

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «КАЛМЫЦКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б.Б. ГОРОДОВИКОВА»



На правах рукописи

Елагандула Нага Варун

**Теоретические исследования солнечных корональных петель:
нелинейная радиальная мода**

01.03.03 – Физика Солнца

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Доктор физико-математических наук
МИХАЛЯЕВ Бадма Борисович

Элиста – 2022

Оглавление

<i>Введение</i>	4
<i>Актуальность научной работы</i>	9
<i>Цель научной работы</i>	10
<i>Научная новизна</i>	10
<i>Теоретическая и практическая значимость</i>	11
<i>Результаты, выносимые на защиту</i>	11
<i>Степень достоверности и апробация результатов</i>	12
<i>Личный вклад автора</i>	15
<i>Структура и объем диссертации</i>	15
Глава 1.	
Линейная теория магнитозвуковых волн в однородной магнитной трубке	17
1.1 Введение.....	17
1.2 Уравнение для возмущения полного давления.....	17
1.3 Дисперсионное уравнение.....	22
Глава 2.	
Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для радиальной моды корональных петель	31
2.1 Введение.....	31
2.2 Исходные уравнения и граничные условия.....	32
2.3 Линейная радиальная мода в короне.....	36
2.4 Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).....	38
2.5 Заключение к Главе 2.....	49
Глава 3.	
Изучение нелинейных коэффициентов НУШ и возникновение супернелинейности	50
3.1 Введение	50
3.2 Коэффициенты α , σ и групповая скорость V_g	51

<i>Таблица № – 3.1</i>	57
<i>Таблица № – 3.2</i>	59
<i>Таблица № – 3.3</i>	61
3.3 Заключение к Главе 3.....	66
Глава 4.	
Модуляционная неустойчивость, квазипериодические пульсации и появление солитонов и солитоноподобных образований	67
4.1 Введение	67
4.2 Модуляционная неустойчивость и квазипериодические осцилляции радиальной моды в короне.....	68
4.3 Классический солитон и солитон Перегринна.....	72
4.4 Моделирование образований, подобных классическому солитону и солитону Перегринна.....	74
4.5 Заключение к Главе 4.....	77
Результаты	91
Литература	92

Введение

Солнце – уникальная звезда, которую можно изучать в деталях. Близость Солнца позволяет нам детально взглянуть на некоторые из наиболее впечатляющих природных явлений, таких как солнечные вспышки, извержения корональной массы, солнечные пятна и т.д.

Появление в 1970-х годах нового метода, называемого *гелиосейсмологией*, открыло новые двери в изучение внутреннего строения Солнца. Этот метод основан на детальном изучении солнечных колебаний и волн. Открытие осцилляций на поверхности Солнца произошло около 1960-х годов и к середине 1970-х годов стало ясно, что эти поверхностные колебания действительно могут использоваться в качестве зондирующего средства для анализа внутренней структуры. Гелиосейсмология очень похожа на сейсмологию, где с помощью сейсмических волн изучается внутреннее строение Земли. В случае Солнца существуют три важных гелиосейсмических моды, которые называются P-модами (акустические моды), G-модами (гравитационные моды) и F-модами (поверхностные гравитационные моды). Существуют специальные группы солнечных обсерваторий, такие как GONG (Global Oscillations Network Group), разбросанные по всему миру для непрерывных наблюдений за Солнцем и его глобальными колебаниями. Информация, полученная в таких обсерваториях, привела к совершенствованию стандартной модели Солнца.

Используя данные наблюдений и теоретические модели, физики Солнца пришли к пониманию, что можно разделить Солнце условно на следующие зоны:

- Ядро;
- Зона лучистого переноса;
- Тахоклин;
- Конвективная зона;
- Фотосфера;
- Область минимальной температуры;

- Хромосфера;
- Переходная зона;
- Корона.

Наружный слой солнечной атмосферы называется короной. Это самый «неуловимый» из всех слоев солнечной атмосферы, и его очень трудно наблюдать в наземных обсерваториях. Солнечную корону можно изучать только с помощью специально сконструированных телескопов, называемых коронографами. Запуск космических телескопов, таких как SOHO с бортовым коронографом, SDO, TRACE, YОНKОН, Hinode и т.д., привёл к значительному прорыву в области корональной и хромосферной физики Солнца. До запуска космических телескопов корональные наблюдения можно было проводить только ранним утром в ясный солнечный день. Высокие угловые разрешения до 0.3 угловых секунд привели к открытию многих ранее предсказанных явлений, таких как магнитозвуковые волны вдоль корональных петель, магнитные пересоединения и т.д. Свет от короны составляет примерно одну миллионную часть видимого света, создаваемого фотосферой, и он генерируется тремя разными источниками, которые называются К-короной, F-короной и E-короной. К-корона излучает свет в результате томсоновского рассеяния, F-корона генерирует свет главным образом за счет рассеяния на небольших частицах пыли, которые обильны в пространстве между Солнцем и Землей. F-корона получила своё название из-за сильных линий поглощения Фраунгофера, которые также наблюдаются в спектре фотосферного света. E-корона генерирует свет благодаря световым излучениям ионов. Поэтому спектр E-короны дает информацию о составе и плотности газа, тогда как по излучению K-короны мы можем оценить плотность свободных электронов. Температура короны составляет около 1 миллиона градусов Кельвина, что делает её в 1000 раз более горячей, чем фотосфера и причина такого нагрева солнечной короны до сих пор не ясна.

Корона и хромосфера играют важную роль в космической погоде. Различные плазменные явления, происходящие в этих областях, ответственны за возмущения в магнитосфере Земли.

В 1970-х годах стало известно, что солнечная атмосфера очень неоднородна [26], [74], [112], [140]. В частности, в нижней части солнечной атмосферы (в фотосфере и хромосфере) магнитное поле сосредоточено в магнитных трубках, где его величина составляет несколько килогаусс. Типичными примерами таких магнитных трубок являются солнечные пятна. В верхних слоях солнечной атмосферы (в верхней части хромосферы и короны) магнитное давление значительно доминирует над газовым давлением плазмы, поэтому магнитное поле более однородно. Однако плазма в этих слоях очень неоднородна, что приводит к сильному изменению альвеновской скорости. Плазму с такими свойствами обычно называют магнитно-структурированной плазмой.

В отличие от фотосферы и хромосферы, различные физические свойства и параметры короны очень сложно определить из-за чрезвычайно слабого света, создаваемого короной. Также важно понять механизмы выброса корональной массы, солнечного ветра и других корональных явлений, для которых информации о распределении магнитных полей и плотности плазмы явно необходимы. Решение этой проблемы лежит в области, называемой *корональной сейсмологией*. Аналогично гелиосейсмологии и геосейсмологии корональная сейсмология изучает поведение и распространение волн и, в частности, магнитозвуковых волн в короне для определения таких физических параметров, как магнитное поле.

Открытие магнитной структуры в солнечной атмосфере усилило интерес теоретиков к изучению распространения волн в магнитно-структурированной плазме. В большинстве теоретических работ были рассмотрены простейшие магнитные структуры, являющиеся магнитными слоями и магнитными трубками. Среди них магнитная трубка является наиболее интересной с точки зрения корональной сейсмологии. В первых исследованиях использовалась линейная теория магнитозвуковых волн. Магнитозвуковые вытекающие волны (*Leaky MHD*

modes) в магнитной трубке в линейном приближении впервые были изучены Зайцевым и Степановым [133], далее, вероятно, наиболее полное исследование линейных захваченных магнитозвуковых волн (*Confined MHD modes*) в магнитной трубке было дано Эдвином и Робертсом [16]. Они в своей работе показали, что в общем случае для однородной магнитной трубки существуют медленная и быстрая радиальные, изгибные и баллонные моды, но стоит отметить, что в случае корональных петель из всех магнитозвуковых мод наиболее интересными с точки зрения корональной сейсмологии являются быстрая радиальная мода и быстрая изгибная мода, которые относятся к так называемой категории объёмных мод.

Так как в корональных условиях, т.е. при $\beta \ll 1$ (где β является параметром плазмы и определяется как отношение газового давления к магнитному давлению) поверхностная мода и медленная моды не существуют в линейном приближении, то радиальная и изгибная моды по сути означают быструю радиальную и изгибную моды соответственно, и таким образом с этого момента в качестве упрощения для короны используется термин радиальная мода вместо быстрой радиальной моды. В первой главе настоящей диссертации показано, что при радиальной моде плотность плазмы модулируется в первом порядке, и поэтому такая мода используется в интерпретации квазипериодических пульсаций (КПП), которые часто наблюдаются при вспышках.

Большая часть исследований в МГД-волнах проводится только в линейном приближении из-за простоты математических методов, таким образом обычно применяемая корональная сейсмология является линейной корональной сейсмологией, но в немалых случаях, реальная физическая природа этих волновых процессов на самом деле является нелинейной. Так допустим вариации интенсивности излучения возмущений около 3-4 % от фона, тогда можно использовать линейный подход, но если вариации около 10% или больше, тогда необходимо использовать нелинейный подход.

В линейном приближении пренебрегают членами второго и более высоких порядков, а полученные уравнения фактически описывают явления в приближении

первого порядка. В результате многие эффекты, такие как образование солитонов, самофокусировка, фазовая самомодуляция и т.д., не могут быть поняты с помощью простой линейной теории. Как ранее упоминалось, для магнитной трубки в короне (корональная петля) из всех МГД-мод радиальная и изгибная моды остаются важными для корональной сейсмологии и, следовательно, развитие нелинейных теорий этих мод является актуальной задачей.

Начиная с 1980-х годов развитие вычислительной техники способствовало стабильному росту количества научных работ по нелинейным теориям в этой области. Таким образом, нелинейные волны в магнитном слое были впервые рассмотрены Робертсом и Манжени [85], а в магнитных трубках впервые исследованы Робертсом [80], где он вывел так называемое уравнение Лейбовича-Робертса для медленных поверхностных радиальных волн в магнитной трубке, используя усредненные уравнения МГД по поперечному сечению трубки для описания движения возмущений внутри неё. Мерзляков и Рудерман [45, 46, 47] вывели уравнение Бенджамина-Оно без использования усредненных уравнений МГД внутри магнитного слоя (*magnetic slab*) и исследовали медленные нелинейные объемные волны в магнитном слое. Мерзляков и Рудерман [46] также изучали распространение быстрых нелинейных поверхностных волн в магнитном слое в случае отсутствия магнитного поля вне слоя. Они показали, что эти волны описываются уравнением Хохлова-Заболоцкой [87], [128]. Молотовщиков и Рудерман [55] использовали подход, отличающийся от того, который был применён Робертсом [80], и получили уравнение Лейбовича-Робертса, описывающее медленные волны в магнитной трубке, и далее изучали распространение солитонов медленной моды в магнитных трубках. Накаряков и др. [67] вывели нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для радиальной моды в магнитном слое в корональных условиях с гладким профилем плотности. Обзор теорий нелинейных МГД-волн в солнечной атмосфере можно найти, например, в статьях Рудермана [88, 89].

Из вышеупомянутых работ следует, что нелинейная медленная радиальная мода хорошо изучена в магнитном слое и трубке, а также существует нелинейная теория радиальной моды в корональных условиях в случае плоской геометрии [67]. Логично, что для дополнения уже существующих теорий необходимо развивать нелинейную теорию радиальной моды магнитной трубки в короне.

Радиальная мода сильно дисперсионна и, соответственно, в случае средней амплитуды волн основным нелинейным эффектом является нелинейная волновая модуляция, описываемая нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Таким образом, в диссертации **были поставлены и решены следующие задачи:**

1. Вывести нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), описывающее радиальную моду в случае корональных петель.
2. Изучить свойства нелинейных коэффициентов НУШ.
3. Изучить и промоделировать модуляционную неустойчивость в случае плоской волны перенормированной по частоте (*частное решение НУШ*) и использовать её в первую очередь для качественного моделирования квазипериодических пульсаций (КПП).
4. Промоделировать различные нелинейные эффекты, такие как образование солитонов, солитоноподобных образований и т.п.

Актуальность научной работы

Квазипериодические пульсации (КПП) встречаются почти всегда во время солнечных вспышек. Экспериментальные данные показывают, что КПП могут показывать несколько периодов т.е., много-периодичность [114]. Существует много предложенных механизмов для генерации КПП с периодами более одной секунды, которые можно в общих чертах разделить на две категории, а именно механизмы загрузки/разгрузки и механизмы, основанные на МГД-волнах [62].

Механизмы загрузки/разгрузки — это циклические или квазипериодические физические процессы, влияющие на магнитное пересоединение, которое в своей

очереди модулирует энергосвободное во время солнечной вспышки. Существенной концепцией этих механизмов является так называемое магнитное капание.

Механизмы, основанные на МГД-волнах, интерпретируют наблюдаемые КПП как результат модуляции электромагнитного спектра МГД-волнами и в основном радиальной модой. Модуляция электромагнитного излучения радиальной модой является одним из популярных объяснений КПП [4, 38, 39, 63, 78, 86, 114].

В силу того, что для интерпретации КПП обычно используется линейная теория радиальной моды, в то время как такие пульсации в основном наблюдаются при вспышках, т.е. при высокоэнергетических процессах, становится ясно, что линейная теория не может в полной мере моделировать КПП [30, 32]. Таким образом, актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью развития нелинейной теории радиальной моды.

Цель научной работы

Целью диссертационной работы является исследование и моделирование нелинейной радиальной моды корональных магнитных петель с помощью уравнения НУШ. Для этого сначала выводится НУШ из уравнений идеальной магнитогидродинамики (МГД) с помощью метода различных масштабов с соответствующими граничными условиями и изучаются свойства нелинейных коэффициентов НУШ. Затем изучаются модуляционная неустойчивость системы, условия появления солитонов и солитоноподобных образований.

Научная новизна

1. Получено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды в однородной магнитной трубке для условий солнечной короны. Такое уравнение описывает множество нелинейных явлений, таких как модуляционная неустойчивость, образование солитонов, волновая турбулентность и т.д.

2. Обнаружена супернелинейность в случае радиальной моды корональных петель. Представлена вспомогательная функция, названная супернелинейной функцией Σ , с помощью которой можно определить область возникновения этого явления.
3. Изучена модуляционная неустойчивость в случае радиальной моды магнитной трубки и качественно промоделированы квазипериодические пульсации на основе модуляционной неустойчивости.
4. С помощью НУШ проведено моделирование таких явлений, как классические солитоны, солитоноподобные образования и солитон Перегринна.

Теоретическая и практическая значимость

Исследование направлено главным образом на изучение нелинейного поведения волн корональных петель, поэтому результаты нашей работы могут быть использованы в изучении таких нелинейных явлений, как образование солитонов в корональных петлях, самофокусировка, образование бризеров, фазовая самомодуляция, нелинейная волновая турбулентность, модуляционная неустойчивость и т.д.

Учитывая то обстоятельство, что в ближайшем будущем появятся новые телескопы наземного и космического базирования с разрешающей способностью порядка $\leq 0.1''$, с помощью которых можно будет наблюдать тонкую структуру короны, можно надеяться, что настоящая работа послужит основой для теоретического объяснения наблюдательных проявлений нелинейной радиальной моды в корональных структурах.

Результаты, выносимые на защиту

1. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды однородной магнитной трубки в условиях солнечной короны.
2. Свойства нелинейных коэффициентов полученного НУШ для радиальной моды и на основе этого, исследование появления супернелинейности.

3. Результаты изучения модуляционной неустойчивости в случае нелинейной радиальной моды для различных нелинейных параметров и амплитуд. Качественное моделирование квазипериодических пульсаций (КПП) в послевспышечных событиях на основе модуляционной неустойчивости.
4. Результаты численного моделирования ряда нелинейных эффектов, таких как образование солитонов (классический солитон и солитон Перегринна) и солитоноподобных образований.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена докладами и обсуждениями на семинарах, всероссийских конференциях. Результаты научной работы опубликованы в 10 публикациях, из которых 4 статьи опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК и индексируемых Scopus и WoS, а 6 – в сборниках трудов и материалов конференции.

