$  определяет крутизну профиля и предел  $\alpha \rightarrow \infty$  соответствует ступенчатой функции. Уравнения (12) и (13) приводят к следующему результату

$$k_c a \approx \sqrt{\chi} \frac{\alpha}{2^{1/\alpha} \Gamma(1/\alpha)} \pi \begin{cases} (1 + l - \frac{1}{4}) & \text{симметричная мода,} \\ (l + \frac{1}{4}) & \text{изгибная мода.} \end{cases} \quad (14)$$

В предельном случае  $\alpha \rightarrow \infty$ , волновые числа обрезки для симметричной моды записываются как  $k_c a = \sqrt{\chi} \pi (1/2 + l)$  [Edwin, Roberts 1982], а ВКБ приближение в уравнении (14) дает значение  $k_c a = \sqrt{\chi} \pi (1 + l - 1/4)$ . Оба выражения являются идентичными для больших  $l$ . На рис. 4 приведена зависимость волновых чисел обрезки  $k_c a$  симметричной моды от параметров  $\mu$  и  $\alpha$  для профиля в виде обратного полинома с  $d = \mu$  и обобщенного экспоненциального профиля. Из графических данных очевидно, что значение  $k_c a$  для конкретной поперечной гармоникки уменьшается с уменьшением параметров  $\mu$  и  $\alpha$ , т.е. с уменьшением крутизны профиля магнитного слоя. В соответствие с ранее полученными результатами, при  $\mu \rightarrow 2$  все гармоникки стремятся к одному значению  $k_c a$ . Таким образом, результаты данного раздела показывают, что особенности волновых режимов в прямоугольном магнитном слое со сглаженным поперечным распределением плотности определяются особенностями функции профиля  $f(x)$ .



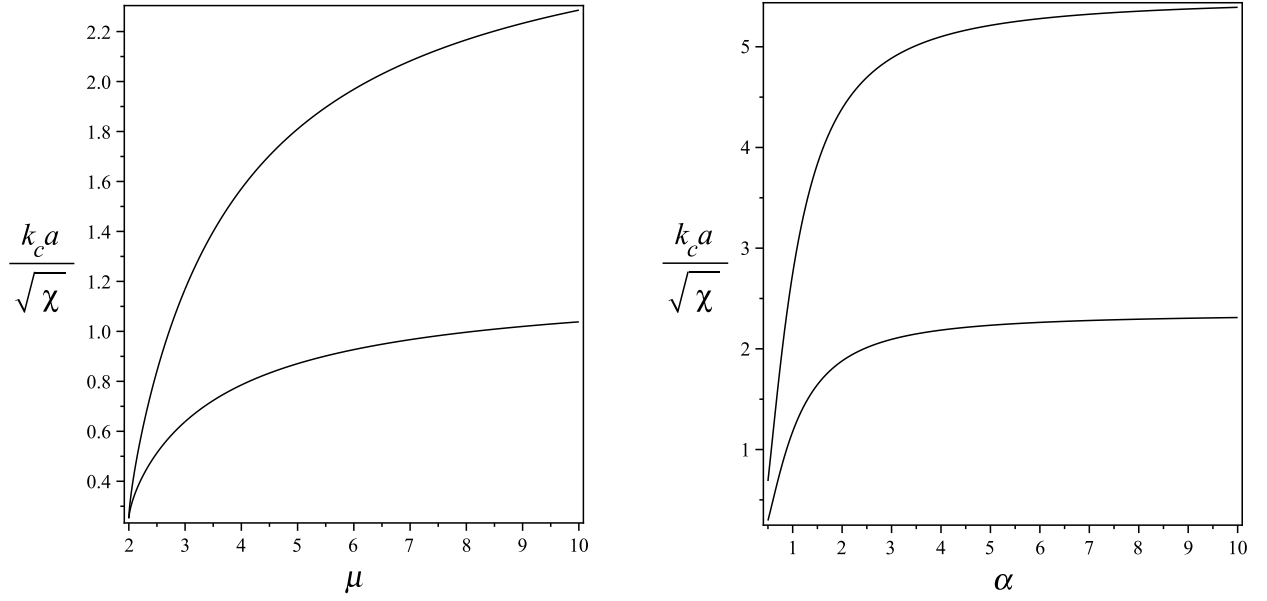


Рис. 4 — Зависимость волновых чисел обрезки от параметров  $\mu$  и  $\alpha$  рассматриваемых функций профиля. Представленные кривые соответствуют первым двум поперечным гармоникам симметричной моды.

