УДК 533.95I

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ МГД-ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А.С.Леонович, В.А.Мазур, В.Н.Сенаторов

DISPERSION EFFECTS OF MHD-WAVES IN AN INHOMOGENEOUS PLASMA

A.S.Leonovich, V.A.Mazur, V.N.Senatorov

A study is made of MHD-wave propagation in an inhomogeneous cool plasma, residing in a constant magnetic field that is perpendicular to the density gradient. Both an accurate solution of eqations for two-fluid hydrodynamics (for some limiting cases) and the WKB technique are used in solving the problem. Within the framework of the first approach a study is made of the properties of waveguide propagation of MHD-waves. WKB-approximation is used to examine the solution for the problem concerning MHD-wave passage through a smooth transition layer, with mutual transformation taken into account. MHD-wave energy dissipation in the vicinity of a special point is discussed.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию распространения МГД-волн в неоднородной плазме. Вследствие свободного растекания плазмы вдоль магнитного поля ее продольная неоднородность, как правило, гораздо меньше поперечной, поэтому для замагниченной плазмы поперечная неоднородность играет особую роль.

При распространении волн в поперечно-неоднородной плазме важное значение имеет их поперечная дисперсия. В холодной плазме быстрый магнитный звук (БМЗ) обладает такой дисперсией:

$$\omega=(K_{\parallel}^2+K_{\perp}^2)^{1/2}A\,,$$

где $K_{\parallel}$ и $K_{\perp}$ - компоненты волнового вектора вдоль и поперек магнитного поля, A - скорость Альвена. Дисперсия альвеновских волн мала и ею обычно пренебрегают: $\omega=K_{\parallel}A$. В таком случае в неоднородной плазме не существует собственных альвеновских колебаний /I/. Отсутствие собственных колебаний вынуждает обращаться к изучению эволюции начального возмущения, т.е. несобственного колебания среды /I,2/, типичным примером которого является волновой пакет. Основную роль во временной эволюции пакета играет увеличение его среднего волнового вектора в соответствии с уравнением

$$d\vec{K}/dt=-\partial\omega/\partial\vec{x}\,.$$

В результате пакет переносится в K - пространстве в область больших значений волнового вектора, где затухает из-за вязкой диссипации /I,2/.

Существует два различных эффекта, приводящих к поперечной дисперсии альвеновских волн. Один из них обусловлен конечным ларморовским радиусом ионов ρ_i и дает так называемую "горячую" дисперсию, порядок величины которой $K_\perp^2 \rho_i^2$. Учет конечного отношения ω/ω_i, где ω_i – циклотронная частота ионов, приводит к "холодной" дисперсии. Роль "горячей" дисперсии обсуждалась в ряде работ [1-4]. В плазме низкого давления ($\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$) "горячая" дисперсия доминирует над "холодной" только при очень больших значениях поперечного волнового вектора:

$$K_\perp > \beta^{-1/4} K_\parallel .$$

Целью данной работы является изучение эффектов конечного ω/ω_i для МГД-волн в неоднородной плазме.

Дисперсия альвеновской волны приводит к ее распространению вдоль градиента плотности. При подходящем профиле плотности она может "запереться" в некоторой ограниченной области пространства, т.е. возможно собственное альвеновское колебание. Эффекты конечного ω/ω_i вызывают не только дисперсию альвеновских волн, но и "перепутывание" их с БМЗ. Это создает возможность для их взаимной трансформации и, кроме того, приводит к появлению особой (сингулярной) точки, в которой происходит диссипация энергии МГД-волн.

Вывод основных уравнений дан в следующем разделе. Там же обсуждается дисперсия МГД-волн в однородной плазме. Далее анализируется возможность волноводных решений для альвеновских волн, изучается диссипация энергии в особой точке и в качестве примера рассмотрено затухание БМЗ-волны в волноводе. Следующие два раздела посвящены применению метода ВКБ, который позволяет представить наглядную картину распространения МГД-волн для произвольного профиля плотности. Приводятся основные формулы ВКБ-приближения применительно к нашей задаче, в частности, дано правило обхода сингулярной точки поворота и изучено несколько интересных случаев падения МГД-волны на плавный переходной слой на основе рассмотренной выше теории.