Публикации по результатам работы в журналах, рекомендуемых ВАК:

1. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S., **Naga Varun Y.** Nonlinear radial oscillations of coronal loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2016. – Т. 56. – №. 8. – P. 1040-1044.
2. **Naga Varun Y.**, Mankaeva G. A., Mikhalyaev B. B. Fast Sausage Solitons and Super Nonlinearity in Coronal Loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2018. – Т. 58. – №. 7. – P. 947-952.
3. Mikhalyaev B. B., Mankaeva G. A., **Naga Varun Y.** Modulational Instability of Radial Oscillations of Coronal Loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2019. – Т. 59. – №. 8. – P. 1108-1113.
4. **Yelagandula Naga Varun.** Modulational Instability of Fast Sausage Mode as One of the Possible Mechanisms for Quasiperiodic Pulsations during Solar Flares //The Astrophysical Journal. – 2021. – Т. 923. – №. 2. – P. 131.

Публикации в сборниках материалов конференций:

1. Михалыев Б.Б., Рудерман М.С., **Нага Варун Е.** Нелинейная радиальная мода корональных петель // Сборник трудов XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015». – 2015. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.281-284.
2. **Нага Варун Е.** Модуляционная неустойчивость магнитозвуковых волн в однородной магнитной трубке в корональных условиях Солнца // Материалы конференции 22 Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных «ВНКСФ-22». – 2016, Ростов на Дону. – С.312-313.
3. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Fast sausage solitons in the coronal loops // Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017». – 2017. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.231-234.
4. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Nonlinear Schrödinger equation for the sausage mode in homogenous magnetic flux tubes // Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017» – 2017. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.235-238.
5. Михалыев Б. Б., **Нага Варун Е.**, Манкаева Г. А. Модуляционная неустойчивость радиальных колебаний корональных петель // Сборник трудов XXII Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2018» – 2018. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С. 291-294.
6. **Naga Varun Y.**, Solovev A. A., Mikhalyaev B. B. Observational evidence of a soliton like feature in the active region NOAA 8214 and its modeling using the nonlinear Schrödinger equation // Сборник трудов XXIV Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2020» – 2020. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.235-238.

**Основные результаты диссертационной работы докладывались на
следующих всероссийских и международных конференциях:**

1. XIX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015», 5-9 октября 2015 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2015.
2. Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных «ВНКСФ-22». – 2016, Ростов на Дону, Россия.
3. XXI Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2017”, Fast sausage soliton in the coronal loops. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2017-10-10.
4. XXI Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2017”, Нелинейное уравнение Шредингера для осесимметричных мод солнечных магнитных трубок. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2017.
5. BUKS2018 Workshop on "Waves and Instabilities in the Solar Atmosphere: Confronting the Current State-of-the Art", Nonlinear sausage mode of coronal loops. Tenerife, Spain, 2018.
6. XXII Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2018”, Нелинейные радиальные колебания солнечных корональных трубок. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2018.
7. XXIV Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2020”, Observational evidence of a soliton like feature in the active region NOAA 8214 and its modeling using the nonlinear Schrödinger equation. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2020.
8. XVI ежегодная конференция "Физика плазмы в солнечной системе", Modulational instability of fast sausage mode as one of the possible mechanisms for quasiperiodic pulsations during the solar flares. Москва, ИКИ РАН, 2021.
9. XXV Всероссийская ежегодная конференция “Солнечная и солнечно-земная физика-2021”, Fast sausage Peregrine solitons as one of the possible candidates for the nanoflares. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2021.

Личный вклад автора

Автор принимал участие в постановке задач, проведении теоретических расчетов, анализе и интерпретации результатов. При выводе нелинейного уравнения Шредингера, автор принимал участие проверяющего всех математических расчётов. Автором были созданы расчетные программы для вычисления нелинейных коэффициентов и моделирование нелинейных волн с помощью НУШ. В Главе 3 автором было обнаружена супернелинейность в случае радиальной моды корональных петель, и предложена вспомогательная функция для определения супернелинейности. В Главе 4 автором был предложен новый механизм для появления квазипериодических пульсаций во время солнечных вспышек на основе модуляционной неустойчивости. Определение задач исследования, обсуждение полученных результатов и подготовка статей к публикации проводилось совместно с научным руководителем и соавторами.

Структура и объем диссертации

Научная диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Результаты, списка литературы.

Научная работа разделена на следующие четыре главы:

1. В первой главе выводится дисперсионное уравнение для магнитозвуковых волн в рамках идеальной МГД. Глава является разбором классической работы Эдвина и Робертса 1983 г. по МГД-волнам в цилиндрической геометрии.
2. В второй главе уравнение НУШ выводится из идеальных уравнений магнитогидродинамики со соответствующими граничными условиями в пределе нулевой β плазмы.
3. Во третьей главе коэффициенты НУШ считаются численно и строятся графики зависимости этих коэффициентов. Обсуждается также новое явление, называемое супернелинейностью радиальной моды.

4. В четвёртой главе обсуждается модуляционная неустойчивость и с помощью НУШ моделируется нелинейное поведение радиальной моды. Изучаются квазипериодические пульсации и образование солитонов.

Общий объем диссертации составляет **104** страниц, включая **29** рисунков и **3** таблиц. Список литературы содержит **143** наименований. В **Результатах** представлены выводы по результатам научной работе.

Частично настоящая диссертационная работа выполнялась в рамках проекта РФФ 15-02-20001 «Исследования солнечной активности на основе данных наблюдений многоволновых синоптических комплексов», который был реализован в КалмГУ в 2015-2019 гг.

Глава 1

Линейная теория магнитозвуковых волн в однородной магнитной трубке

1.1 Введение

Настоящая глава представляет собой анализ классической работы Эдвина и Робертса 1983 г. по МГД-волнам в цилиндрической геометрии [16]. Мы рассматриваем трубку с однородным магнитным полем, которая часто используется для описания корональных, хромосферных и фотосферных петель Солнца. При динамическом равновесии внешнее давление, действующее на трубку, компенсируется внутренним магнитным давлением и давлением газа. Поскольку в условиях короны влияние гравитационной силы на распространение волны минимально, мы опускаем гравитационную силу в уравнении движения. В качестве первого приближения мы рассматриваем однородный профиль плотности как внутри, так и снаружи магнитной трубки. Позже мы линеаризуем идеальные МГД-уравнения, введя возмущения в скорости, давлении, плотности и магнитном поле и отсекая все члены возмущения порядка больше единицы. Линеаризованные уравнения вместе с решением для возмущений в виде плоской волны используются для получения уравнения Бесселя для радиальной составляющей возмущения полного давления. Затем решения этого уравнения вместе с граничными условиями используются для получения требуемых дисперсионных уравнений для поверхностных и объемных магнитозвуковых волн.

1.2 Уравнение для возмущения полного давления

Сначала рассмотрим следующие уравнения идеальной МГД:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \bar{B}) \times \bar{B}, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) P + \gamma P (\nabla \cdot \bar{V}) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{V} \times \bar{B}). \quad (1.2.4)$$

Теперь запишем физические переменные в уравнениях в следующем виде:

$$\bar{V} \equiv \tilde{V}; \rho \equiv \rho_0 + \tilde{\rho}; P \equiv P_0 + \tilde{P}; \bar{B} \equiv \bar{B}_0 + \tilde{B}.$$

Здесь ρ_0, P_0, \bar{B}_0 представляют собой значения при динамическом равновесии, а значения с тильдой - значения из-за возмущения. Позже мы используем стандартный метод линеаризации, который состоит в опускании членов возмущения с порядком больше единицы. После линеаризации получаем следующий набор линеаризованных уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \bar{B}) \times \bar{B}_0, \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\bar{V}) = 0, \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \gamma P_0 (\nabla \cdot \bar{V}) = 0, \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{V} \times \bar{B}_0). \quad (1.2.8)$$

Теперь перепишем эти уравнения в терминах соответствующих компонент в скалярной форме. Как было сказано ранее, мы выбираем цилиндрическую систему координат, поскольку она лучше всего подходит для описания корональных, хромосферных и фотосферных петель. В скалярной форме мы имеем следующую систему уравнений для (1.2.5) - (1.2.8).

Из уравнения (1.2.5) имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} B_0 \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (1.2.9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_\psi}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \psi} - \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \psi} - \frac{\partial B_\psi}{\partial z} \right), \quad (1.2.10)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}. \quad (1.2.11)$$

Из уравнения (1.2.6) имеем:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.2.12)$$

Из уравнения (1.2.7) имеем:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \gamma P_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.2.13)$$

Из уравнения (1.2.8) имеем:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad (1.2.14)$$

$$\frac{\partial B_\psi}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_\psi}{\partial z}, \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{B_0}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right). \quad (1.2.16)$$

Теперь рассмотрим возмущения вида $f(r, \psi, z, t) = f_r(r) e^{i(kz + m\psi - \omega t)}$. Подставляя такую форму решения возмущения в приведенные выше уравнения, мы получаем требуемые алгебраические уравнения следующим образом:

$$-i\omega v_r(r) \rho_0 = -\frac{\partial \tilde{P}(r)}{\partial r} + \frac{B_0}{\mu_0} \left(ik B_r(r) - \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \right), \quad (1.2.17)$$

$$-i\omega v_\psi(r) \rho_0 = -\frac{im}{r} \tilde{P}(r) - \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{im}{r} B_z(r) - ik B_\psi(r) \right), \quad (1.2.18)$$

$$-i\omega v_z(r) \rho_0 = -ik \tilde{P}(r), \quad (1.2.19)$$

$$-i\omega \tilde{\rho}(r) + \rho_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r(r) + \frac{im}{r} v_\psi(r) + ik v_z(r) \right) = 0, \quad (1.2.20)$$

$$-i\omega \tilde{P}(r) + \gamma P_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r(r) + \frac{im}{r} v_\psi(r) + ik v_z(r) \right) = 0, \quad (1.2.21)$$

$$-i\omega B_r(r) = ik B_0 v_r(r), \quad (1.2.22)$$

$$-i\omega B_\psi(r) = ik B_0 v_\psi(r), \quad (1.2.23)$$

$$-i\omega B_z(r) = -B_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r(r) + \frac{im}{r} v_\psi(r) \right). \quad (1.2.24)$$

Поскольку давление и плотность адиабатически связаны уравнением $P\rho^{-\gamma} = const$, уравнение (1.2.20) является избыточным. Поэтому при дальнейшем анализе мы можем опустить это уравнение.

Из уравнения (1.2.24) имеем:

$$i\omega \frac{B_z(r)}{B_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r(r) + \frac{im}{r} v_\psi. \quad (1.2.25)$$

Теперь из уравнения (1.2.21) с помощью уравнений (1.2.19) и (1.2.25) имеем:

$$-i\omega \tilde{P}(r) + \gamma P_0 \left(i\omega \frac{B_z(r)}{B_0} + \frac{ik^2}{\omega \rho_0} \tilde{P}(r) \right) = 0. \quad (1.2.26)$$

Вводя скорость звука, обозначенную как $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$, мы получаем указанное выше соотношение в следующем упрощенном виде:

$$B_z(r) = (\omega^2 - c_s^2 k^2) \left(\frac{B_0}{\rho_0 c_s^2 \omega^2} \right) \tilde{P}(r). \quad (1.2.27)$$

Далее уравнение (1.2.17) можно переписать следующим образом:

$$-i\omega \rho_0 v_r(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{P}(r) + \frac{B_0 B_z(r)}{\mu_0} \right) + \frac{ikB_0}{\mu_0} B_r(r).$$

Вводя новую переменную для возмущения полного давления, определяемого выражением

$$P_T = \tilde{P}(r) + \frac{B_0 B_z(r)}{\mu_0}, \quad (1.2.28)$$

получаем указанное выше соотношение как

$$-i\omega \rho_0 v_r(r) = -\frac{\partial P_T}{\partial r} + \frac{ikB_0}{\mu_0} B_r(r). \quad (1.2.29)$$

Используя уравнения (1.2.22) и (1.2.29), мы можем выразить компонент радиальной скорости $v_r(r)$ следующим образом:

$$v_r(r) = \frac{-i\omega}{\rho_0(\omega^2 - k^2 V_A^2)} \frac{\partial P_T}{\partial r}, \quad (1.2.30)$$

здесь $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$ является альвеновской скоростью.

Далее аналогичным образом выразим остальные переменные через полное давление P_T , ω и k .

Из уравнения (1.2.18) имеем:

$$-i\omega \rho_0 v_\psi(r) = -\frac{im}{r} \tilde{P}(r) - \frac{imB_0}{\mu_0 r} B_z(r) + \frac{ikB_0}{\mu_0} B_\psi(r).$$

Используя определение для полного давления и уравнение (1.2.23), мы преобразуем предыдущее уравнение следующим образом:

$$\omega \rho_0 v_\psi(r) = \frac{m}{r} P_T + \frac{k^2 \rho_0 V_A^2}{\omega} v_\psi(r).$$

Приведенное выше выражение можно легко упростить в следующую форму:

$$v_\psi(r) = \frac{m\omega}{r\rho_0(\omega^2 - k^2 V_A^2)} P_T. \quad (1.2.31)$$

Получив $v_r(r)$ и $v_\psi(r)$ в терминах P_T , можно переписать переменные $B_r(r)$, $B_\psi(r)$ и $B_z(r)$ следующим образом:

$$B_r(r) = -\frac{k}{\omega} B_0 \frac{-i\omega}{\rho_0(\omega^2 - k^2 V_A^2)} \frac{\partial P_T}{\partial r}, \quad (1.2.32)$$

$$B_\psi(r) = -\frac{k}{\omega} B_0 \frac{m\omega}{r\rho_0(\omega^2 - k^2 V_A^2)} P_T, \quad (1.2.33)$$

$$B_z(r) = -\frac{B_0}{\rho_0(\omega^2 - k^2 V_A^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P_T}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_T \right). \quad (1.2.34)$$

Далее надо вычислить $\tilde{P}(r)$, в терминах P_T , чтобы получить требуемое дифференциальное уравнение Бесселя, решения которого можно использовать для вычисления радиального члена в выражениях для каждой переменной.