Во втором разделе главы анализ проводится в рамках цилиндрической геометрии для поперечно-монокристаллической модели корональной магнитной трубки в приближении  $\beta = 0$ . Радиальное распределение плотности задается уравнением (9), с заменой  $x$  на  $r$ . Показано, что для переменной  $\Xi_r = \xi_r \sqrt{r}$ , уравнение для радиальной моды сводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Xi_r}{\partial r^2} + \left( \frac{\omega^2}{V_A^2(r)} - k^2 - \frac{3}{4r^2} \right) \Xi_r = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) структурно такое же как и уравнение (10) для быстрых мод в прямоугольном магнитном слое. Поэтому, для определения критерия существования критических волновых чисел  $k_c$  может быть применена теорема о существовании осциллирующих решений Незера. Результаты аналогичны полученным для прямоугольной геометрии с поправкой на числовой коэффициент. Если  $f(r)$  убывает медленнее чем  $r^{-2}$ , то все радиальные гармоники симметричной моды являются захваченными для любых  $k$ . Иначе, если  $f(r)$  уменьшается быстрее чем  $r^{-2}$ , то вся бесконечная совокупность радиальных гармоник имеет свои волновые числа отсечки  $k_c$ . И в переходном случае, когда  $f(r) \propto r^{-2}$  для больших  $r$ , все радиальные гармоники симметричной моды характеризуются одинаковым значением  $k_c$ .



В дальнейшем, в разделе рассматриваются два вида функции профиля. Первый вид - это обобщенная экспонента, задаваемая уравнением (13) с заменой  $|x|$  на  $r$ . И второй представляет собой обобщенную функцию Лоренца

$$f(r) = \frac{b^n}{b^n + r^n}. \quad (16)$$

Особенность обоих профилей заключается в том, что при любых  $\alpha$  и  $n$  (определяющих крутизну профиля), их полуширина,  $a$  и  $b$  соответственно, постоянна. На примере профиля (16) показано, что при  $n = 2$ , волновое число отсечки дается выражением

$$k_c b = \left( \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

и не зависит от радиального волнового числа. Данный результат подтвержден в работе [Yu et al., 2017] на основе численного решения уравнения (15). Решение цилиндрического уравнения (15) для произвольной функции  $f(r)$  затруднительно выразить через аналитические функции. Поэтому, как и в предыдущем разделе, применяется ВКБ-приближение. В результате получено неявное выражение, определяющее волновые числа отсечки

$$\frac{k_c}{\sqrt{\chi}} \int_{r_{1c}}^{r_{2c}} \sqrt{f(r) - \frac{3\chi}{4k_c^2 r^2}} dr = \pi \left( l + \frac{1}{2} \right). \quad (18)$$

Здесь,  $l = 1, 2, 3..$  соответствует радиальным гармоникам симметричной моды. Пределы интегрирования  $r_{1c}$  и  $r_{2c}$  являются нулями (поворотными точками) подынтегральной функции. Для рассматриваемых функций профиля получены приближенные аналитические выражения для критических волновых чисел, как функций параметров профилей и проведены численные расчеты, результаты которых показаны на рис. 5. Как следует из графических данных, волновые числа обрезки уменьшаются для более сглаженных профилей плотности (меньшие значения  $\alpha$  и  $n$ ), как и в случае прямоугольного магнитного слоя. Отметим, что ВКБ приближение для значения волнового числа отсечки при  $n = 2$ , задаваемого уравнением (17), имеет вид:  $k_c b \approx \sqrt{(3\chi)/4}$ , где  $\chi \ll 1$ . Для режима захваченных волн  $k > k_c$ , дисперсионное соотношение