Основные уравнения

Простейшая схема, позволяющая исследовать влияние холодной дисперсии, – это двужидкостная гидродинамика. Пренебрегая инерцией электронов, электрон-ионными соударениями и считая плазму холодной, имеем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot[\vec{v}\,\vec{B}] - \frac{m_i c}{e}\, rot\, \frac{d\vec{v}}{dt}\,; \qquad (1)$$

$$m_i n \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\vec{B}, \vec{B}], \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\, n\vec{v} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{B}$ - магнитное поле, $\vec{v}$ - скорость плазмы, n - ее плотность.

В равновесии положим $\vec{B}=(0,0,B_0)$, $B_0=\mathrm{const}$, $\vec{v}=0$ и $n=n(x)$. Возмущение в волне будем описывать с помощью безразмерного вектора $\vec{b}=\vec{B}'/B_0$, где $\vec{B}'$ - возмущенное магнитное поле. Полагая

$$\vec{b}=\vec{b}(x)\exp(-i\omega t+iK_z z)$$

и линеаризуя исходные уравнения, получаем для b_x и b_y систему уравнений

$$\frac{d^2 b_x}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2\right) b_x = -iuK_z^2\, b_y; \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2\right) b_y = -iu\left(\frac{d^2}{dx^2} - K_z^2\right) b_x. \qquad (4)$$

Здесь $A=A(x)\equiv B_0/(4\pi n(x) m_i)^{1/2}$ и $u=\omega/\omega_i$ - малый параметр, приводящий к "перепутыванию" уравнений (3) и (4).

В пределе $u=0$ уравнения (3) и (4) расщепляются. Первое из них описывает БМЗ-волну, в которой $b_y=0$, $b_x\neq 0$. В зависимости от профиля плотности решения этого уравнения могут относиться как к непрерывному, так и дискретному спектру. Уравнение (4) при $u=0$ описывает альвеновские волны, имеющие слоистый характер

$$b_x=0, \quad b_y=c\,\delta(x-x_0).$$

В каждой точке $x=x_0$ существует колебание, локализованное в этой точке и имеющее частоту $\omega^2=K_z^2 A^2(x_0)$.

При конечном значении параметра u "перепутывание" уравнений (3) и (4) приводит к целому ряду эффектов, о которых говорилось во введении.

Дисперсию альвеновских волн особенно просто увидеть для однородной плазмы. В этом случае система (3),(4) дает дисперсионное уравнение

$$\omega^2=\left(K_z^2 + \frac{K_\perp^2 \pm (K_\perp^4 + 4u^2K^2K_z^2)^{1/2}}{2}\right)A^2,$$

где $K^2=K_\perp^2+K_z^2$, знак плюс соответствует БМЗ, а минус - альвеновской волне. Малые поправки, связанные с параметром u, для БМЗ-волны особой роли не играют. Напротив, дисперсия альвеновской волны полностью обусловлена малой поправкой:

$$\omega = K_z A\left[1-\frac{1}{2}u^2-\frac{u}{2}\left(\frac{K_\perp^2}{K_0^2}+\sqrt{1+K_\perp^4/K_0^4}\right)^{-1}\right], \qquad (5)$$

где $K_0^2 = 2uK_z^2$. Отсюда видно, что характер дисперсии зависит от величины отношения $K_\perp/K_0$. Дисперсия существенна, если $K_\perp \leqslant K_0$ – это так называемое квазипродольное распространение. Нетрудно убедиться, что поляризация альвеновской волны в этом случае эллиптическая (переходящая при $K_\perp = 0$ в круговую). Если $K_\perp \gg K_0$, то дисперсия (5) становится пренебрежимо мала (при $K_\perp > (m_i/m_e)^{1/4} K_z$ на дисперсию альвеновской волны начинает оказывать влияние инерция электронов). Эллипс поляризации при этом вытягивается – поляризация становится почти линейной.

Перейдем теперь к изучению эффектов конечного u в неоднородной плазме. Выражая из уравнения (4) B_y и подставляя в (3), получаем уравнение для B_x, которое имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2} - V(x) B_x = 0, \qquad (6)$$

где потенциал

$$V(x) = -\frac{\omega^2}{A^2} + K_z^2(1+u^2) + u^2 K_z^4\left[\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2(1-u^2)\right]^{-1}. \qquad (7)$$

В зависимости от вида потенциала $V(x)$, который определяется профилем плотности и значением параметра ω, уравнение (6) может иметь как инфинитные, так и локализованные в пространстве решения. В последнем случае параметр ω в потенциале (7) должен выбираться так, чтобы уравнение Шредингера (6) обладало решением с энергией $E=0$. Таких значений ω может быть несколько. Это означает, что уровень энергии $E=0$ может соответствовать как основному, так и возбужденным состояниям в яме $V(x)$.