Рассматривая уравнения (1.2.21) и (1.2.19) и используя явные выражения для $v_r(r)$ и $v_\psi(r)$ из уравнений (1.2.30) и (1.2.31), получаем

$$\tilde{P}(r) = \frac{-C_s^2 \omega^2}{(\omega^2 - k^2 V_A^2)(\omega^2 - k^2 C_s^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P_T}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_T \right). \quad (1.2.35)$$

Теперь имеются все выражения для получения дифференциального уравнения по P_T . Подставляя выражения для $\tilde{P}(r)$ и $B_z(r)$ через P_T в выражение (1.2.28) имеем следующее дифференциальное уравнение по P_T :

$$P_T = \frac{-C_s^2 \omega^2}{(\omega^2 - k^2 V_A^2)(\omega^2 - k^2 C_s^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P_T}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_T \right) - \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 (\omega^2 - k^2 V_A^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P_T}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_T \right).$$

Введя так называемую трубковую скорость, задаваемую $C_T = \sqrt{\frac{V_A^2 C_s^2}{C_s^2 + V_A^2}}$ и обозначая

$\lambda^2 = \frac{(\omega^2 - k^2 C_s^2)(\omega^2 - k^2 V_A^2)}{(C_s^2 + V_A^2)(\omega^2 - k^2 C_T^2)}$, мы можем записать вышеприведенное уравнение следующим

упрощённым образом:

$$r^2 \frac{\partial^2 P_T}{\partial r^2} + r \frac{\partial P_T}{\partial r} + (\lambda^2 r^2 - m^2) P_T = 0. \quad (1.2.36)$$

Вышеприведенное уравнение можно переписать, используя $\xi = \lambda r$ в форме уравнения Бесселя следующим образом:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 P_T}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial P_T}{\partial \xi} + (\xi^2 - m^2) P_T = 0 \quad (1.2.37)$$

1.3 Дисперсионное уравнение

Уравнение (1.2.37) имеет множество решений, и все зависит от знака члена λ^2 . Если $\lambda^2 > 0$, и учитывая, что m - целое число, решения даются $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$, где $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ - функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Если $\lambda^2 < 0$, то уравнение Бесселя преобразуется в так называемое модифицированное уравнение Бесселя, решения которого задаются функциями $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$. Эти функции изображены на рисунках 1.1-1.4 для различных значений m . Как видим, для $\lambda^2 > 0$ единственным физически применимым решением внутри трубки является $J_m(\xi)$, поскольку другое решение имеет сингулярность при $r = 0$. Такое решение описывает объемные волны. Если $\lambda^2 < 0$, то имеем $I_m(\xi)$ как физически правильное решение внутри трубки, и такое решение описывает поверхностные волны, так как значение функции возрастает от центра к поверхности магнитной трубки. С помощью обозначений $Z_m(\lambda_e r)$ и $Z'_m(\lambda_e r)$ для решения уравнения Бесселя и соответствующей ему производной, в случае захваченных волн в магнитной трубке с радиусом a необходимо, чтобы интегралы $\int_a^\infty \frac{2\pi r}{a^2} Z_m(\lambda_e r) dr$ и $\int_a^\infty \frac{2\pi r}{a^2} Z'_m(\lambda_e r) dr$ имели конечное значение, так как в противном случае волна стала бы незахваченной. При таком рассмотрении единственное физически применимое решение, удовлетворяющее критерию сходимости вышеупомянутых интегралов, дается выражением $K_m(\lambda_e r)$, которое представляет собой решение модифицированного

уравнения Бесселя, и отсюда следует, что вне трубки должна быть всегда $\lambda^2 < 0$ для захваченной волны. С учетом этих соображений мы имеем следующие решения для уравнения (1.2.37):

$$P_T = \begin{cases} A_i J_m(\lambda r) & \text{при } \lambda^2 > 0 \text{ и } r < a \\ A_i I_m(\lambda r) & \text{при } \lambda^2 < 0 \text{ и } r < a \\ A_e K_m(\lambda r) & \text{при } \lambda^2 < 0 \text{ и } r > a . \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Здесь A_i и A_e являются произвольными константами. Чтобы получить дисперсионное соотношение для магнитозвуковых мод, воспользуемся следующими граничными условиями:

$$v_{ri}(a) = v_{re}(a) , \quad (1.3.2)$$

$$P_{Ti}(a) = P_{Te}(a) , \quad (1.3.3)$$

где индексы i и e обозначают внутренние и внешние значения по отношению к трубке, а a – радиус трубки.

Первое выражение — это кинематическое уравнение, требующее того, чтобы радиальная составляющая скорости на границе была одинаковой с обеих сторон в непосредственной близости от границы, а второе граничное условие — это динамическое граничное условие, требующее, чтобы полное давление газовой и магнитной составляющих было одинаковым с обеих сторон в непосредственной близости от границы.

Далее, с учётом того, что $\lambda_i^2 > 0$ внутри трубки, имеем для радиальной компоненты скорости следующее выражение:

$$v_{ri}(r) = A_i \frac{-i\omega}{\rho_{0i}(\omega^2 - k^2 V_{Ai}^2)} J'_m(\lambda_i r) . \quad (1.3.4)$$

Вне трубки $\lambda_e^2 < 0$, и, следовательно, с учётом правильного физического решения для уравнения Бесселя (1.2.37) имеем следующее выражение для радиальной составляющей скорости:

$$v_{re}(r) = A_e \frac{-i\omega}{\rho_{0e}(\omega^2 - k^2 V_{Ae}^2)} K'_m(\lambda_e r) . \quad (1.3.5)$$

Аналогично для возмущения полного давления внутри и вне трубки имеем следующие выражения:

$$P_{Ti} = A_i J_m(\lambda_i r), \quad (1.3.6)$$

$$P_{Te} = A_e K_m(\lambda_e r). \quad (1.3.7)$$

Далее, применяя граничные условия, получаем следующие соотношения:

$$\frac{A_i \lambda_i}{\rho_{0i}(\omega^2 - k^2 V_{Ai}^2)} J'_m(\lambda_i a) = \frac{A_e \lambda_e}{\rho_{0e}(\omega^2 - k^2 V_{Ae}^2)} K'_m(\lambda_e a), \quad (1.3.8)$$

$$A_i J_m(\lambda_i a) = A_e K_m(\lambda_e a). \quad (1.3.9)$$

Вышеуказанные уравнения представляют собой систему однородных алгебраических линейных уравнений в терминах A_i и A_e для заданных ω и k . Таким образом, необходимое условие наличия нетривиального решения этой системы получается путём приравнивания определителя системы к нулю. Таким образом, получаем требуемое дисперсионное уравнение, которое в случае объемных волн определяется следующим соотношением:

$$\frac{\lambda_i \rho_{0e}(\omega^2 - k^2 V_{Ae}^2) J'_m(\lambda_i a)}{J_m(\lambda_i a)} = \frac{\lambda_e \rho_{0i}(\omega^2 - k^2 V_{Ai}^2) K'_m(\lambda_e a)}{K_m(\lambda_e a)}. \quad (1.3.10)$$

Аналогично для поверхностных волн имеем $\lambda_i^2 < 0$ и $\lambda_e^2 < 0$, и, соответственно, дисперсионное соотношение определяется следующим выражением:

$$\frac{\lambda_i \rho_{0e}(\omega^2 - k^2 V_{Ae}^2) I'_m(\lambda_i a)}{I_m(\lambda_i a)} = \frac{\lambda_e \rho_{0i}(\omega^2 - k^2 V_{Ai}^2) K'_m(\lambda_e a)}{K_m(\lambda_e a)}. \quad (1.3.11)$$

Если $m = 0$, имеем так называемую осесимметричную моду, которая в русскоязычной литературе упрощённо называется радиальной модой и в англоязычной литературе называется “*the sausage mode*” из-за его сходства с сосисками или колбасой. Если $m = 1$, имеем так называемую изгибающую моду (в английском языке “*the kink mode*”). Для $m = 2, 3 \dots$ и т.д. они называются баллонными модами (в английском языке “*the fluting mode*”) из-за их сходства с гофрированной поверхностью. Эти моды изображены на рисунках 1.5-1.8. Для фотосферы обычно справедливо условие $V_{Ai} > C_e > C_i > C_{Ti} > V_{Ae} > C_{Te}$, тогда как в короне как правило $V_{Ae} > V_{Ai} > C_i > C_{Ti} > C_e > C_{Te}$. Дисперсионные кривые для объёмных и поверхностных

мод для $m = 0$ и $m = 1$ изображены на рисунках 1.9 и 1.10 для фотосферного и хромосферного случаев соответственно. Эти кривые были получены Эдвином и Робертсом в 1983 году [16], и было показано, что в случае фотосферных трубок поверхностные волны соответствуют быстрым магнитозвуковым волнам, тогда как объемные волны соответствуют медленным магнитозвуковым волнам, и далее в случае хромосферных и корональных магнитных трубок присутствуют только быстрые и медленные объемные МГД-волны и нет поверхностных мод. Также необходимо отметить, что в корональном случае медленные объемные волны демонстрируют чрезвычайно слабую дисперсию и для всех практических целей могут считаться недисперсионными модами. Все эти моды могут образовывать стоячие волны в замкнутой корональной петле из-за связывания магнитных линий в точках основания хромосферы, которые действуют как стены или границы и отражают МГД-волны обратно. Поскольку наше исследование связано с нелинейной радиальной модой в короне, мы переходим к краткому обсуждению линейной радиальной моды в короне.

Рисунок 1.10 показывает, что радиальная мода имеет высокую дисперсию в длинноволновой области и в отличие от изгибной моды имеет критическое волновое число, или волновое число отсечки, даже для основной моды. В короне $V_{Ae} > V_{Ai}$, и фазовая скорость для незатухающих мод должна находиться между этими двумя значениями. В верхней части кривых дисперсии, изображенных на рисунке 1.10, заметно наличие изгиба, который является причиной минимума в групповой скорости этих мод. Фазовая скорость радиальной моды для больших длин волн стремится к внешней альвеновской скорости, тогда как для малых длин волн она стремится к внутренней альвеновской скорости. На рисунке 1.10 также видно, что существует минимальное волновое число, соответствующее основной моде, ниже которого нет никаких радиальных мод. Волновое число отсечки определяется следующим выражением [5]:

$$k_c = \left[\frac{(C_s^2 + V_{Ai}^2)(V_{Ae}^2 - C_T^2)}{(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)(V_{Ae}^2 - C_s^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_{0,s}}{a} \right), \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.3.12)$$

здесь $j_{0,s}$ представляет нулей функции Бесселя J_0 . Это выражение может быть дополнительно упрощено с учетом $\beta \ll 1$ в короне, что означает $\{V_{Ae}, V_{Ai}\} \gg \{C_e, C_T\}$. Кроме того, поскольку давление газа невелико по сравнению с магнитным давлением, имеем $B_{0i} \approx B_{0e}$, а соотношение внутренней и внешней альвеновских скоростей становится $\sqrt{\frac{\rho_{0i}}{\rho_{0e}}}$. С учетом этих соображений мы получаем, как обсуждалось в книге Ашвандена [5], следующее выражение для критического волнового числа:

$$K_c = \left[\frac{1}{\frac{\rho_{0i}^2}{\rho_{0e}^2} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_{0,s}}{a} \right), \quad (1.3.13)$$

Для типичной корональной петли можно предполагать $\frac{\rho_{0i}}{\rho_{0e}} \approx 0.1$ и с этими допущениями можно показать, что диапазон безразмерного критического волнового числа $k_c a$ составляет $0.8 \leq k_c a \leq 2.4$. Но для большинства тонких петель отношение ширины к длине находится в диапазоне 0.04–0.08 [5]. Это говорит о том, что в тонких петлях режим радиальной стационарной моды полностью подавлен. Это соотношение указывает на то, что для существования стационарной радиальной моды корональные петли должны быть короткими и толстыми или иметь очень большие отношения внутренней и внешней плотностей плазмы, и такие большие отношения плотности обычно наблюдаются во вспышечных петлях. Однако такое ограничение существует только для стационарных волн, когда волны осциллируют между точками основания в хромосфере. Радиальная мода в корональных петлях, возникающая в открытых магнитных конфигурациях, таких как в корональных дырах, не имеет такого ограничения. Критерий отношения длины петли к ширине также, может быть, получен для плотных петель и определяется выражением:

$$\frac{l}{w} < 0.6545 \sqrt{\frac{\rho_{0i}}{\rho_{0e}}}. \quad (1.3.14)$$

Радиальная мода в короне обычно используется для интерпретации периодичностей в модуляции наблюдаемых излучений электромагнитного спектра от радио до рентгена. Поскольку радиальная мода изменяет плотность в первом приближении, в отличие от изгибной моды, она может модулировать гиротронное излучение, так как модулирование зависит от плотности электронов, как показано Розенбергом [86]. Это делает радиальную моду особенно важной при интерпретации таких явлений как квазипериодические пульсации (КПП). Так как для существования этой моды требуются большие отношения внутренней к внешней плотности, такие явления обычно наблюдаются во время вспышечных процессов.

Поскольку настоящая диссертация связана с исследованием радиальной моды в короне, мы обсуждаем математическое расширение линейной теории, т.е. в следующей главе мы переходим к выводу нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для описания нелинейной радиальной моды с кубической нелинейностью. Мы начали с линейной теории, потому что дисперсионное соотношение линейной радиальной моды многократно используется при выводе НУШ, а линеаризованное решение для радиальной моды используется для получения решений во втором и третьем порядках нелинейностей.

Необходимость введения нелинейной теории основана на том факте, что большинство природных явлений действительно нелинейны [6]. Только из-за математической простоты и преимущества принципа суперпозиции мы обычно ограничиваемся теми случаями, когда амплитуда волновых мод настолько мала, что можно пренебречь нелинейностью. Но, как мы уже упоминали, радиальная мода проявляется в основном во время вспышек, а вспышки являются высокоэнергетическими процессами, поэтому странно было бы предполагать, что амплитуда волновых мод мала, и, логично, нелинейная теория такой моды становится совершенно необходимой для новых и более точных интерпретаций множества наблюдаемых явлений.