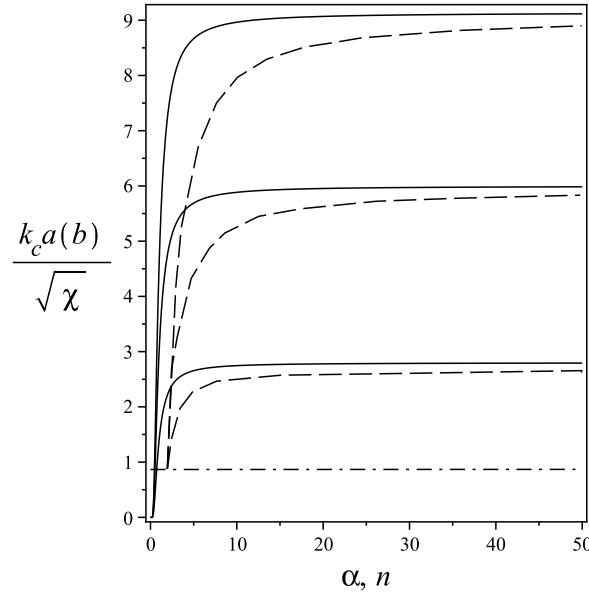


Рис. 5 — Зависимость волновых чисел обрезки фундаментальной, первой и второй радиальных гармоник ( $l = 0, 1, 2$ ) от параметров профиля плотности  $\alpha$  и  $n$ . Сплошные линии и пунктир соответствуют обобщенному экспоненциальному профилю и обобщенному профилю Лоренца.

задается неявным выражением, аналогичным уравнению (18)

$$\frac{1}{\sqrt{\chi}} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(k^2 - n_e^2)f(r) - n_e^2\chi - \frac{3\chi}{4r^2}} dr = \pi \left( l + \frac{1}{2} \right), \quad (19)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  нули подинтегральной функции. Для рассматриваемых профилей, получены приближенные решения уравнения (19), как в окрестности точки обрезки  $k > k_c$ , так и в коротковолновом диапазоне  $k \gg k_c$ . При вычислении интеграла в (19) применялось разложение в ряд интегранта по малому компоненту. Результаты численных расчетов, на основе полученных аналитических выражений приведены на рис.6. Дисперсионные кривые для фундаментальной симметричной моды типа перетяжек ( $l = 0$ ) вычислены для  $V_{Ae} = 5V_{Ai}$ . Хорошо видно, что для обобщенного экспоненциального профиля, значения волновых чисел отсечки уменьшаются с уменьшением индекса  $\alpha$ . При этом, дисперсия ( $dV_{ph}/dk$ ) слабо зависит от  $\alpha$ . Фазовая скорость стремится к внутренней альвеновской скорости  $V_{Ai}$  при больших  $k$ . Фазовые скорости волн для обобщенного профиля Лоренца с  $0 \leq n < 2$  стремятся к внешней альвеновской  $V_{Ae}$  при  $k \rightarrow 0$ , и к внутренней альвеновской скорости при  $k \rightarrow \infty$ . Дисперсионные свойства волн в диапазоне не слишком больших волновых



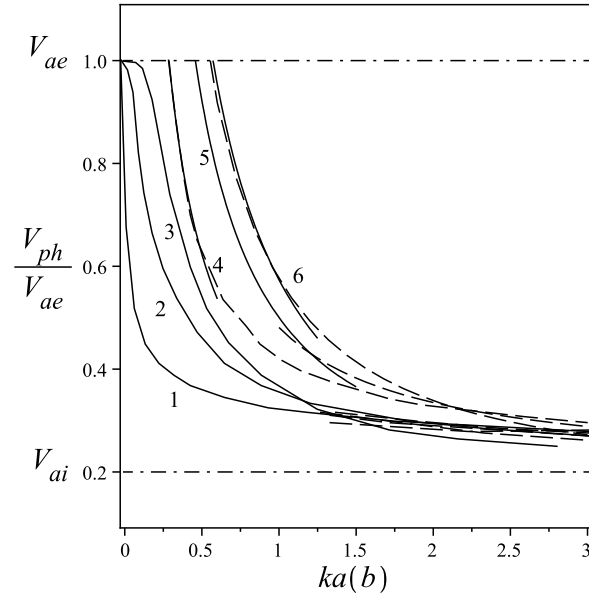


Рис. 6 — Зависимость нормированной фазовой скорости фундаментальной симметричной моды ( $l = 0$ ) от нормированного продольного волнового числа для  $V_{Ae} = 5V_{Ai}$ . Кривые 1, 2 и 3 построены для обобщенного профиля Лоренца с индексом  $n = 1/2, 1$  и  $3/2$  соответственно. Кривые 4, 5, и 6 соответствуют обобщенному экспоненциальному профилю с  $\alpha = 1, 2$  и  $50$ .

чисел чувствительны к значению индекса  $n$ . Так, при  $n \rightarrow 2$  фазовая скорость примерно равна  $V_{Ae}$ , вплоть до значений волнового числа, определяемого уравнением (18), и затем уменьшается, стремясь к  $V_{Ai}$ . В случае  $n < 1$ , фазовая скорость резко уменьшается при малых значениях волновых чисел, и затем постепенно стремится к  $V_{Ai}$ . Далее исследуется поведение симметричной моды в излучательном режиме. Даются соответствующие аналитические выражения для обобщенного экспоненциального профиля и обобщенного профиля Лоренца.