Уравнение (6) позволяет выразить B_x'' через B_x. Подставляя это в (4), получаем

$$B_y = iu\frac{\omega^2}{A^2}\left[\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2(1-u^2)\right]^{-1} B_x. \qquad (8)$$

Волновод для альвеновских волн

Выберем профиль плотности $n(x)$, имеющий максимум в точке $x=0$. Вблизи максимума можно использовать разложение

$$n(x) = n_0(1 - x^2/a^2), \qquad (9)$$

применимое при $|x| \ll a$.

Рассмотрим волну с частотой, близкой к $K_z A_0$, где

$$A_0 = A(0) \equiv B_0 / (4\pi m_i n_0)^{1/2},$$

для чего положим

$$\omega = K_z A_0 \left(1 - \frac{u^2}{2} - \frac{\delta}{2}\right), \qquad (10)$$

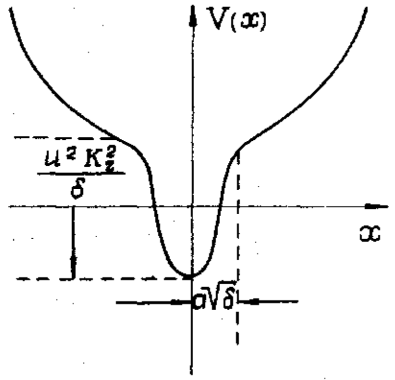
причем параметр δ мал: $|\delta| \ll 1$. Тогда "потенциал" (7) принимает вид

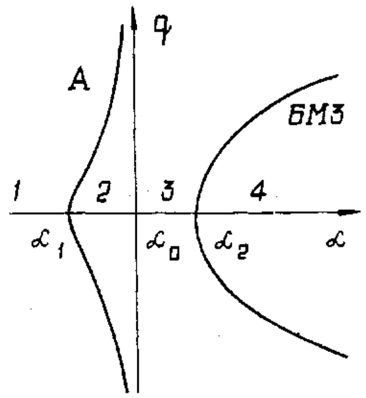
$$V(x) = K_z^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \delta + 2u^2 - \frac{u^2}{\delta + x^2/a^2}\right). \qquad (11)$$

При $\delta > 0$ он не имеет особенностей. Его график изображен на рис.I. Узкая яма в центре обусловлена конечным значением u. Если ее "дно" опускается ниже нуля, для чего необходимо $\delta < u$, то уравнение (6) может иметь собственные решения, относящиеся к дискретному спектру (т.е. иметь уровень энергии $E = 0$).

Мы найдем решения в двух предельных случаях. Безразмерный параметр, характеризующий потенциальную яму, есть произведение глубины на квадрат ширины. Для узкой ямы в центре он равен $u^2 K_z^2 a^2$. Если $u K_z a \gg 1$, то яму можно считать глубокой и существует много решений дискретного спектра. При $u K_z a \ll 1$ яма мелкая и решение только одно.

Если уровень $E = 0$ находится вблизи дна глубокой ямы, то характерный размер локализации решения Δ много меньше ширины ямы $a\sqrt{\delta}$, т.е. $\Delta^2 \ll a^2 \delta$. Тогда потенциал квадратичен и решения для





Р и с. I. Вид потенциала $V(x)$

Р и с. 2. Зависимость поперечного волнового числа q от безразмерной плотности α

него хорошо известны. Имеем

$$\delta=\delta_n=u-u^2-\frac{\sqrt{2}}{K_z a}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

что в соответствии с (I0) означает

$$\omega=\omega_n=K_z A_0\left[1-\frac{u}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}K_z a}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right].$$

Число состояний дискретного спектра с $\delta>0$ по порядку величины равно $n\sim uK_z a\gg 1$. Для основного состояния собственная функция имеет вид

$$B_x=\exp(-x^2/\Delta^2),\qquad \text{где}\qquad \Delta=2^{1/4}(a/K_z)^{1/2}.$$

Если выполняется неравенство $\Delta\ll a$, что означает

$$K_z a\gg 1, \tag{I2}$$

то разложение (9) применимо. Выполнение условия (I2) мы будем далее везде предполагать. В случае глубокой ямы имеет место даже более сильное неравенство $uK_z a\gg 1$, из которого следует предполагавшееся выше условие $\Delta^2\ll a^2\delta$.