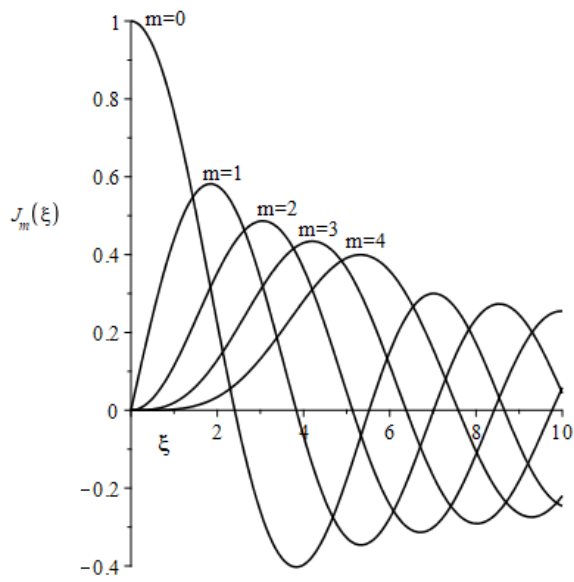


Рис 1.1 Функция Бесселя J

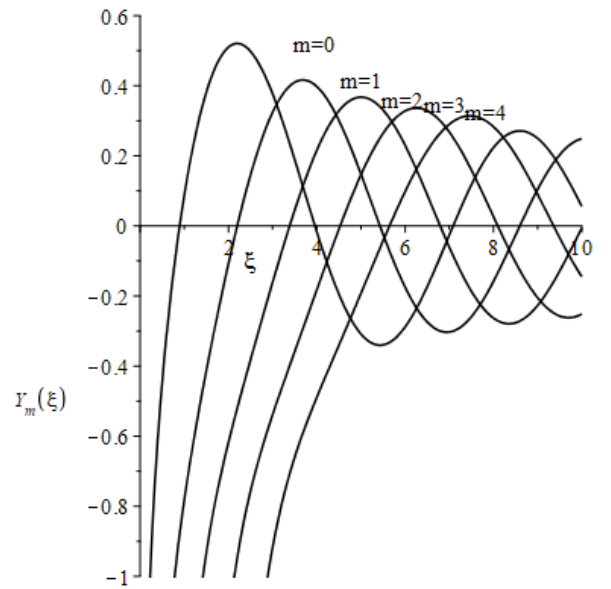


Рис 1.2 Функция Бесселя Y

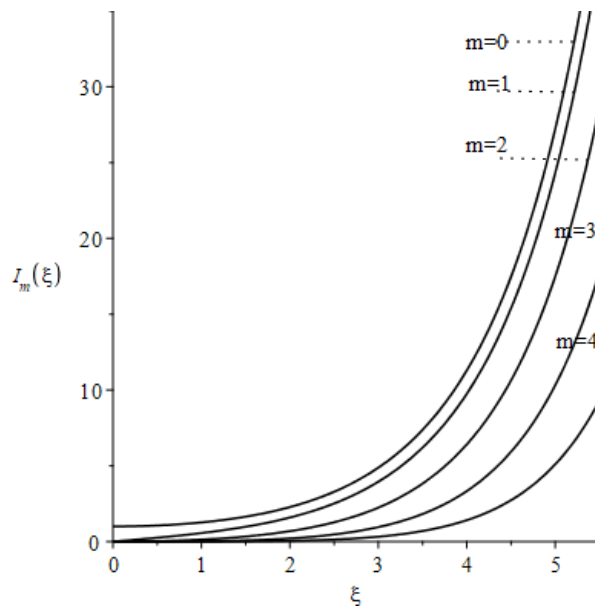


Рис 1.3 Функция Бесселя I

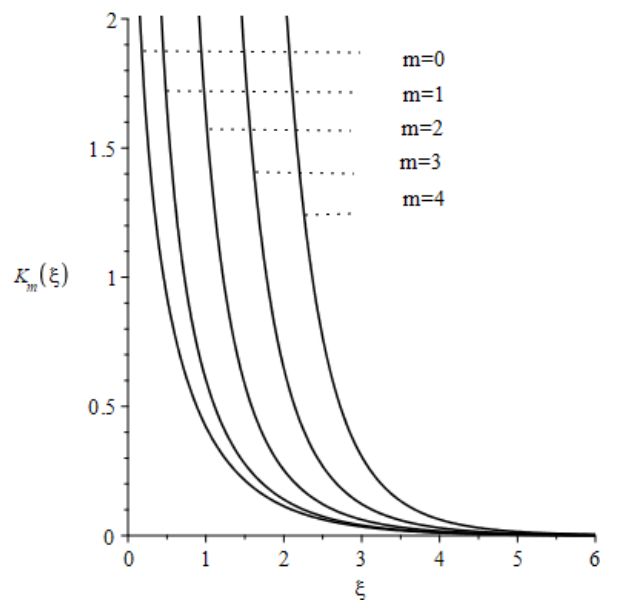


Рис 1.4 Функция Бесселя K

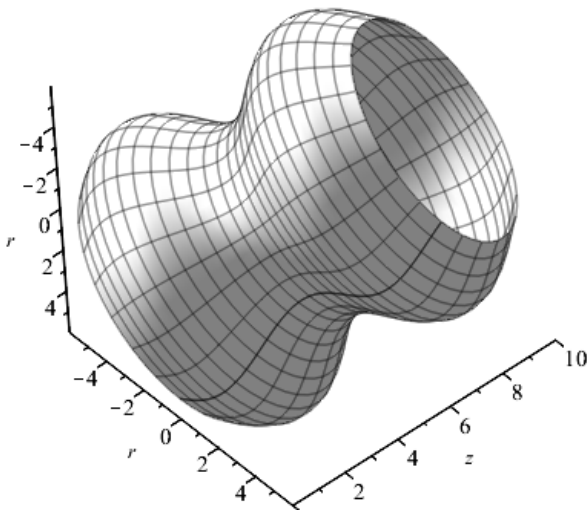


Рис 1.5. Радиальная мода $m = 0$

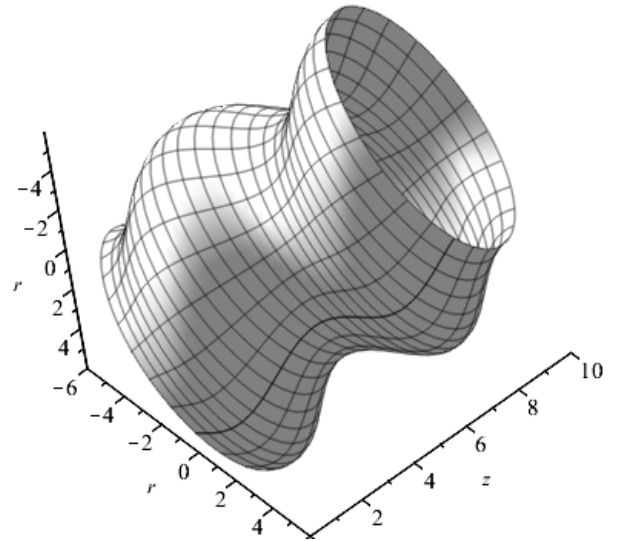


Рис 1.6. Изгибная мода $m = 1$

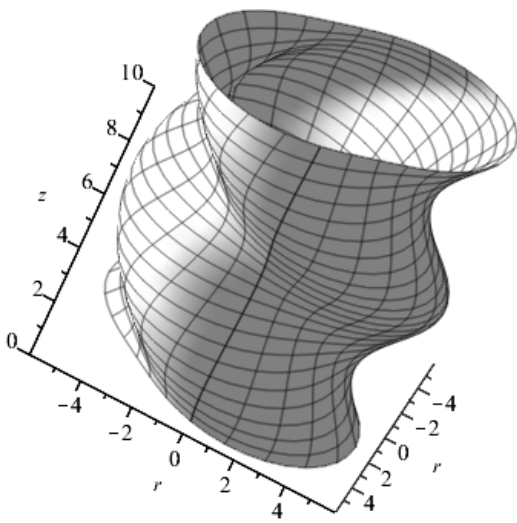


Рис 1.7. Баллонная мода для $m = 2$

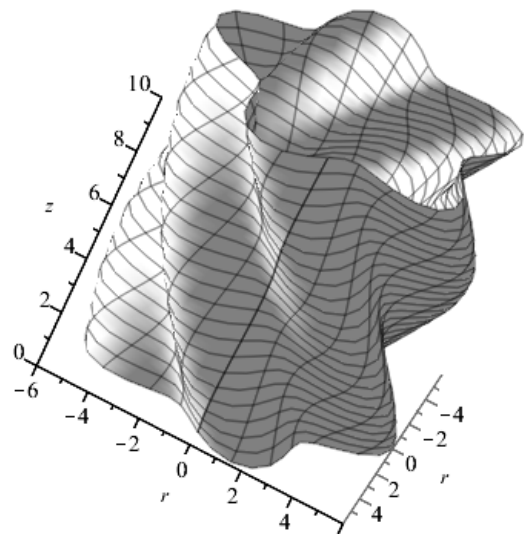


Рис 1.8. Баллонная мода для $m = 5$

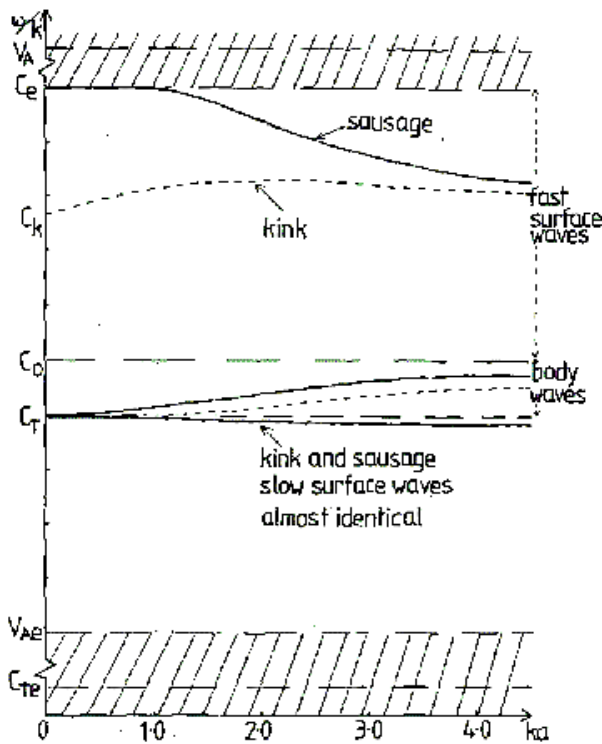


Рис 1.9. Зависимость фазовой скорости первых двух линейных магнитозвуковых мод в магнитной трубке от безразмерного волнового числа при фотосферных условиях. В данном случае Эдвином и Робертсом были выбраны значения $V_{Ai} = 2C_{si}$, $C_{se} = 1.5C_{si}$ и $V_{Ae} = 0.5C_{si}$.

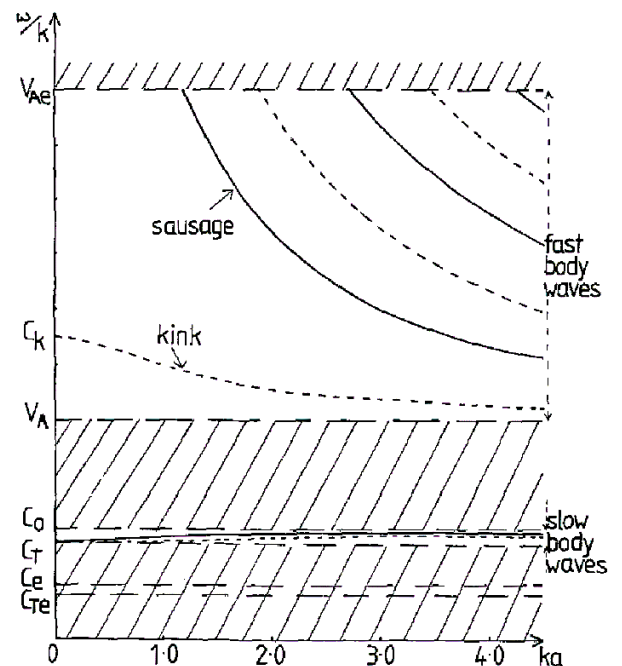


Рис 1.10. Зависимость фазовой скорости первых двух линейных магнитозвуковых мод в магнитной трубке от безразмерного волнового числа при хромосферных и корональных условиях. В данном случае Эдвином и Робертсом были выбраны значения $V_{Ae} = 5C_{si}$, $C_{se} = 0.5C_{si}$ и $V_{Ai} = 2C_{si}$.

Рисунки 1.9 и 1.10 были представлены в работе Эдвина и Робертса [16, 78], где авторами были использованы обозначения V_A , C_0 , C_e , C_T для V_{Ai} , C_{si} , C_{se} , C_{Ti} соответственно. Заштрихованной областью обозначены те места, где магнитозвуковые моды являются вытекающими из магнитной трубки. Как ранее упоминалось, “*kink mode*” и “*sausage mode*” означают изгибную и радиальную моды соответственно. Стоит отметить, что в Рис 1.10 авторами было выбрано $\beta < 1$ для того, чтобы в общем смысле показать дисперсию в хромосфере и короне, но для большинства случаев начиная с высших слоев хромосферы и далее короны можно использовать приближение $\beta \approx 0$ для математической простоты и в таком приближении медленная объёмная мода отсутствует.

Глава 2

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для радиальной моды корональных петель

2.1 Введение

В первой главе показано что, радиальная мода корональных петель является высокодисперсионной вблизи точки отсечки. В случае средней амплитуды волн с сильной дисперсией основным нелинейным эффектом является волновая модуляция, описываемая нелинейным уравнением Шредингера (НУШ).

НУШ – это универсальное нелинейное уравнение, моделирующее нелинейное поведение волны в приближении огибающей. Такое уравнение с кубической нелинейностью описывает четырёхволновое рассеяние, при котором первичная линейная несущая волна или волна накачки и три фазовых волн в окрестностях несущей волны взаимодействуют между собой, и таким образом НУШ описывает квазимонохроматическую волну в приближении огибающей. Подробный анализ НУШ можно найти во многих специализированных текстах по нелинейной теории волн [19, 106].

Целью данной главы является получение НУШ для радиальной моды в однородной магнитной трубке при $\beta \approx 0$ или в других словах в приближении малой плазменной бета, то есть при корональных условиях. Для этого мы используем метод, применяемый Заболоцкой и Шварцбургом [129, 130] для акустических волноводов.

Глава организована следующим образом: в разделе 2.2 выведены основные исходные уравнения и граничные условия. В разделе 2.3 упоминается линейная теория радиальной моды магнитной трубки при корональных условиях. В разделе 2.4 получено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды.

2.2 Исходные уравнения и граничные условия

Мы рассматриваем однородную магнитную трубку в динамическом равновесии. Равновесным магнитным полем является $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{n}$, где B_0 – постоянная, а \mathbf{n} – единичный вектор, параллельный оси трубки. Плотность при равновесии ρ_0 постоянна внутри и снаружи трубки. Следовательно, в цилиндрических координатах (r, φ, z) с осью Z , совпадающей с осью трубки, плотность и магнитное напряжение определяются формулами

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_{0i}, & r < a \\ \rho_{0e}, & r > a \end{cases} \quad \text{и} \quad B_0 = \begin{cases} B_{0i}, & r < a \\ B_{0e}, & r > a, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где a – радиус трубки, а индексы i и e указывают на внутренние и внешние значения параметров. Для описания движения плазмы мы используем следующие идеальные МГД-уравнения в приближении нулевого β :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.2.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{\mu_0 \bar{\rho}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2.2.2b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{B}. \quad (2.2.2c)$$

Здесь скорость плазмы $\mathbf{V} = (V_r, V_\varphi, V_z)$, магнитное поле $\mathbf{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$, плотность плазмы $\bar{\rho}$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Теперь введем возмущение плотности плазмы и возмущение магнитного поля следующим образом:

$$\tilde{\rho} = \bar{\rho} - \rho_0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 \quad (2.2.3)$$

Для упрощения математических обозначений мы используем следующие безразмерные переменные:

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{V_A}, \quad \mathbf{b} = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{|\mathbf{B}_0|}, \quad (2.2.4)$$

где $V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ – альвеновская скорость, и, переписывая систему уравнений (2.2.2) в цилиндрических координатах, при этом сохраняя члены квадратичной и кубической нелинейностей, и учитывая, что для радиальной моды все эти

переменные не зависят от азимутальной координаты φ , мы получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{V_A} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r}{\partial r} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}, \quad (2.2.5a)$$

$$\frac{1}{V_A} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{\partial b_r}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial r} = (1 - \rho)(b_z - \rho) \left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r} \right) - v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad (2.2.5b)$$

$$\frac{1}{V_A} \frac{\partial v_z}{\partial t} = (1 - \rho) b_r \left(\frac{\partial b_z}{\partial r} - \frac{\partial b_r}{\partial z} \right) - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (2.2.5c)$$

$$\frac{1}{V_A} \frac{\partial b_r}{\partial t} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} (v_z b_r - v_r b_z), \quad (2.2.5d)$$

$$\frac{1}{V_A} \frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_z b_r - v_r b_z), \quad (2.2.5e)$$

здесь v_r , v_z , b_r , b_z являются компонентами безразмерных переменных (2.2.4).

Из уравнения (2.2.5c) видно, что v_z имеет второй порядок по величине. Теперь, чтобы получить дифференциальное уравнение через радиальную компоненту скорости v_r , сначала нужно выразить компоненты магнитной индукции, плотности и компоненты скорости вдоль направления оси Z через v_r . В качестве первого шага для этого мы начнем с уравнения (2.2.5e). Здесь в качестве аппроксимации первого порядка мы выражаем b_z через v_r , пренебрегая правыми членами, потому что правые члены имеют второй и более высокий порядок. Чтобы получить приближение второго порядка для b_z , мы подставляем аппроксимацию первого порядка b_z в правую часть. Процесс может быть бесконечно продолжен для того, чтобы получить b_z до любой степени точности в терминах v_r , если последовательный ряд сходится. Здесь мы исходим из предположения, что ряд сходится или является асимптотическим. Полученное выражение b_z до второго порядка подставляется в уравнение (2.2.5d), а также получается соответствующее выражение для b_r . Этот метод, который можно назвать последовательным самосогласованным приближением, применяется для остальных членов, чтобы, наконец, выразить каждый член через v_r .