Помимо поперечно-монолитной, рассматривается альтернативная поперечно-слоистая модель корональной магнитной трубки, состоящей из однородной центральной части (ядра), окруженной оболочкой, где плотность непрерывно изменяется от значения  $\rho_i$  в ядре, до значения  $\rho_e$  в однородной внешней области. Точное дисперсионное соотношение получено для функции профиля в оболочке  $f(r) = r^{-2}$ . Показано, что для данной модели, значения волновых чисел обрезки уменьшаются с ростом толщины оболочки (переходного слоя)  $l$  и достигают минимального значения в пределе  $l \rightarrow \infty$ . Частота радиальной моды также уменьшается с ростом ширины переходного слоя. Данный эффект наиболее выражен в длинноволновом диапазоне. Получен-



ные результаты согласуются с выводами, сделанными в рамках поперечно-монолитной модели магнитной трубки.

Разработанная теория радиальных мод в магнитных трубках с непрерывным профилем плотности использована при интерпретации ряда событий, связанных с наблюдением КПП излучения вспышечных и послевспышечных корональных петель.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Выведено уравнение, описывающее распространение винтовых (изгибных) волн вдоль тонких вертикальных стратифицированных гравитацией тонких силовых трубок с переменным радиусом поперечного сечения для общего случая неизотермической модели атмосферы внутри и вне трубки. Данное уравнение получено для условий как отсутствия, так и наличия магнитного поля во внешней среде.
2. Изгибные волны, распространяющиеся вдоль тонких вертикальных стратифицированных и изотермических магнитных трубок, характеризующихся наличием как продольной, так и радиальной компонент магнитного поля и находящихся в тепловом балансе с внешней средой, не подвержены влиянию частоты отсечки, т.е. введенная в работе [Spruit, 1981] частота отсечки для изгибных волн не существует в рамках изотермической модели атмосферы. Волны данного типа являются распространяющимися при всех значениях частот и, как следствие, могут переносить энергию в верхние слои гравитирующей атмосферы.
3. Изгибные волны в тонких стратифицированных и неизотермических магнитных трубках характеризуются наличием пространственно-локальной критической частоты отсечки. Наличие внешнего магнитного поля уменьшает локальное значение критической частоты. Для референсной модели солнечной атмосферы VAL-C рассчитаны значения критической частоты для различных соотношений величин внешнего магнитного поля и магнитного поля трубки.



4. Наличие азимутальной компоненты магнитного поля в тонких стратифицированных силовых трубках не влияет на дисперсионные свойства винтовых (изгибных волн). Однако величина вертикального потока волновой энергии изменяется. При этом поток энергии увеличивается для винтовых мод, поляризованных в направлении закрученности магнитных силовых линий и уменьшается для винтовых мод обратной поляризации. Поток энергии чисто изгибных волн не зависит от магнитного закручивания.
5. Наличие продольного градиента температуры плазмы в корональных петлях может приводить к модификации собственных частот изгибных колебаний арки таким образом, что отношение частоты первого обертона  $\omega_2$  к частоте фундаментальной моды  $\omega_1$  меньше канонического значения, равного 2, т.е.  $\omega_2/\omega_1 < 2$ . Данное свойство хорошо известно из наблюдений.
6. В поперечно-монокристаллических моделях корональных волноводов со сглаженным поперечным профилем плотности, БМЗ волны типа перетяжек (радиальные моды) являются захваченными при всех значениях продольных волновых чисел, если функция профиля плотности убывает медленнее обратного квадрата расстояния до оси волновода. В целом, продольные волновые числа отсечки, разделяющие захваченные и излучательные режимы радиальных мод, имеют меньшие значения в петлях с более сглаженной границей. Данные результаты свидетельствуют о возможности существования радиальных колебаний реальных вспянутых петель, не подверженных акустическому затуханию, что объясняет высокую добротность наблюдаемых КПП.
7. В рамках поперечно-монокристаллической модели петли, дисперсия радиальных мод претерпевает изменения в сравнении с классической моделью петли с разрывной плотностью. Суть изменений заключается в более плавном уменьшении фазовой скорости волн с ростом продольного волнового числа. Данный эффект наблюдается в диапазоне малых и промежуточных значений волновых чисел. Указанное дисперсионное свойство мод типа перетяжек позволяет объяснить отношения периодов основной и первой продольных гармоник ради-



альных колебаний петель, получаемых из наблюдений вспышечных КПП, что невозможно сделать на основе теории радиальных мод для моделей петель с разрывной плотностью.