В случае мелкой ямы $uK_z a\ll 1$ размер локализации собственной функции много больше ширины ямы. Результат в этом случае можно получить, сшивая решение внутри узкой центральной ямы и вне ее (см., например, [5], с.196). Уравнение вне ямы имеет вид :

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2}-K_z^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\delta+2u^2\right)B_x=0.$$

Его решение, падающее при $x\to+\infty$, обозначим B_x^+. Имеем

$$B_x=D_p\left[\left(\frac{2K_z}{a}\right)^{1/2}x\right],$$

где

$$p=-\frac{1}{2}\left[1+K_z a(\delta+2u^2)\right],$$

а $D_p(Z)$ - функция параболического цилиндра (см., например, [6], с.I08I). Приравнивая логарифмические производные этого решения и решения внутри ямы, получаем

$$\left.\frac{d\ln B_x^{(+)}}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2K_z^2}{\frac{x^2}{a^2}+\delta}\,dx.$$

Учитывая, что $K_z a(\delta + 2u^2) << 1$, и используя формулы теории функций параболического цилиндра, для единственного решения имеем

$$\delta = \frac{\pi^2}{4} \frac{\Gamma^2(1/4)}{\Gamma^2(3/4)} u^4 (K_z a)^3$$

Собственная функция простирается далеко вне узкой центральной ямы на рис.I и совпадает там с решением B_x^+

$$B_x = D_{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2K_z}{a}\right)^{1/2} |x|\right]. \tag{I3}$$

Решение внутри ямы фактически сводится к резкому изменению производной и может трактоваться как излом решения (I3) в точке $x=0$. Характерный масштаб этого решения $\Delta = (a/K_z)^{1/2}$. В силу условия $K_z a >> 1$ имеем $\Delta << a$ и, следовательно, разложение (9) справедливо. Представляет интерес поляризация найденных решений. Согласно формуле (8)

$$B_y = -iu\left(\frac{x^2}{a^2} + \delta\right)^{-1} B_x.$$

Отсюда вытекает, что в случае глубокой ямы $uK_z a >> 1$,

$$B_y(x)/B_x(x) = -i,$$

т.е. поляризация альвеновской волны круговая. Этот результат соответствует тому факту, что в глубокой яме характерный волновой вектор $K_x \sim 1/\Delta = (K_z/a)^{1/2}$ удовлетворяет условию квазипродольного распространения

$$K_x/K_z \sim (K_z a)^{-1/2} << u^{1/2}.$$

В случае мелкой ямы поляризация эллиптическая, причем полуоси эллипса очень сильно зависят от координаты x. При $x=0$ имеем

$$|B_y/B_x| \sim (uK_z a)^{-3} >> 1,$$

но уже при $x = u^{1/2} a << \Delta$ соотношение полуосей меняется на обратное $|B_y/B_x| < 1$.

Итак, эффекты дисперсии приводят к существованию решений, локализованных вблизи максимума плотности, иными словами, максимум плотности является волноводом для альвеновских волн.

Диссипация энергии МГД-волн в особой точке

В этом разделе мы рассмотрим решения, для которых потенциал $V(x)$ имеет особенности в некоторых точках (в работе [8] они называются сингулярными точками поворота), в них знаменатель последнего члена в (7) обращается в нуль. Для потенциала (II) это отвечает значениям $\delta < 0$. Хорошо известно, что в этих точках происходит поглощение энергии колебаний [7,8]. С физической точки зрения это поглощение носит диссипативный характер. Из соотношения (8) видно, что в особой точке B_y обращается в бесконечность. Введение малой диссипации снимает эту особенность, но, естественно, приводит к поглощению энергии. Оно обладает замечательным свойством – остается конечным даже при сколь угодно малой диссипации. Дело в том, что при стремлении диссипации к нулю сужается область поглощения энергии, но увеличивается максимальное значение B_y, так что диссипируемая мощность остается постоянной. По этой причине физический механизм диссипации оказывается несущественным – она по сути дела задает только правило обхода особой точки [8].

Мы введем диссипацию в исходную систему уравнений модельным образом, включив в правую часть уравнения (I) член $-\nu\dot{\vec{B}}$, причем эффективный декремент затухания будем считать малым и в конце вычислений положим $\nu \to 0$. В приложении показано, что этот член приводит к тем же результатам, что и учет конечной проводимости плазмы. Введение члена $-\nu\dot{\vec{B}}$ приводит в выражениях (7),(8) к замене $\omega^2 \to \omega(\omega + i\nu)$, что устраняет особенность в этих выражениях.