Таким образом, мы получим для ρ , v_r , v_z , b_r , b_z следующие выражения, которые зависят только от v_r и его производных:

$$\rho = V_A^2 I \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) - \frac{V_A}{r} I \frac{\partial r v_r}{\partial r} + V_A^4 I^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + O(\epsilon^3), \quad (2.2.6a)$$

$$v_z = -V_A^3 I \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + O(\epsilon^3), \quad (2.2.6b)$$

$$b_r = V_A I \frac{\partial v_r}{\partial z} - V_A^2 I \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_r}{r} I \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.2.6c)$$

$$\begin{aligned} b_z = & -\frac{V_A}{r} I \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{V_A^2}{r} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) \\ & - \frac{V_A^3}{r} I \frac{\partial}{\partial r} r \left[V_A^2 \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + \frac{v_r}{r} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) \right] \\ & + O(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (2.2.6d)$$

где $I = \int dt$ – интеграл по времени, $\Delta_2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}$ и ∇ является дифференциальным оператором набла в цилиндрических координатах, а $\epsilon \sim \frac{|\tilde{\rho}|}{|\rho_0|} \sim \frac{|V|}{|V_A|} \sim \frac{|\tilde{B}|}{|B_0|} \ll 1$ является безразмерным параметром, степень которого выражает порядок нелинейности.

Теперь дифференциальное уравнение для радиальной компоненты v_r получается путем дифференцирования уравнения (2.2.5b) по времени t , а затем подставляются выражения для b_r , b_z , ρ и v_z из (2.2.6). Аналогично мы выражаем $\frac{\partial v_r}{\partial t}$ в терминах пространственных производных v_r и собираем все пространственные производные в правой части для того, чтобы получить уравнение в частных производных второго порядка, выраженное только через v_r следующим образом:

$$\frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} - \Delta_2 v_r = N_2(v_r) + N_3(v_r) + O(\epsilon^4), \quad (2.2.7)$$

где $N_2(v_r)$ и $N_3(v_r)$ содержат квадратичные и кубические члены соответственно. Они выражаются следующим образом:

$$N_2(v_r) = -V_A \Delta_2 \left(\frac{v_r}{r} I \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} \right) - V_A \frac{\partial}{\partial r} (v_r I \Delta_2 v_r), \quad (2.2.8a)$$

$$\begin{aligned}
N_3(v_r) = & V_A^2 \Delta_2 \left[V_A^2 \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + \frac{v_r}{r} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} \right) \right] \\
& + V_A^4 \left\{ \left[I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \right] \frac{\partial}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial z} I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \right] \right\} I \Delta_2 v_r \\
& - V_A^4 (\Delta_2 v_r) I^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + V_A^2 \frac{\partial v_r}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + V_A^2 v_r I \Delta_2 \left(\frac{v_r}{r} I \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} \right) \right]. \tag{2.2.8b}
\end{aligned}$$

Выражение (2.2.7) является нашим исходным уравнением для получения НУШ.

Для решения уравнения (2.2.7) требуются дополнительные условия, которые называются граничными условиями. Для этого сначала определим возмущенную границу как $r = a(1 + \eta(t, z))$, где a – радиус, а $\eta(t, z)$ – функция радиальных возмущений, независимая от φ .

Теперь сформулируем два граничных условия, называемых кинематическим и динамическим граничными условиями. Они описываются следующим образом:

$$V_r = a \frac{\partial \eta}{\partial t} + a \mathbf{V} \cdot \nabla \eta \text{ при } r = a(1 + \eta(t, z)); \tag{2.2.9a}$$

$$\mathbf{B}_i^2 = \mathbf{B}_e^2 \text{ при } r = a(1 + \eta(t, z)). \tag{2.2.9b}$$

Индексы i и e указывают на то, что физическая величина оценивается внутри и вне трубки соответственно.

Эти граничные условия в терминах безразмерных физических величин, описываемых уравнениями (2.2.4), принимают следующий вид:

$$\frac{v_r}{a} = \frac{1}{V_A} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \text{ при } r = a(1 + \eta(t, z)); \tag{2.2.10a}$$

$$\mathbf{b}_i \cdot (2\mathbf{n} + \mathbf{b}_i) = \mathbf{b}_e \cdot (2\mathbf{n} + \mathbf{b}_e) \text{ при } r = a(1 + \eta(t, z)). \tag{2.2.10b}$$

Теперь опишем скачок функции вдоль границы выражением:

$$\llbracket f(r) \rrbracket = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [f(a + a\eta + \varepsilon) - f(a + a\eta - \varepsilon)].$$

Двойные скобки тут означают скачок аргумента в виде функции, и с таким обозначением имеем следующую упрощенную версию граничных условий:

$$\frac{v_r}{a} = \frac{1}{V_A} \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z} \text{ при } r = a(1 + \eta); \tag{2.2.11a}$$

$$[[2b_z + b_r^2 + b_z^2]] = 0 \text{ при } r = a(1 + \eta). \quad (2.2.11b)$$

Теперь мы используем уравнение (2.2.10а) для v_r и применяем метод последовательного самосогласованного приближения для того, чтобы получить η через v_r до точности второго порядка. Полученное выражение для η будет следующим:

$$\eta = \frac{V_A}{a} I v_r + \frac{V_A^2}{a} I \frac{\partial v_r}{\partial r} I v_r + O(\epsilon^2). \quad (2.2.12)$$

Подставляя значение η из (2.2.12) в (2.2.11а) и (2.2.11b) и подставляя значения b_z , b_r и v_z из уравнений (2.2.6) и далее выражая $v_{r=a(1+\eta)}$ в терминах $v_{r=a}$ с помощью ряда Тейлора, имеем следующие кинематические и динамические граничные условия, выраженные только через v_r :

$$\left[\left[V_A v_r + V_A^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} I v_r + V_A^3 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} I \frac{\partial v_r}{\partial r} I v_r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} (I v_r)^2 \right) + V_A^5 \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r \right] \right] = O(\epsilon^4), \quad (2.2.13a)$$

$$\left[\left[\left[\frac{2V_A}{a} I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} - V_A^2 \left(I \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 - \frac{V_A^2}{a^2} \left(I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{2V_A^2}{a} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{2V_A^2}{a} I (I v_r) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{V_A^3}{a} \left\{ I (I v_r)^2 \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + 2I \left(I \frac{\partial v_r}{\partial r} I v_r \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2I \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} I v_r \right) I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2I \frac{\partial v_r}{\partial r} I \left((I v_r) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - 2I \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} I v_r \right) I \frac{\partial^2 r v_r}{\partial r^2} - 2I v_r I \left((I v_r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) \left(a I \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} I v_r - I \frac{\partial}{\partial z} v_r I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2I \frac{\partial}{\partial r} r \left[V_A^2 \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_r + \frac{v_r}{a} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_r I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{2}{a} \left(I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \left(I (I v_r) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} - I \frac{\partial}{\partial r} v_r I \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) \right\} \right] \right] = O(\epsilon^4). \quad (2.2.13b)$$

Все величины в этих уравнениях оцениваются при $r = a$.

2.3 Линейная радиальная мода в короне

В первой главе мы выводили обобщённое дисперсионное соотношение для магнитозвуковых мод в цилиндрической геометрии в рамках идеальной МГД. Дисперсионное соотношение и выражение для радиальной моды ($m = 0$) в корональном случае получаются из обобщённого дисперсионного соотношения

путём замены $C_s = 0$ и $C_T = 0$, так как в короне плазменный параметр $\beta \ll 1$ и звуковая скорость и трубная скорость намного меньше альвеновской скорости. Таким образом, уравнение возмущения для полного давления P_T выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 P_T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_T}{\partial r} + \lambda^2 P_T = 0, \quad \lambda^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2}. \quad (2.3.1)$$

Как и в первой главе, решение для радиальной моды мы ищем в виде плоской волны $v_r = v_{1r}(r) \exp(ikz - i\omega t)$ и получаем аналогичное уравнение Бесселя для v_{1r} :

$$\frac{d^2 v_{1r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{1r}}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) v_{1r} = 0, \quad \lambda^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2}. \quad (2.3.2a)$$

$$\text{Здесь } v_{1r} = A \Lambda(r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.3.2b)$$

$$\text{где } \Lambda(r) = \begin{cases} J_1(r|\lambda_i|), & r < a \\ \frac{V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{V_{Ae} K_1(a\lambda_e)} K_1(r\lambda_e), & r > a. \end{cases}$$

В выражении (2.3.2b), A является произвольной постоянной, обозначающей амплитуду радиальной моды в линейном приближении. Также дисперсионное соотношение в корональном случае для радиальной моды получается после вышеуказанных замен из уравнения (1.47):

$$\frac{J_1(|\lambda_i|a)}{|\lambda_i| J_0(a|\lambda_i|)} + \frac{K_1(a\lambda_e)}{\lambda_e K_0(a\lambda_e)} = 0. \quad (2.3.3)$$

Как говорилось в первой главе, при $\lambda^2 < 0$ уравнение (2.3.1) сводится к обычному уравнению Бесселя, а при $\lambda^2 > 0$ оно принимает вид модифицированного уравнения Бесселя. Как обсуждалось в первой главе, для захваченных волн рассматривается условие $\lambda_e^2 > 0$. Следовательно, мы имеем обычную функцию Бесселя $J_1(\lambda_i r)$, описывающую волну внутри магнитной трубки и модифицированную функцию Бесселя $K_1(\lambda_e r)$, описывающую волну вне магнитной трубки.

2.4 Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

В предыдущих разделах мы выводили все необходимые уравнения для того, чтобы вывести нелинейное уравнение Шредингера. Далее мы используем метод различных масштабов [94]. Этот метод требует ведения двух новых масштабирующих пространственных переменных и двух новых масштабирующих временных переменных:

$$Z_1 = \epsilon z, T_1 = \epsilon t, Z_2 = \epsilon^2 z, T_2 = \epsilon^2 t, \quad (2.4.1)$$

где $\epsilon \ll 1$.

Теперь мы ищем решение для (2.2.7) с соответствующими граничными условиями в виде

$$v_r = \epsilon v_{1r} + \epsilon^2 v_{2r} + \epsilon^3 v_{3r} + c.c. \quad (2.4.2)$$

$$\text{Здесь } v_{1r} = A(Z_1, T_1, Z_2, T_2) \Lambda(r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.4.3)$$

$$\Lambda(r) = \begin{cases} J_1(r|\lambda_i|), & r < a \\ \frac{V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{V_{Ae} K_1(a\lambda_e)} K_1(r\lambda_e), & r > a. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Здесь амплитуда $A(Z_1, T_1, Z_2, T_2)$ является медленно меняющейся функцией и описывает огибающую для четырёхволнового взаимодействия, а v_{2r} и v_{3r} зависят от r, z, t, Z_1, T_1, Z_2 и T_2 . В выражении (2.4.2) $c.c.$ представляет собой комплексно-сопряжённую функцию. В соответствии с этим мы имеем следующие аналогичные выражения для временных и пространственных операторов с частными производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}, \quad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Z_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial Z_2}. \quad (2.4.6)$$

Аналогично после некоторой операторной арифметики мы имеем следующий оператор для $I = \int dt$:

$$I \equiv I - \epsilon I^2 \frac{\partial}{\partial T_1} - \epsilon^2 \left(I^2 \frac{\partial}{\partial T_2} - I^3 \frac{\partial}{\partial T_1^2} \right). \quad (2.4.7)$$

Теперь подставим выражение для v_r из (2.4.2) в уравнение (2.2.7) и используем масштабированные операторы, заданные в (2.4.5), (2.4.6) и (2.4.7) для дифференцирования и интегрирования. Затем по обе стороны собираем члены, соответствующие одному и тому же порядку ϵ . Таким образом, мы получаем уравнения для первого, второго и третьего порядков v_r , которые пропорциональны ϵ , ϵ^2 , и ϵ^3 соответственно. Здесь члены, пропорциональные ϵ , описывают линейризованное приближение, уравнение которого задается формулой (2.3.2), а решение (2.3.2b) описывает радиальную составляющую в линейризованном приближении.

I. Приближение второго порядка

Во втором приближении мы собираем члены, пропорциональные ϵ^2 , по обе стороны в уравнении (2.2.8). В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2 \right) v_{2r} &= 2i \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \Lambda(r) e^{i(kz-\omega t)} - \Delta_2 \left(v_{1r} V_A I \frac{1}{r} \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} V_A I \Delta_2 v_{1r} + c. c. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Рассмотрим решение (2.4.8) в следующем виде:

$$v_{2r} = Y(r, T_1, T_2, Z_1, Z_2) e^{i(kz-\omega t)} + \frac{iV_A}{\omega} A^2 \Phi(r) e^{2i(kz-\omega t)} + c. c., \quad (2.4.9)$$

где $Y(r, T_1, T_2, Z_1, Z_2)$ и $\Phi(r)$ – произвольные функции. В дальнейшем их надо определить.

Подставляя v_{2r} из уравнения (2.4.9) в (2.4.8), имеем следующие два дифференциальных уравнения для $Y(r, T_1, T_2, Z_1, Z_2)$ и $\Phi(r)$:

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right) Y = -2i \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \Lambda, \quad (2.4.10)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \left(\frac{4\omega^2}{V_A^2} - 4k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi = g_1(r), \quad (2.4.11)$$

$$\text{где } g_1(r) = \Delta_{2k} \left(\frac{\Lambda}{r} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \right) + \frac{d}{dr} (\Lambda \Delta_k \Lambda), \quad (2.4.12)$$

$$\text{здесь } \Delta_k = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k^2.$$

Выражение для Δ_{2k} получается путем подстановки $2k$ вместо k в выражение для Δ_k . Удобно искать решение для уравнения (2.4.10) в виде

$$Y(r, T_1, T_2, Z_1, Z_2) = -2i \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) Y^*(r). \quad (2.4.13)$$

Тогда для $Y^*(r)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 Y^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY^*}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right) Y^* = \Lambda. \quad (2.4.14)$$

Соответствующие граничные условия в приближении второго порядка получаются подстановкой выражения для v_r из (2.4.2) в (2.2.13), а затем собирая соответствующие члены, пропорциональные ϵ^2 . Таим образом, мы имеем следующие кинематическое и динамическое граничные условия при $r = a$:

$$\llbracket V_A v_{2r} \rrbracket = 0, \quad (2.4.15a)$$

$$\llbracket V_A \left(I \frac{\partial r v_{2r}}{\partial r} - \frac{a}{2} \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right)^2 - I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_{1r} I \frac{\partial (r v_{1r})}{\partial r} \right) + I (I v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) \rrbracket = 0. \quad (2.4.15b)$$

Подставляя теперь уравнение (2.4.9) в граничные условия (2.4.15) и собирая члены, пропорциональные первой и второй гармоникам, имеем следующие граничные условия при $r = a$ для функций $Y^*(r)$ и $\Phi(r)$:

$$\llbracket \left(\frac{\omega}{V_A} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_A \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) Y^*(r) \rrbracket = 0, \quad (2.4.16a)$$

$$\llbracket \left(\frac{\omega}{V_A} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_A \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \frac{dr Y^*}{dr} \rrbracket = 0, \quad (2.4.16b)$$

$$\llbracket V_A^2 \Phi \rrbracket = 0, \quad (2.4.17a)$$

$$\llbracket V_A^2 \frac{dr \Phi}{dr} \rrbracket = 0. \quad (2.4.17b)$$

При получении граничных условий (2.4.17) мы воспользовались тождеством

$$\llbracket V_A \left(\Lambda \frac{d}{dr} r \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\Lambda \frac{dr\Lambda}{dr} \right) + a k^2 \Lambda^2 \right) \rrbracket = 0. \quad (2.4.18)$$

Тождество (2.4.18) можно проверить, подставив (2.4.4) для Λ и используя дисперсионное соотношение (2.3.3).