### **Публикации автора по теме диссертации**

1. Lopin, I., Nagorny, I., Conditions for transverse wave propagation along thin magnetic flux tubes on the Sun // **Astrophys. Journal** - 2013 - 774 - 121.
2. Lopin, I., Nagorny, I., Kink Wave Propagation in Thin Isothermal Magnetic Flux Tubes // **Solar Physics** - 2014 - 289 - 3033.
3. Lopin, I.P., Nagorny, I.G., Fast-sausage oscillations in coronal loops with smooth boundary // **Astron. & Astrophys.** - 2014 - 572 - 60.
4. Lopin, I.P., Nagorny, I.G., Fast waves in a smooth coronal slab // **Astrophys. Journal** - 2015 - 801 - 23.
5. Lopin, I.P., Nagorny, I.G., Sausage waves in transversely nonuniform monolithic coronal tubes // **Astrophys. Journal** - 2015 - 810 - 87.
6. Lopin, I.P., Nagorny, I.G., Kink Waves in Thin Stratified Magnetically Twisted Flux Tubes // **Astrophys. Journal** - 2017 - 840 - 26.
7. Lopin, I.P., Nagorny, I.G., Kink Waves in Non-isothermal Stratified Solar Waveguides: Effect of the External Magnetic Field // **Astron. Journal** - 2017 - 154 - 141.

### **Список литературы**

- Зайцев В.В., Кисляков А.Г., Степанов А.В., Урпо С., Шкелев Е.И. Низкочастотные пульсации корональных магнитных петель // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2001. – Т. 44. №1-2. – С. 38-56.
- Резникова В.Е., Мельников В.Ф., Су Ю., Хуанг Г. Пульсации микроволнового вспышечного излучения с низкими и высокими частотами // Астрономический журнал. – 2007. – Т. 84. – №7. – С. 655-663.
- Рютов Д. Д., Рютова М. П., Звуковые колебания в плазме с магнитными филаментами // ЖЭТФ - 1976 - Т. 70, С. 943-954.
- Aschwanden M.J. Theory of radio pulsations in coronal loops // Solar Physics. – 1987. – V. 111. – P. 113-136.



Aschwanden M. J., Fletcher L., Schrijver C. J., Alexander D., Coronal loop oscillations observed with the transition region and coronal explorer // *Astrophys. J.* - 1999 - V. 520, P. 880-894.

Defouw R. J., Wave propagation along a magnetic tube // *Astrophys. J.* - 1976 - V. 209, P. 266-269.

Edwin, P. M., Roberts, B., Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. III - The slab in a magnetic environment // *Solar Physics* - 1982 - V. 79, P. 239 - 259.

Edwin P. M., Roberts B., Wave propagation in a magnetic cylinder // *Solar Physics* - 1983. - V. 88, P. 179-191.

Meerson B.I., Sasorov P.V., Stepanov A.V. Pulsations of type IV solar radio emission - The bounce-resonance effects // *Solar Physics*. - 1978. - V. 58. - P. 165-179.

Nakariakov V. M., Ofman L., DeLuca E. E., Roberts B., Davila J. M., TRACE observation of damped coronal loop oscillations: Implications for coronal heating // *Science* - 1999 - V. 285, P. 862-864.

Ruderman M. S., Verth G., Erdélyi R., Transverse oscillations of longitudinally stratified coronal loops with variable cross-section // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 686, P. 694-700.

Spriut H. C., Motion of magnetic flux tubes in the solar convection zone and chromosphere // *Astron. Astrophys.* - 1981 - V. 98, P. 155-160.

Van Doorselaere T., Nakariakov V., Verwichte E., Coronal loop seismology using multiple transverse loop oscillation harmonics // *Astron. Astrophys.* - 2007 - V. 473, P. 959-966.

Verwichte E., Nakariakov V. M., Ofman L., Deluca E. E., Characteristics of transverse oscillations in a coronal loop arcade // *Solar Physics* - 2004 - V. 223, P. 77-94.

Yu, H., Li, B., Chen, S.-X., Xiong, M., Guo, M.-Z., Impulsively generated wave trains in coronal structures. I. Effects of transverse structuring on sausage waves in pressureless tubes // *Astrophys. J.* - 2017, V. 836, P. 1-16.