Без ограничения общности можно считать, что уравнение

$$\frac{\omega^2}{A^2(x)} - K_z^2(1-u^2)=0 \tag{I4}$$

имеет решение $x=0$. Положим вблизи этой точки

$$n(x)=n_0(1+x/L). \tag{I5}$$

Делая в (6) замену переменной $x=(L/K_z^2)^{1/3}\xi$, получим для B_x уравнение

$$\frac{d^2 B_x}{d\xi^2} + \left(\xi-\xi_0+i\varepsilon - \frac{U^2}{\xi+i\varepsilon}\right)B_x=0, \tag{I6}$$

где

$$U=u(K_zL)^{2/3};\ \xi_0=2u^2(K_zL)^{2/3};\ \varepsilon=\frac{\nu}{\omega}(K_zL)^{2/3}.$$

При $|\xi|\ll U$ уравнение (I6) переходит в

$$\frac{d^2 B_x}{d\xi^2} - \frac{U^2}{\xi+i\varepsilon}B_x=0.$$

Общее решение последнего есть

$$B_x=C_1(\xi+i\varepsilon)^{1/2}I_1[2U(\xi+i\varepsilon)^{1/2}] + C_2(\xi+i\varepsilon)^{1/2}K_1[2U(\xi+i\varepsilon)^{1/2}], \tag{I7}$$

где $I_1(Z)$ и $K_1(Z)$ – модифицированные функции Бесселя [6]. Роль слагаемого $i\varepsilon$ в этом решении сводится к заданию правила обхода точки ветвления выражения $(\xi+i\varepsilon)^{1/2}$ при переходе от $\xi>0$ к $\xi<0$. Это правило таково:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi+i\varepsilon)^{1/2}=\begin{cases}\xi^{1/2} & \text{при } \xi>0\\ i|\xi|^{1/2} & \text{при } \xi<0.\end{cases} \tag{18}$$

Принимая его, слагаемое $i\varepsilon$ в решении (17) можно опустить. Даже в пределе $\varepsilon=0$ решение (17) не имеет особенности при $\xi\to 0$. Это означает, что изменение вида решения уравнения (16) конечно по сравнению с решением при $U=0$. Поскольку U – единственный параметр, характеризующий величину этого отклонения, то ясно, что при $U\ll 1$ отклонение мало, и в первом приближении решение уравнения (16) выражается через функцию Эйри [6]

$$B_x=\Phi(\xi_0-\xi)=\Phi\left[\left(\frac{K_z^2}{L}\right)^{1/3}(2u^2L-x)\right].$$

Вблизи особой точки соотношение (8) принимает вид

$$B_y=i\frac{U}{\xi+i\varepsilon}B_x. \tag{19}$$

Компонент B_y, в отличие от B_x в пределе $\varepsilon=0$ имеет особенность при $\xi\to 0$. Это означает, что для корректного вычисления диссипации энергии вблизи особой точки ε можно устремить к нулю только в конце вычислений.

Выражение для диссипируемой мощности имеет вид

$$P=\nu\int\frac{|\vec{B}'|^2}{8\pi}dx=\frac{\nu B_0^2}{8\pi}\int(|B_x|^2+|B_y|^2+|B_z|^2)dx.$$

Подставляя сюда выражение (19) для B_y и выражение для B_z, следующее из уравнения $\operatorname{div}\vec{B}=0$, получаем в пределе $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}P&=u^2\frac{\omega B_0^2L}{8\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}|B_x|^2d\xi=\\&=\frac{1}{8}u^2\omega B_0^2L|B_x(0)|^2.\end{aligned} \tag{20}$$

В зависимости от физической постановки задачи это соотношение можно использовать для вычисления коэффициента поглощения БМЗ-волны, падающей на переходной слой (перепад плотности), либо для вычисления декремента затухания БМЗ-волны, локализованной в волноводе.

В качестве примера такого волновода рассмотрим профиль плотности $n(x)=n_0\,ch^{-2}\frac{x}{a}$.