Теперь мы преобразуем уравнение (2.4.14) внутри трубки, т. е. при $r < a$:

$$\frac{d^2 Y^*}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY^*}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) Y^* = \frac{J_1(x)}{|\lambda_i|^2}, \quad (2.4.19)$$

где $x = r|\lambda_i|$. Мы ищем частное решение уравнения (2.4.19) в виде $Y^* = Y^*_{par} = h_i x J_1'(x)$, где h_i – постоянная, которую нужно определить. Подставляя такое частное решение в (2.4.19), получаем

$$\frac{d^2 Y^*_{par}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY^*_{par}}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) Y^*_{par} = -2h_i J_1(x). \quad (2.4.20)$$

Теперь из (2.4.19) и (2.4.20) получим $h_i = -\frac{1}{2|\lambda_i|^2}$. Следовательно, частное решение имеет следующий вид:

$$Y^*_{par} = -\frac{r}{2|\lambda_i|} J_1'(r|\lambda_i|), \quad r < a. \quad (2.4.21)$$

Вне трубки справедливо следующее уравнение, преобразованное из (2.4.14):

$$\frac{d^2 Y^*}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY^*}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) Y^* = \frac{V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{V_{Ae} \lambda_e^2 K_1(a\lambda_e)} K_1(r\lambda_e), \quad (2.4.22)$$

где $x = r\lambda_e$. Частное решение дифференциального уравнения будет рассмотрено в виде $Y^* = Y^*_{par} = h_e x K_1'(x)$, где h_e – постоянная, которую нужно определить. Снова подставляя частное решение в уравнение (2.4.22), получаем $h_e = \frac{V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2V_{Ae} \lambda_e^2 K_1(a\lambda_e)}$, отсюда мы имеем частное решение в виде

$$Y^*_{par} = \frac{r V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2V_{Ae} \lambda_e K_1(a\lambda_e)} K_1'(r\lambda_e) \quad r > a. \quad (2.4.23)$$

Из частных решений (2.4.21) и (2.4.23) общее решение выражается следующим образом:

$$Y^* = \begin{cases} C_i J_1(r|\lambda_i|) - \frac{r}{2|\lambda_i|} J_1'(r|\lambda_i|), & r < a, \\ C_e K_e(r\lambda_e) + \frac{r V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2V_{Ae} \lambda_e K_1(a\lambda_e)} K_1'(r\lambda_e) & r > a. \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Теперь имеем $\gamma(r, T_1, T_2, Z_1, Z_2) = -2i \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) Y^*(r)$. При подстановке этого выражения в граничные условия (2.4.16) и используя (2.4.24) и нижеуказанные тождества для функций Бесселя [1]

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) = J_0(z), \quad \frac{1}{z} \frac{d}{dz} z Y_1(z) = Y_0(z), \quad (2.4.25a)$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z I_1(z) = I_0(z), \quad \frac{1}{z} \frac{d}{dz} z K_1(z) = -K_0(z), \quad (2.4.25b)$$

получим следующую систему уравнений для C_i и C_e :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{V_{Ai}} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_{Ai} \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \left(C_i J_1(a|\lambda_i|) - \frac{a}{2|\lambda_i|} J_1'(a|\lambda_i|) \right) \\ &= \left(\frac{\omega}{V_{Ae}} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_{Ae} \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \left(C_e K_1(a\lambda_e) + \frac{a V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2 V_{Ae} \lambda_e K_1(a\lambda_e)} K_1'(a\lambda_e) \right), \end{aligned} \quad (2.4.26a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{V_{Ai}} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_{Ai} \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \left[|\lambda_i| C_i J_0(a|\lambda_i|) + \frac{a}{2} \left(J_1(a|\lambda_i|) - \frac{J_0(a|\lambda_i|)}{a|\lambda_i|} \right) \right] \\ &= \left(\frac{\omega}{V_{Ae}} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k V_{Ae} \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \left[-\lambda_e C_e K_0(a\lambda_e) + \frac{a V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2 V_{Ae} K_1(a\lambda_e)} \left(K_1(a\lambda_e) - \frac{K_0(a\lambda_e)}{a\lambda_e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.26b)$$

Таким образом, мы получаем систему линейных алгебраических неоднородных уравнений для переменных C_i и C_e . Но из линейного дисперсионного соотношения (2.3.3) следует, что определитель системы уравнений (2.4.26) должен быть равен нулю. Это означает, что система должна удовлетворять условию совместности, если она имеет решение.

Чтобы получить условие совместности, мы сначала умножим (2.4.26a) на $\lambda_e K_0(a\lambda_e)$ и уравнение (2.4.26b) с $K_1(a\lambda_e)$, а затем прибавим результаты, после чего с помощью дисперсионного соотношения (2.3.3) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{V_{Ai}^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) \left[K_1(a\lambda_e) \left(J_1(a|\lambda_i|) - \frac{J_0(a|\lambda_i|)}{a|\lambda_i|} \right) - \frac{\lambda_e}{|\lambda_i|} K_0(a\lambda_e) J_1'(a|\lambda_i|) \right] \\ &= \left(\frac{\omega}{V_{Ae}^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) J_1(a|\lambda_i|) \left(K_1(a\lambda_e) - \frac{K_0(a\lambda_e)}{a\lambda_e} + \frac{K_0(a\lambda_e) K_1'(a\lambda_e)}{K_1(a\lambda_e)} \right). \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Теперь, используя дисперсионное соотношение (2.3.3) и соотношения (2.4.25), получим

$$K_1(a\lambda_e) \left(J_1(a|\lambda_i|) - \frac{J_0(a|\lambda_i|)}{a|\lambda_i|} \right) - \frac{\lambda_e}{|\lambda_i|} K_0(a\lambda_e) J_1'(a|\lambda_i|) = \frac{W_1}{J_1(a|\lambda_i|) K_1(a\lambda_e)}, \quad (2.4.28a)$$

$$J_1(a|\lambda_i|) \left(K_1(a\lambda_e) - \frac{K_0(a\lambda_e)}{a\lambda_e} + \frac{K_0(a\lambda_e) K_1'(a\lambda_e)}{K_1(a\lambda_e)} \right) = -\frac{W_2}{J_1(a|\lambda_i|) K_1(a\lambda_e)}, \quad (2.4.28b)$$

$$\text{где } W_1 = K_1^2(a\lambda_e) \left(J_0^2(a|\lambda_i|) - \frac{2}{a|\lambda_i|} J_0(a|\lambda_i|) J_1(a|\lambda_i|) + J_1^2(a|\lambda_i|) \right), \quad (2.4.29a)$$

$$W_2 = J_1^2(a|\lambda_i|) \left(K_0^2(a\lambda_e) + \frac{2}{a\lambda_e} K_0(a\lambda_e) K_1(a\lambda_e) - K_1^2(a\lambda_e) \right). \quad (2.4.29b)$$

Подставляя соотношения (2.4.28) в уравнение (2.4.27), получим

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + V^* \frac{\partial A}{\partial Z_1} = 0, \quad (2.4.30)$$

$$\text{где } V^* = \frac{k}{\omega} \frac{(W_1 + W_2)}{V_{Ai}^{-2} W_1 + V_{Ae}^{-2} W_2}. \quad (2.4.31a)$$

Дифференцируя дисперсионное соотношение (2.3.3) по k и используя соотношения $J'_0(z) = -J_1(z)$ и $K'_0(z) = -K_1(z)$ и с помощью выражения (2.4.31a) можно показать, что $V^* = V_g = \frac{d\omega}{dk}$, где V_g – групповая скорость.

Используя уравнения (2.4.25), (2.4.29) и следуя тождеству [75]

$$\int_0^x s J_v^2(s) ds = \frac{x^2}{2} [J'_v(x)]^2 + \frac{x^2 - v^2}{2} J_v^2(x),$$

$$\int_x^\infty s K_v^2(s) ds = \frac{x^2}{2} [K'_v(x)]^2 - \frac{x^2 + v^2}{2} K_v^2(x)$$

получим следующее выражение для V^* :

$$V_g = V^* = \frac{k}{\omega} \frac{(W_1 + W_2)}{V_{Ai}^{-2} W_1 + V_{Ae}^{-2} W_2} = \frac{k \int_0^\infty s V_A^2 \Lambda^2 ds}{\omega \int_0^\infty s \Lambda^2 ds} \quad (2.4.31b)$$

Выражение (2.4.30) является условием совместимости для системы уравнений (2.4.26).

Когда удовлетворяется условие совместимости, система уравнений становится линейно зависимой и, следовательно, общее решение (2.4.26) должно содержать только одну произвольную постоянную.

Из уравнения (2.4.31) имеем

$$\frac{kV_{Ae}^2 - \omega V_g}{V_{Ae}^2 W_1} = - \frac{kV_{Ai}^2 - \omega V_g}{V_{Ai}^2 W_2} = \frac{k(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)}{V_{Ae}^2 W_1 + V_{Ai}^2 W_2}. \quad (2.4.32)$$

Тогда из уравнения (2.4.30) получаем

$$\frac{1}{W_1} \left(\frac{\omega}{V_{Ae}^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) = - \frac{1}{W_2} \left(\frac{\omega}{V_{Ai}^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} + k \frac{\partial A}{\partial Z_1} \right) = \frac{k(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)}{V_{Ae}^2 W_1 + V_{Ai}^2 W_2} \frac{\partial A}{\partial Z_1}. \quad (2.4.33)$$

С помощью уравнений (2.4.25), (2.4.30) и (2.4.33) преобразуем уравнение (2.4.26а) в следующую форму:

$$= - \frac{W_1}{V_{Ai}} \left[C_e K_1(a\lambda_e) - \frac{a V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|)}{2\lambda_e V_{Ae} K_1(a\lambda_e)} \left(K_0(a\lambda_e) + \frac{K_1(a\lambda_e)}{a\lambda_e} \right) \right]. \quad (2.4.34)$$

Из этого уравнения можно записать C_i и C_e в виде

$$C_i = -C V_{Ae} W_1 K_1(a\lambda_e) + \frac{a J_1'(a|\lambda_i|)}{2|\lambda_i| J_1(a|\lambda_i|)}, \quad (2.4.35a)$$

$$C_e = C V_{Ai} W_2 J_1(a|\lambda_i|) - \frac{a V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|) K_1'(a\lambda_e)}{2\lambda_e V_{Ae} K_1^2(a\lambda_e)}, \quad (2.4.35b)$$

где C - произвольная постоянная. Подставляя уравнение (2.4.35) в (2.4.24) и используя тождества (2.4.25), получим

$$Y^* = \begin{cases} \frac{-C V_{Ae} W_1 K_1(a\lambda_e) J_1(r|\lambda_i|) + a J_0(a|\lambda_i|) J_1(r|\lambda_i|) - r J_0(r|\lambda_i|) J_1(a|\lambda_i|)}{2|\lambda_i| J_1(a|\lambda_i|)}, & r < a, \\ \frac{C V_{Ai} W_2 J_1(a|\lambda_i|) K_1(r\lambda_e) + V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|) [a K_0(a\lambda_e) K_1(r\lambda_e) - r K_0(r\lambda_e) K_1(a\lambda_e)]}{2\lambda_e V_{Ae} [K_1(a\lambda_e)]^2} & r > a. \end{cases} \quad (2.4.36)$$

Теперь мы решаем краевую задачу для $\phi(r)$. Задача состоит в решении уравнения (2.4.11), относящегося к граничным условиям (2.4.17). Используя метод Лагранжа, получим общее решение для (2.4.11), удовлетворяющее условию регулярности при $r = 0$ и затухающее при $r \rightarrow \infty$:

$$\phi(r) = \begin{cases} D_i J_1(2r|\lambda_i|) + \frac{\pi}{2} J_1(2r|\lambda_i|) \int_r^a s Y_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds + \frac{\pi}{2} Y_1(2r|\lambda_i|) \int_0^r s J_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds, & r < a \\ D_e K_1(2r\lambda_e) - K_1(2r\lambda_e) \int_a^r s I_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds - I_1(2r\lambda_e) \int_r^\infty s K_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds & r > a \end{cases} \quad (2.4.37)$$

Подставляя этот результат в граничные условия (2.4.17), получаем требуемую систему уравнений для D_i и D_e , которая при решении с помощью (2.4.28) дает D_i и D_e в терминах λ_i, λ_e . В выражении (2.4.37) функции $g_{1i}(s)$ и $g_{1e}(s)$ обозначают внутреннее и внешнее значения функции $g_1(s)$.

II. Приближение третьего порядка и НУШ

Приближение третьего порядка получается следующим образом: сначала подставим (2.4.2) в (2.2.7) и воспользуемся масштабированными операторами (2.4.5), (2.4.6) и (2.4.7), а затем собираем все члены, пропорциональные ϵ^3 , по обе стороны равенства. Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_{3r}}{\partial t^2} - \Delta_2 v_{3r} = N_{23} + N_{33} - \frac{2}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial t \partial T_1} - \frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial T_1^2} - \frac{2}{V_A^2} \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial t \partial T_2} \\ + 2 \frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial z \partial Z_1} + \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial Z_1^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z \partial Z_2}, \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

где N_{23} и N_{33} – члены, пропорциональные ϵ^3 в уравнении (2.2.7). Явные выражения для N_{23} и N_{33} получаются в виде

$$\begin{aligned} N_{23} = V_A \Delta_2 \left(\frac{v_{1r}}{r} I^2 \frac{\partial^2 r v_{1r}}{\partial r \partial T_1} - \frac{v_{1r}}{r} I \frac{\partial r v_{2r}}{\partial r} - \frac{v_{2r}}{r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \\ + V_A \frac{\partial}{\partial r} \left(v_{1r} I^2 \Delta_2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial T_1} - v_{1r} I \Delta_2 v_{2r} - v_{2r} I \Delta_2 v_{1r} \right), \end{aligned} \quad (2.4.39a)$$

$$\begin{aligned} N_{33} = V_A^2 \Delta_2 \left[\left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) V_A I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) V_A I \Delta_2 v_{1r} + \frac{v_{1r}}{r} I \frac{\partial}{\partial r} v_{1r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right] \\ + V_A^4 \left\{ \left[I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} \right] \frac{\partial}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial z} I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} \right] \right\} I \Delta_2 v_{1r} \\ - V_A^4 (\Delta_2 v_{1r}) I^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} + V_A^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left(v_{1r}^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1r} V_A^2 I \Delta_2 \frac{v_{1r}}{r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.4.39b)$$

Затем мы ищем решение полученного уравнения в следующем виде:

$$v_{3r} = v_{31} e^{i(kz - \omega t)} + (\text{Члены, непропорциональные } e^{i(kz - \omega t)}) + c. c. \quad (2.4.40)$$

Теперь, подставляя выражение для v_{3r} в уравнение (2.4.38) и собирая все члены, пропорциональные $e^{i(kz - \omega t)}$, получим после некоторых манипуляций следующее уравнение для v_{31} :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 v_{31}}{V_A^2} + \Delta_k v_{31} &= \frac{\Lambda}{V_A^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - \Lambda \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} - 2i\Lambda \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial A}{\partial T_2} + k \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) - 2i \left(\frac{\omega}{V_A^2} \frac{\partial Y}{\partial T_1} + k \frac{\partial Y}{\partial Z_1} \right) \\ &\quad - A|A|^2 \frac{V_A^2}{2\omega^2} (g_2 - g_3), \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