При $U \ll 1$ собственные частоты и собственные функции для БМЗ-волны имеют вид

$$\omega^2 = \omega_n^2 \cong A_0^2 \left[\left(K_z + \frac{n+1/2}{a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2} \right],$$

$$B_x = \left(ch \frac{x}{L}\right)^{-K_z a} \cdot P_n\left(th \frac{x}{a}\right),$$

где P_n – полином Лежандра степени n. В этом случае положение особой точки $x = x_0$ определяется уравнением (I4) с $\omega = \omega_n$. Для основного состояния имеем $x_0 = (a/K_z)^{1/2}$. Разлагая выражение для плотности вблизи этой точки аналогично (I5), получим

$$L = \frac{1}{2}(K_z a)^{1/2} a.$$

Кроме того, при $K_z a \gg 1$

$$B_x(x_0) = \left(1 + \frac{1}{K_z a}\right)^{-K_z a} \approx e^{-1}.$$

Подставляя эти результаты в (20), получаем

$$P = \frac{1}{16e^2} u^2 (K_z a)^{1/2} a \omega B_0^2.$$

Декремент затухания БМЗ-волны в волноводе $\gamma = \frac{2P}{W}$, где W – энергия волны (множитель 2 отражает наличие двух точек резонанса). Для основного состояния

$$W = \frac{a}{(K_z a)^{1/2}} \frac{B_0^2}{16\pi} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{2\pi}{e^2} u^2 K_z a \omega.$$

Из условия $u K_z a \ll 1$ видно, что $\gamma \ll \omega$. Итак, учет дисперсионных эффектов приводит к затуханию волноводных решений для БМЗ.

ВКБ-приближение

Общие свойства решения для произвольного профиля плотности проще всего исследовать на основе метода ВКБ. Для нас это тем более ценно, что метод ВКБ позволяет изучить явления вблизи особой точки в обратном предельном случае

$$U = u(K_z L)^{2/3} \gg 1. \tag{2I}$$

Удобно перейти к безразмерной плотности

$$\alpha(x) = \frac{\omega^2}{K_z^2 A^2(x)} = \frac{4\pi \omega^2 m_i}{K_z^2 B_0^2} n(x),$$

тогда потенциал в уравнении (6) примет вид

$$V(x)=-K_z^2\left[\mathcal{L}(x)-1-u^2-\frac{u^2}{\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}_0}\right],$$

где $\mathcal{L}_0=1-u^2$. Решения в ВКБ-приближении есть

$$B_x=G^{\pm}|q|^{-1/2}\exp(\pm iK_z\int q\,dx), \qquad (22)$$

где $G^{\pm}$ - произвольные постоянные, и мы ввели безразмерный волновой вектор q

$$q^2=K_x^2/K_z^2=\mathcal{L}-1-u^2-\frac{u^2}{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}.$$

График q как функция $\mathcal{L}$ приведен на рис.2, где $\mathcal{L}_{1,2}=1\mp u$ - точки поворота, т.е. $q(\mathcal{L}_{1,2})=0$. Цифрами обозначены интервалы изменения $\mathcal{L}$.

Условие применимости ВКБ-приближения

$$\left|\frac{d}{dx}\;\frac{1}{K_x}\right|\ll 1$$

дает наиболее жесткие ограничения вблизи обычных точек поворота $\mathcal{L}_{1,2}$ и сингулярной точки поворота $\mathcal{L}_0$; ВКБ-приближение применимо вне некоторой окрестности точек $\mathcal{L}_{1,2}$

$$|\mathcal{L}-\mathcal{L}_{1,2}|\gg\delta_{1,2}\equiv(K_zL)^{-2/3}$$

и точки $\mathcal{L}_0$

$$|\mathcal{L}-\mathcal{L}_0|\gg\delta_0\equiv u^{-2}(K_zL)^{-2},$$

где L - характерный масштаб изменения плотности. Как легко убедиться, чтобы эти окрестности не пересекались, необходимо выполнение условия (2I).

Вектор Пойнтинга $\overline{\Pi}=(C/8\pi)R_e[\vec{E}\,\vec{H}^*]$ для ВКБ-решений (22) имеет вид

$$\Pi_x=\pm\frac{\omega}{K_z}\;\frac{B_0^2}{8\pi}\,|G^{\pm}|^2, \qquad (23)$$

откуда видно, что знак потока энергии совпадает со знаком K_x.

Основная трудность метода ВКБ заключается в сшивке решений вблизи точек поворота. Правила сшивки вблизи обычных точек поворота $\mathcal{L}_{1,2}$ хорошо известны (см.[5], с. 204 и 2I6). Аналогичные правила для сингулярной точки поворота получим сшивая точное решение (I7), применимое и в точке $\mathcal{L}_0$ с ВКБ-решениями по обе стороны от точки $\mathcal{L}_0$, при этом существенно использование рецепта обхода особой точки (I8). Опуская громоздкие, но простые выкладки, запишем формулы связи коэффициентов $G_i^{\pm}$ (индекс i соответствует номеру области на рис.2):

$$G_3^+ = e^{3\pi i/4} G_2^- - e^{-3\pi i/4} G_2^+ ; \tag{24}$$

$$G_3^- = -e^{3\pi i/4} G_2^- . \tag{25}$$

Мы полагаем в области непрозрачности $q = i|q|$, при этом коэффициент G_3^+ соответствует решению, падающему при удалении от особой точки, а G_3^- – растущему.

Пусть координата точки $\mathcal{L}_0$ есть $x=0$ и вблизи нее применимо разложение (15). В процессе сшивки решений можно получить значение $B_x(0)$ через коэффициенты $G_3^{\pm}$ (либо $G_2^{\pm}$):

$$B_x(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, u (K_z L)^{1/2}} G_3^+ .$$

Подставляя это выражение в формулу (20), получаем

$$P = \frac{\omega}{K_z} \frac{B_0^2}{8\pi} |G_3^+|^2 . \tag{26}$$

Полученные выше соотношения позволяют исследовать ВКБ-решение для любого профиля плотности.

Падение МГД-волны на плавный переходной слой

В качестве важного и интересного примера, где используются результаты, полученные нами выше, рассмотрим падение МГД-волны на перепад плотности. Пусть безразмерная плотность меняется от $\mathcal{L}_{min}$ до $\mathcal{L}_{max}$ при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$. В зависимости от взаимного расположения точек $\mathcal{L}_{min}$, $\mathcal{L}_{max}$ и $\mathcal{L}_i\ (i=0,1,2)$ имеется несколько физически различных случаев.

а) Случай $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_{min} < \mathcal{L}_0$; $\mathcal{L}_0 < \mathcal{L}_{max} < \mathcal{L}_2$.

Решение существует в областях 2 и 3 (см.рис.2). В области непрозрачности должно быть только падающее решение, т.е. $G_3^- = 0$ и, согласно (24) и (25),

$$G_2^- = 0, \quad |G_2^+| = |G_3^+| .$$

Это означает, что в области прозрачности имеется только падающая альвеновская волна, вся энергия которой поглощается в сингулярной точке (ср.формулы (23) и (26), естественно, что в этом случае в (23) $G^+ = G_2^+$).

б) Случай $\mathcal{L}_{min} < \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_{max} > \mathcal{L}_2$.

Он был рассмотрен нами при $U = u(K_z L)^{2/3} \ll 1$. Теперь мы можем его проанализировать в обратном предельном случае $U \gg 1$.

В области I (рис.2) должно быть только падающее при $x \to -\infty$

решение. Используя правила сшивки в обычных и сингулярной точках поворота, можно получить решение при всех x . В частности, в области 4 будем иметь падающую и отраженную БМЗ-волны. Представляет интерес вычисление доли потока энергии БМЗ-волны, диссипируемой в особой точке $\mathcal{L}_0$. В результате несложных вычислений можно получить

$$K = \frac{P}{|\Pi_x|} = 4 \sin^2 \Psi_1 e^{-2\Psi_2},$$

где

$$\Psi_1 = K_z \int_{x_1}^{x_0} q\, dx , \quad \Psi_2 = K_z \int_{x_0}^{x_2} |q|\, dx ,$$

а точки x_i определяются соотношением $\mathcal{L}(x_i)=\mathcal{L}_i$. Если профиль плотности можно аппроксимировать линейной функцией от точки x_1 до точки x_2, то

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \; \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \; U^{3/2} .$$

Как и следовало ожидать , доля потока поглощаемой энергии экспоненциально мала.

в) Случай $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_{min} < \mathcal{L}_0$; $\mathcal{L}_{max} > \mathcal{L}_2$.

В этом случае наиболее естественная постановка задачи такова. Из $x=+\infty$ падает БМЗ-волна. Часть ее отражается в точке $\mathcal{L}_2$, а часть, преодолев барьер непрозрачности, трансформируется в альвеновскую волну и распространяется до $x=-\infty$. При этом некоторая доля энергии диссипирует в точке $\mathcal{L}_0$. Отношение потока энергии прошедшей альвеновской волны к потоку падающей БМЗ-волны есть

$$\Pi_x^{(A)} / \Pi_x^{(БМЗ)} = e^{-2\Psi_2},$$

а доля потока, диссипированного в особой точке,

$$P / \Pi_x^{(БМЗ)} = e^{-2\Psi_2}.$$

Отсюда видно, что сколько энергии поглощается, столько и проходит, трансформируясь в альвеновскую волну.