где

$$g_2 = \Delta_k \left(\frac{\Lambda}{r} \frac{d(r\Phi)}{dr} - 2 \frac{\Phi}{r} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \right) + \frac{d}{dr} (\Lambda \Delta_{2k} \Phi - 2\Phi \Delta_k \Lambda), \quad (2.4.42)$$

$$\begin{aligned} g_3 &= \Delta_k \frac{\Lambda}{r} \frac{d}{dr} \Lambda \frac{d(r\Lambda)}{dr} + \frac{d}{dr} \Lambda \Delta_{2k} \frac{\Lambda}{r} \frac{d(r\Lambda)}{dr} + \frac{k^2 V_A^2}{\omega^2} \Delta_k \Lambda^2 \Delta_k \Lambda + \frac{2k^2 V_A^2}{\omega^2} \Lambda (\Delta_k \Lambda)^2 \\ &\quad + 2k^2 \Lambda^2 \Delta_k \Lambda - \frac{2\omega^2 d^2 \Lambda^3}{V_A^2 dr^2}. \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Теперь граничные условия для v_{31} получаются следующим образом: подставим (2.4.3) в (2.2.13) и затем, используя масштабированные операторы (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7), собираем члены, пропорциональные ϵ^3 и в результате получим

$$\begin{aligned} \left[\left[V_A v_{3r} - V_A^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial T_1} + V_A^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I v_{2r} + V_A^2 \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} I v_{1r} + V_A^3 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I v_{1r} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} V_A^3 \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r^2} (I v_{1r})^2 + V_A^5 \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} \right] \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.4.44a)$$

$$\begin{aligned} \left[\left[\frac{2V_A}{a} I \frac{\partial r v_{3r}}{\partial r} - \frac{2V_A^2}{a} \left[a \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) \left(I \frac{\partial v_{2r}}{\partial z} - I^2 \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z \partial T_1} \right) + \frac{1}{a} \left(I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \left(I \frac{\partial r v_{2r}}{\partial r} - I^2 \frac{\partial^2 r v_{1r}}{\partial r \partial T_1} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + I \frac{\partial}{\partial r} \left[v_{2r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} + v_{1r} \left(I \frac{\partial r v_{2r}}{\partial r} - I^2 \frac{\partial^2 r v_{1r}}{\partial r \partial T_1} \right) \right] - I^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial T_1} \left(v_{1r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - I \left[(I v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + \left(I v_{2r} - I^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial T_1} \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right] + I^2 \frac{\partial}{\partial T_1} \left((I v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{V_A^3}{a} \left[2I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I v_{1r} \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + I (I v_{1r})^2 \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r^2} - 2I \left(\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r^2} I v_{1r} \right) I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right. \right. \\ \left. \left. - 2I \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I \left((I v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) - 2I \left(\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} I v_{1r} \right) I \frac{\partial^2 r v_{1r}}{\partial r^2} - 2I v_{1r} I \left((I v_{1r}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) \left(a I \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r \partial z} I v_{1r} - I \frac{\partial}{\partial z} v_{1r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) + 2I \frac{\partial}{\partial r} r \left[V_A^2 \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \left(I \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) I \Delta_2 v_{1r} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v_{1r}}{a} I \frac{\partial}{\partial r} \left(v_{1r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \right] - \frac{2}{a} \left(I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \left(I (I v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} - I \frac{\partial}{\partial r} v_{1r} I \frac{\partial r v_{1r}}{\partial r} \right) \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.4.44b)$$

Подставив выражение для v_{3r} из (2.4.40) в (2.4.44) и собирая все члены, пропорциональные $e^{i(kz - \omega t)}$, получим

$$\llbracket V_A v_{31} \rrbracket = FA|A|^2; \quad \llbracket V_A \frac{\partial r v_{31}}{\partial r} \rrbracket = GA|A|^2, \quad (2.4.45)$$

$$\text{где } F = \frac{1}{\omega^2} \left[V_A^3 \left(\frac{\Phi}{2} \frac{d\Lambda}{dr} - \Lambda \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Lambda^2}{2} \frac{d^2 \Lambda}{dr^2} + \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{d\Lambda}{dr} \right)^2 + \frac{V_A^2 k^2}{2\omega^2} \Lambda^2 \Delta_k \Lambda \right) \right], \quad (2.4.46)$$

$$\begin{aligned}
G = \frac{1}{\omega^2} \left[V_A^3 \left\{ ak^2 \Lambda \Phi + \frac{1}{2a} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \frac{d(r\Phi)}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\Phi \frac{d(r\Lambda)}{dr} - \frac{\Lambda}{2} \frac{dr\Phi}{dr} \right) - \Lambda \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} \right. \right. \\
+ \Phi \frac{d}{dr} r \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{\Lambda}{2} \frac{d\Lambda}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) - \frac{\Lambda^2}{2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d^2\Lambda}{dr^2} \right) + \Lambda \frac{d^2\Lambda}{dr^2} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \\
- \frac{\Lambda}{2} \frac{d\Lambda}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) + \frac{V_A^2 k^2}{2\omega^2} \frac{d}{dr} (r\Lambda^2 \Delta_2 \Lambda) - \frac{\Lambda^2}{2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) + \frac{ak^2 \Lambda^2 d\Lambda}{2} \frac{d}{dr} \\
- k^2 \Lambda^2 \frac{d(r\Lambda)}{dr} + \frac{1}{2a} \frac{d}{dr} \left[r\Lambda d \left(\Lambda \frac{d(r\Lambda)}{dr} \right) \right] + \Lambda \frac{d\Lambda}{dr} \frac{d^2}{dr^2} (r\Lambda) \\
\left. \left. + \frac{\Lambda}{2a} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{rd\Lambda}{dr} \right) - \frac{1}{2a} \frac{d(r\Lambda)}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Lambda d(r\Lambda)}{dr} \right) \right\} \right]. \quad (2.4.47)
\end{aligned}$$

Линеаризованная задача будет восстановлена, если подставить $A = 0$. Этот линейный аналог совпадает с краевой задачей для v_r в приближении первого порядка. Он имеет нетривиальное решение, определяемое формулами (2.4.3) и (2.4.4). Это означает, что неоднородная краевая задача для v_{31} имеет нетривиальное решение, когда правые части уравнений (2.4.41) и (2.4.45) удовлетворяют условию разрешимости. Для этого умножим уравнение (2.4.41) на $rV_A^2\Lambda$ и проинтегрируем по r от 0 до ∞ . В результате получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty rV_A^2\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 \right) v_{31} dr \\
= \int_0^\infty \left[\Lambda \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - V_A^2 \Lambda \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} - 2i\Lambda \left(\omega \frac{\partial A}{\partial T_2} + kV_A^2 \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) \right. \\
\left. - 2i \left(\omega \frac{\partial Y}{\partial T_1} + kV_A^2 \frac{\partial Y}{\partial Z_1} \right) - A|A|^2 \frac{V_A^4}{2\omega^2} (g_2 - g_3) \right] r\Lambda dr. \quad (2.4.48)
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям и учитывая уравнения (2.3.3), (2.4.4), (2.4.25) и граничные условия (2.4.45), получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty rV_A^2\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 \right) v_{31} dr = a|\lambda_i| V_{Ai} J_1'(a|\lambda_i|) \llbracket V_A v_{31} \rrbracket - V_{Ai} J_1(a|\lambda_i|) \left[\left[V_A \frac{\partial r v_{31}}{\partial r} \right] \right. \\
\left. = V_{Ai} A |A|^2 [a|\lambda_i| J_0(a|\lambda_i|) F - J_1(a|\lambda_i|) G] \right]. \quad (2.4.49)
\end{aligned}$$

Из этого результата и уравнений (2.4.13), (2.4.30) получаем уравнение (2.4.48) в следующую форму:

$$\begin{aligned}
2i \int_0^\infty \left(\omega \frac{\partial A}{\partial T_2} + kV_A^2 \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) r\Lambda^2 dr \\
+ \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} \int_0^\infty \left[4Y^* \left(\frac{\omega V_g}{V_A} - kV_A \right)^2 - \Lambda (V_g^2 - V_A^2) \right] r\Lambda dr + \frac{A|A|^2}{2\omega^2} \int_0^\infty r\Lambda V_A^4 (g_2 \\
- g_3) dr + V_{Ai} A |A|^2 [a|\lambda_i| J_0(a|\lambda_i|) F - J_1(a|\lambda_i|) G] = 0. \quad (2.4.50)
\end{aligned}$$

Наконец, переписем это уравнение с помощью (2.4.31b) и получим нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волны следующим образом:

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial T_2} + V_g \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + \sigma A |A|^2 = 0, \quad (2.4.51)$$

где α и σ - коэффициенты, заданные выражениями

$$\alpha = \frac{2}{\omega \int_0^\infty s \Lambda^2 ds} \int_0^\infty \gamma^* \left(\frac{\omega V_g}{V_A} - k V_A \right)^2 r \Lambda dr + \frac{V_g (\omega - k V_g)}{2k\omega}, \quad (2.4.52)$$

$$\sigma = \frac{1}{\int_0^\infty s \Lambda^2 ds} \left(\int_0^\infty \frac{r \Lambda V_A^4 (g_2 - g_3)}{4\omega^3} dr + \frac{V_{Ai}}{2\omega} [a|\lambda_i| J_0(a|\lambda_i|) F - J_1(a|\lambda_i|) G] \right). \quad (2.4.53)$$

Переписывая уравнение (2.4.51) в исходных немасштабированных переменных и учитывая $\Psi = \epsilon A$, получаем

$$i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_g \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \sigma \Psi |\Psi|^2 = 0. \quad (2.4.54)$$

Выражение (2.4.54) представляет так называемое нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. В нашем случае оно описывает амплитуду радиальной скорости огибающей волны от четырёхволнового взаимодействия.

2.5 Заключение к Главе 2

В этой главе мы получили нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды однородной магнитной трубки при $\beta \approx 0$. Для описания волнового движения использовалось приближение холодной плазмы. Коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера выражены в функциях Бесселя и модифицированных функциях Бесселя.

Глава 3

Изучение нелинейных коэффициентов НУШ и возникновение супернелинейности

3.1 Введение

В предыдущей главе НУШ для радиальной моды однородной магнитной трубки было получено в качестве первого шага для описания нелинейного поведения радиальных волн в короне. При этом мы использовали идеальные магнитогидродинамические уравнения с учётом того, что при корональных условиях магнитное давление намного превосходит газовое давление и соответственно параметр $\beta \ll 1$ или $\beta \approx 0$. Во второй главе мы получили НУШ в следующем виде:

$$i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_g \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \sigma \Psi |\Psi|^2 = 0$$

Параметры α и σ зависят от частоты волны ω и волнового числа k , которые являются частотой и волновым числом первичной линейной несущей волны, то есть (ω, k) должны удовлетворять дисперсионному уравнению (2.3.3). Появление модуляционной неустойчивости, которая обсуждается в четвёртой главе настоящей диссертации, во многом зависит от знака нелинейных коэффициентов α и σ в НУШ.

Целью данной главы является изучения коэффициентов α , σ , V_g и графическое представление их зависимости от различных физических параметров. Для того чтобы вычислить эти коэффициенты численными методами, применяется математическая программа Maple 2019.2.

3.2 Коэффициенты α , σ и групповая скорость V_g

Перед тем как приступить к вычислению этих коэффициентов, мы получим новое соотношение между коэффициентом α и групповой скоростью огибающей волны V_g . Это важно, потому что сложнее оценить α из выражения (2.4.52). Полученное соотношение между групповой скоростью V_g и α помогает нам легко вычислять α путем дифференцирования групповой скорости V_g . Действуем следующим образом: дифференцируя уравнение (2.4.31a), получим

$$\begin{aligned} \frac{dV_g}{dk} = & \frac{V_g}{k} - \frac{V_g^2}{\omega} - \frac{k(V_{Ai}^{-2} - V_{Ae}^{-2})}{\omega(W_1V_{Ai}^{-2} + W_2V_{Ae}^{-2})^2} \\ & \times \left[W_2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial |\lambda_i|} \frac{d|\lambda_i|}{dk} + \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_e} \frac{d\lambda_e}{dk} \right) - W_1 \left(\frac{\partial W_2}{\partial |\lambda_i|} \frac{d|\lambda_i|}{dk} + \frac{\partial W_2}{\partial \lambda_e} \frac{d\lambda_e}{dk} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Далее используя выражения для λ_i и λ_e и уравнения (2.3.3), (2.4.25) и (2.4.29) из второй главы, сводим уравнение (3.2.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dV_g}{dk} = & \frac{2ak^2V_{Ai}^2V_{Ae}^2(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)^2}{\omega(V_{Ae}^2W_1 + V_{Ai}^2W_2)^3} \left[W_1W_2 \left(\frac{W_2J_0(a|\lambda_i|)}{|\lambda_i|J_1(a|\lambda_i|)} + \frac{W_1K_0(a\lambda_e)}{\lambda_eK_1(a\lambda_e)} \right) \right. \\ & \left. - J_1^2(a|\lambda_i|)K_1^2(a\lambda_e) \left(\frac{W_2^2}{a|\lambda_i|^2} + \frac{W_1^2}{a\lambda_e^2} \right) \right] + \frac{V_g(\omega - kV_g)}{k\omega}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Используя уравнения (2.4.4), (2.4.25), (2.4.31) и (2.4.36), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \Upsilon^* \left(\frac{\omega V_g}{V_A} - kV_A \right)^2 r \Lambda dr \\ & = C \frac{k^2V_{Ai}^2V_{Ae}^2(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)^2W_1W_2}{\omega(V_{Ae}^2W_1 + V_{Ai}^2W_2)^2} \\ & \times \left(W_1J_1^2(a|\lambda_i|) \int_a^\infty rK_1^2(r\lambda_e)dr - \frac{W_2K_1^2(a\lambda_e)}{J_1(a|\lambda_i|)} \int_0^a rJ_1^2(r|\lambda_i|)dr \right) \\ & + \frac{k^2V_{Ai}^2(V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)^2}{2(V_{Ae}^2W_1 + V_{Ai}^2W_2)^2} \left(\frac{W_2^2}{|\lambda_i|J_1(a|\lambda_i|)} \int_0^a [aJ_0(a|\lambda_i|)J_1(r|\lambda_i|) \right. \\ & - rJ_0(r|\lambda_i|)J_1(a|\lambda_i|)]rJ_1(r|\lambda_i|)dr + \frac{W_1^2J_1^2(a|\lambda_i|)}{\lambda_eK_1^3(a\lambda_e)} \times \int_a^\infty [aK_0(a\lambda_e)K_1(r\lambda_e) \\ & \left. - rK_0(r\lambda_e)K_1(a\lambda_e)]rK_1(r\lambda_e)dr \right). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Далее с помощью уравнений (2.4.25), (2.4.29) и следующих тождеств:

$$\int_0^x s J_v^2(s) ds = \frac{x^2}{2} [J'_v(x)]^2 + \frac{x^2 - v^2}{2} J_v^2(x), \quad (3.2.4a)$$

$$\int_x^\infty s K_v^2(s) ds = \frac{x^2}{2} [K'_v(x)]^2 - \frac{x^2 + v^2}{2} K_v^2(x), \quad (3.2.4b)$$

получим уравнение

$$W_1 J_1^2(a|\lambda_i|) \int_a^\infty r K_1^2(r\lambda_e) dr - \frac{W_2 K_1^2(a\lambda_e)}{J_1(a|\lambda_i|)} \int_0^a r J_1^2(r|\lambda_i|) dr = 0. \quad (3.2.5)$$

Из этого выражения следует, что коэффициент C в уравнении (3.2.3) равен нулю. Используя снова уравнения (2.4.29), (3.2.4) и соотношения $J'_0(z) = -J_1(z)$, $K'_0(z) = -K_1(z)$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^a [a J_0(a|\lambda_i|) J_1(r|\lambda_i|) - r J_0(r|\lambda_i|) J_1(a|\lambda_i|)] r J_1(r|\lambda_i|) dr = \frac{a^3 W_1 J_0(a|\lambda_i|)}{2 K_1^2(a\lambda_e)} - \frac{a^2 J_1^3(a|\lambda_i|)}{2 |\lambda_i|}, \quad (3.2.6)$$

$$\int_a^\infty [a K_0(a\lambda_e) K_1(r\lambda_e) - r K_0(r\lambda_e) K_1(a\lambda_e)] r K_1(r\lambda_e) dr = \frac{a^3 W_2 K_0(a\lambda_e)}{2 J_1^2(a|\lambda_i|)} - \frac{a^2 K_1^3(a\lambda_e)}{2 \lambda_e}. \quad (3.2.7)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.2.3), получаем

$$\int_0^\infty Y^* \left(\frac{\omega V_g}{V_A} - k V_A \right)^2 r \Lambda dr = \frac{a^3 k^2 V_{Ai}^2 (V_{Ae}^2 - V_{Ai}^2)^2}{4 K_1^2(a\lambda_e) (V_{Ae}^2 W_1 + V_{Ai}^2 W_2)} \times \left[W_1 W_2 \left(\frac{W_2 J_0(a|\lambda_i|)}{|\lambda_i| J_1(a|\lambda_i|)} + \frac{W_1 K_0(a\lambda_e)}{\lambda_e K_1(a\lambda_e)} \right) + J_1^2(a|\lambda_i|) K_1^2(a\lambda_e) \left(\frac{W_2^2}{a |\lambda_i|^2} + \frac{W_1^2}{a \lambda_e^2} \right) \right]. \quad (3.2.8)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4.52), а затем используя (3.2.5) и сравнивая с (3.2.3), получаем следующее соотношение между α и V_g :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}. \quad (3.2.9)$$

Это и есть необходимое выражение для вычисления коэффициента α .