Заключение

Изученные в данной работе дисперсионные эффекты МГД-волн в неоднородной плазме имеют, на наш взгляд, как принципиальное, так и прикладное значение.

Учет конечной величины параметра $u = \omega/\omega_i$ позволил обнаружить ряд новых эффектов: существование собственных (волноводных) решений для альвеновских волн, наличие особой точки, в которой происходит диссипация энергии МГД-волн, взаимную трансформацию альвеновских и БМЗ-волн. Эти явления могут играть важную роль в физике магнитосферы, например, в теории геомагнитных пульсаций и в физике Солнца.

Приложение

Покажем, что введение конечной проводимости в исходные уравнения приводит к тому же выражению для диссипируемой мощности (формула (20)), что и модельное затухание, использованное в тексте статьи.

Конечная проводимость приводит к изменению уравнения (I):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = rot[\overline{V}\overline{B}] - \frac{m_i c}{e} rot \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \overline{B},$$

где σ – проводимость плазмы. Ограничимся случаем $U \ll 1$. Эффекты дисперсии, приводя при этом к особенности B_y, практически не влияют на B_x. Но тогда и конечная проводимость существенна только в уравнении для B_y. Имеем вместо (3),(4)

$$B_x'' + \left(\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2\right) B_x = 0$$

$$-i\frac{S^2\omega^2}{A^2} B_y'' + \left(\frac{\omega^2}{A^2} - K_z^2(1-u^2)\right) B_y = iu\frac{\omega^2}{A^2} B_x, \qquad (27)$$

где $S^2 = c^2/4\pi\sigma\omega$ – квадрат скиновой длины. В пределе высокой проводимости $S \to 0$.

Принимая вблизи особой точки линейный профиль плотности (I5) и переходя к переменной ξ, получаем из (27)

$$-i\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial \xi^2} + \xi B_y = iUB_x,$$

где $\mu = K_z^2 S^2 \ll 1$. Это уравнение заменяет соотношение (I9). Его решение, падающее при $|\xi| \to \infty$, выражается через стандартную функцию [6]

$$B_y = iU\mu^{-1/3} G\left(\frac{\xi}{\mu^{1/3}}\right) B_x(0),$$

являющуюся решением уравнения

$$-i\frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} + ZG(Z) = 1.$$

При наличии конечной проводимости диссипируемая мощность

$$P = \frac{1}{\sigma}\int |j|^2 dx.$$

Вычисляя ток в пределе $\sigma \to \infty$ имеем

$$P = \frac{\omega B_0^2}{4\pi} \frac{\mu}{K_z^2} \int |B_y'|^2 dx =$$

$$= \frac{\omega B_0^2}{4\pi} u^2 L \, |B_x(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |G'(Z)|^2 dZ .$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G'(Z)|^2 \, dZ = \frac{\pi}{2} ,$$

снова приходим к формуле (20).

Литература

I. Тимофеев А.В. - В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, I979, вып.9, 205.
2. Мазур В.А., Михайловский А.Б., Френкель А.Л., Шухман И.Г. - В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, I979, вып.9, 233.
3. Rosenbluth M.H., Rutherford P.H. - Phys.Rev.Lett.1975,v.34,1428.
4. Михайловский А.Б., Петвиашвили В.И., Фридман А.М. - Письма ЖЭТФ, I976, т.24, 53.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, I974.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, I97I.
7. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, I967.
8. Тимофеев А.В. - Успехи физ.наук, I970, т.I02, № 2, I85.

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн СО АН СССР

Статья поступила в апреле I983 г.

УДК 550.388.2

СВОЙСТВА НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЫ КАК НАГРУЗКИ МАГНИТОСФЕРНОГО ГЕНЕРАТОРА НАПРЯЖЕНИЯ

Г.В.Попов

THE PROPERTIES OF AN INHOMOGENEOUS IONOSPHERE AS A LOAD OF THE MAGNETOSPHERIC VOLTAGE GENERATOR

G.V.Popov

This paper examines two alternative regimes of current flow within a one-dimensionally-inhomogeneous ionospheric zone that is the load of the magnetoapheric voltage generator. General expressions are derived for the tensor of effective conductivity of the inhomogeneous ionosphere both in the regime of its polarization and in the regime of magnetospheric by-passing of ionospheric polarization fields. On the basis of a simplified model for ionospheric conductivity, a study is made of some properties of recon-