Коэффициент σ вычисляется с помощью выражения (2.4.53). Но для продолжения нам нужно вычислить произвольные постоянные D_i и D_e в выражении (2.4.37) для функции Φ . Это делается следующим образом.

Подставляя выражение (2.4.37) в граничные условия (2.4.17), получим следующую систему линейных уравнений в D_i и D_e :

$$\begin{aligned}
V_{Ai}^2 \left(D_i J_1(2a|\lambda_i|) + \frac{\pi}{2} Y_1(2a|\lambda_i|) \int_0^a s J_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds \right) \\
= V_{Ae}^2 \left(D_e K_1(2a\lambda_e) - I_1(2a\lambda_e) \int_a^\infty s K_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds \right), \quad (3.2.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{Ai}^2 |\lambda_i| \left(D_i J_0(2a|\lambda_i|) + \frac{\pi}{2} Y_0(2a|\lambda_i|) \int_0^a s J_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds \right) \\
= -V_{Ae}^2 \lambda_e \left(D_e K_0(2a\lambda_e) + I_0(2a\lambda_e) \int_a^\infty s K_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds \right). \quad (3.2.10b)
\end{aligned}$$

Используя (2.4.28) и учитывая, что $\rho_i V_{Ai}^2 = \rho_e V_{Ae}^2$, получаем решение этой системы линейных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
D_i = \frac{1}{2aQ} \left(\pi a [\lambda_e K_0(2a\lambda_e) Y_1(2a|\lambda_i|) - |\lambda_i| K_1(2a\lambda_e) Y_0(2a|\lambda_i|)] \right. \\
\left. \times \int_0^a s J_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds - \frac{\rho_i}{\rho_e} \int_a^\infty s K_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds \right), \quad (3.2.11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_e = \frac{1}{2aQ} \left(2a [\lambda_e J_1(2a|\lambda_i|) I_0(2a\lambda_e) + |\lambda_i| J_0(2a|\lambda_i|) I_1(2a\lambda_e)] \right. \\
\left. \times \int_a^\infty s K_1(2s\lambda_e) g_{1e}(s) ds - \frac{\rho_e}{\rho_i} \int_0^a s J_1(2s|\lambda_i|) g_{1i}(s) ds \right), \quad (3.2.11b)
\end{aligned}$$

$$\text{где } Q = \lambda_e K_0(2a\lambda_e) J_1(2a|\lambda_i|) + |\lambda_i| K_1(2a\lambda_e) J_0(2a|\lambda_i|). \quad (3.2.12)$$

Теперь, используя выражения (2.4.31a), (3.2.9) для V_g и α соответственно и выражение (2.4.53) для σ , мы сможем найти численные значения этих коэффициентов для различных параметров V_{Ai} , V_{Ae} , ρ_i , ρ_e , a , ω , k . Для их вычисления мы использовали программный пакет Maple. Результаты вычисления коэффициентов для фундаментальной радиальной моды в трёх случаях показаны в таблицах 3.1, 3.2 и 3.3. Графические зависимости α , σ и V_g по данным таблиц 3.1, 3.2 и 3.3 показаны на рисунках 3.1, 3.2, и 3.3 соответственно.

Чтобы упростить и обобщить наши результаты, была введена система нормированных физических единиц, которые определяются следующим образом: сначала единица длины берется как радиус a самой магнитной трубки, а единица скорости принимается как внутренняя альвеновская скорость V_i . Естественно, единица времени будет $t = a/V_i$. Аналогично единица для плотности массы берется как внешняя плотность массы ρ_e при динамическом равновесии. Введение такой

системы значительно упрощает вычисление нелинейных параметров с помощью соответствующих аналитических выражений.

Отношение внешней альвеновской скорости к внутренней принято равным $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 3$; $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 6$; $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 9$ в таблицах 3.1, 3.2 и 3.3 соответственно. Зафиксировав отношение внешней альвеновской скорости к внутренней, соответствующее отношение внутренней плотности к внешней плотности автоматически фиксируется, потому что в короне удовлетворяется условие $\rho_i V_{Ai}^2 = \rho_e V_{Ae}^2$, что связано со значением β , стремящимся к нулю. Поэтому отношения внутренней плотности к внешней плотности в трех указанных случаях даются выражениями $\frac{\rho_i}{\rho_e} = 9$; $\frac{\rho_i}{\rho_e} = 36$ и $\frac{\rho_i}{\rho_e} = 81$ соответственно.

Угловая частота волны ω и волнового числа распространения k выбираются так, чтобы они удовлетворяли линейному дисперсионному соотношению (2.3.3):

$$\frac{J_1(|\lambda_i|a)}{|\lambda_i|J_0(a|\lambda_i|)} + \frac{K_1(|\lambda_e|a)}{|\lambda_e|K_0(a|\lambda_e|)} = 0.$$

Рисунки 3.1, 3.2 и 3.3 показывают зависимости α , σ и V_g от безразмерного волнового числа ka соответственно. Эти графики были построены по данным таблиц 3.1, 3.2 и 3.3 для значений нелинейных параметров, относящихся к фундаментальной моде несущей волны для каждого соотношения $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$.

Рисунок 3.1 показывает, что α стремится к $-\infty$, когда k стремится к критическому волновому числу k_c . По мере увеличения k или убывания длины несущей волны, α увеличивается и достигает положительных значений и максимума. Это можно увидеть во всех трех случаях, то есть $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 3$, $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 6$ и $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 9$. При дальнейшем увеличении волнового числа k коэффициент α асимптотически стремится к нулю. Следовательно, для очень больших волновых чисел или очень малых длин волн влияние α минимально. На Рисунке 3.1 мы видим, что максимум коэффициента α зависит от отношения $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$ и монотонно убывает с уменьшением значения $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$. Кривые α , соответствующие более высоким порядкам мод несущей

волны, имеют аналогичную зависимость, за исключением того случая, когда вся кривая смещается вправо с увеличением критического волнового числа для мод высоких порядков.

Рисунок 3.2 показывает, что зависимость σ не имеет простой формы из-за сложного аналитического выражения. При $k = k_c$ коэффициент $\sigma < 0$ для всех трех случаев $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$. С ростом k значение σ увеличивается, достигая положительного значения и локального максимума. При дальнейшем возрастании k коэффициент σ становится отрицательным до достижения сингулярности. Область, где абсолютное значение σ аномально увеличивается в окрестностях точки сингулярности, мы называем супернелинейной зоной. На рисунке 3.2 эти зоны отмечены как А, В и С для трех различных случаев $\frac{V_{Ae}}{V_{Ai}}$.

Математически появление супернелинейности можно определить, ведя вспомогательную функцию супернелинейности Σ , и такая функция определяется следующим образом:

$$\Sigma = |U| + |Q|, \quad (3.2.13)$$

$$\text{где } U = \frac{J_1(a|\lambda_i|)}{|\lambda_i|J_0(a|\lambda_i|)} + \frac{K_1(a\lambda_e)}{\lambda_e K_0(a\lambda_e)}. \quad (3.2.14)$$

Здесь функция U описывается выражением (3.2.14) в терминах функций Бесселя J_0 , J_1 и модифицированных функций Бесселя K_0 , K_1 . V_{Ai} и V_{Ae} – альвеновские скорости внутри и вне трубки соответственно, и Q задаётся уравнением (3.2.12). Функция U на самом деле является выражением для дисперсионного соотношения в линейном случае, а кривые для фазовой скорости представляют собой нули функции U . Сингулярности в нелинейном коэффициенте σ возникают если $\Sigma = 0$ и причина такой сингулярности, следующая: НУШ описывает взаимодействие четырёх фазовых волн в окрестностях линейной несущей волны в приближении огибающей и коэффициент σ выражает взаимодействие этих фазовых волн. В некоторых случаях несущей линейной моды с волновыми параметрами (k, ω) , фазовые волны вокруг этой моды могут быть в состоянии резонанса с второй гармоникой $(2k, 2\omega)$ и далее если такой набор $(2k, 2\omega)$ удовлетворяет дисперсионное соотношение (2.3.3)

тогда данная вторая гармоника сможет вступить в взаимодействие с фазовыми волнами вокруг исходной несущей волны. Именно в таких случаях (k, ω) , удовлетворяется $\Sigma = 0$ и наблюдается сингулярность и коэффициент σ достигает $\pm\infty$.

Подобные сингулярности в нелинейном коэффициенте σ встречаются и в гидродинамике для нелинейных капиллярно-гравитационных волн в воде с присутствием поверхностного натяжения [23, 36].

Стоит отметить, что НУШ с кубической нелинейностью неприменимо в таких точках сингулярности в коэффициенте σ , так как требуется учитывать нелинейность от более высоких порядков, но в окрестностях этих точек, то есть в зонах супернелинейности, где такого резонанса нет и коэффициент σ имеет большое, но конечное значение, можно использовать НУШ с кубической нелинейностью для моделирования нелинейной радиальной моды.

Рисунок 3.3 показывает, что с ростом k от k_c групповая скорость V_g сначала уменьшается до минимума и становится ниже внутренней альвеновской скорости V_{Ai} , а затем постепенно увеличивается и асимптотически приближается к V_{Ai} . Подобный результат именно о зависимости V_g был ранее получен в работах [15, 84]. Интересно отметить, что после достижения минимума групповая скорость монотонно возрастает, а фазовая скорость несущей волны монотонно убывает, что приводит к аномальной дисперсии.

Кривые α , σ и V_g , соответствующие более высоким порядкам мод несущей волны, имеют аналогичную зависимость, за исключением того, что вся кривая смещается вправо с увеличением критического волнового числа для мод высоких порядков.

Таблица № – 3.1

Параметры магнитной трубки были выбраны следующие:

$$V_{Ai} = 1, \rho_{oe} = 1, \text{ радиус трубки } a = 1, \frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 3,$$

ka	ω	V_g	α	σ	V_{phase}
0.855444390	2.557778728	1.242918268	-12.2809737000	-0.847335800	2.99
0.9	2.604024356	0.9378836400	-1.32201612000	-0.929551733	2.89336039556
1	2.689921754	0.8098942000	-0.31505934500	-0.851651220	2.68992175400
1.1	2.768570947	0.7691853686	-0.12681240450	-0.727955551	2.51688267909
1.2	2.844510197	0.7519632444	-0.05490222950	-0.586895874	2.37042516417
1.3	2.919293168	0.7448513115	-0.01994471100	-0.435267489	2.24561012923
1.4	2.993651854	0.7429578543	-0.00076224350	-0.276507387	2.13832275286
1.5	3.067982430	0.7440276244	0.01051144950	-0.113065015	2.04532162000
1.6	3.142516051	0.7468733359	0.01739583350	0.053003039	1.96407253188
1.7	3.217393297	0.7508134743	0.02166813250	0.219833475	1.89258429235
1.8	3.292701213	0.7554324661	0.02430583550	0.385674457	1.82927845167
1.9	3.368493494	0.7604654969	0.02588185000	0.548844051	1.77289131263
2	3.444802241	0.7657382124	0.02674887850	0.707702340	1.72240112050
2.1	3.521645166	0.7711329967	0.02713267400	0.860626717	1.67697388857
2.2	3.599030191	0.7765691131	0.02718238400	1.005985421	1.63592281409
2.3	3.676958479	0.7819904873	0.02699912200	1.142106503	1.59867759957
2.4	3.755426479	0.7873579448	0.02665292900	1.267239650	1.56476103292
2.5	3.834427349	0.7926441202	0.02619319500	1.379508485	1.53377093960
2.6	3.913951954	0.7978300316	0.02565526450	1.476850207	1.50536613615
2.7	3.993989577	0.8029027353	0.02506474050	1.556937015	1.47925539889
2.8	4.074528439	0.8078536806	0.02444034950	1.617073659	1.45518872821
2.9	4.155556075	0.8126775440	0.02379589100	1.654059654	1.43295037069
3	4.237059612	0.8173713861	0.02314158550	1.664001383	1.41235320400
3.1	4.319025977	0.8219340334	0.02248502400	1.642049092	1.39323418613
3.2	4.401442049	0.8263656250	0.02183184450	1.582021140	1.37545064031
3.3	4.484294770	0.8306672770	0.02118622050	1.475850596	1.35887720303
3.4	4.567571234	0.8348408230	0.02055122650	1.312748829	1.34340330412
3.5	4.651258743	0.8388886260	0.01992909300	1.077896126	1.32893106943
3.6	4.735344858	0.8428134265	0.01932141500	0.750315184	1.31537357167
3.7	4.819817428	0.8466182300	0.01872929000	0.299256578	1.30265335892
3.8	4.904664611	0.8503062270	0.01815344050	-0.322278500	1.29070121342
3.9	4.989874890	0.8538807208	0.01759429550	-1.189932360	1.27945510000
4	5.075437083	0.8573450737	0.01705205900	-2.433745309	1.26885927075
4.1	5.161340346	0.8607026734	0.01652676150	-4.297759374	1.25886349902
4.2	5.247574172	0.8639569013	0.01601830150	-7.299937928	1.24942242190
4.3	5.334128392	0.8671111039	0.01552647400	-12.76620548	1.24049497488
4.4	5.420993169	0.8701685802	0.01505099550	-25.41228012	1.23204390205
4.5	5.508158992	0.8731325694	0.01459152850	-83.35649695	1.22403533156
4.6	5.595616672	0.8760062341	0.01414769200	125.5752166	1.21643840696
4.7	5.683357331	0.8787926603	0.01371907150	43.55283176	1.20922496404

Продолжение таблицы – 3.1 на следующей странице

4.8	5.771372396	0.8814948484	0.01330523600	28.99594856	1.20236924917
4.9	5.859653590	0.8841157099	0.01290574050	22.98419814	1.19584767143
5	5.948192922	0.8866580698	0.01252013250	19.73526762	1.18963858440

(Результаты таблиц были получены автором)

Таблица № – 3.2

Параметры магнитной трубки были выбраны следующие:

$$V_{Ai} = 1, \rho_{oe} = 1, \text{ радиус трубки } a = 1, \frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 6,$$

ka	ω	V_g	α	σ	V_{phase}
0.407338325	2.439956567	1.08915293187	-67.62994187500	-1.243358926	5.99
0.5	2.503225735	0.606493238674	-0.259094537170	-1.283798290	5.006451470
0.6	2.562504776	0.586879460642	-0.008882463220	-1.200244663	4.270841293
0.7	2.621344598	0.591686321298	0.045786784300	-1.098524011	3.744777997
0.8	2.681042309	0.602804763738	0.062238691750	-0.981824679	3.351302886
0.9	2.741966007	0.615815234968	0.066727120270	-0.851458512	3.046628897
1	2.804217030	0.629202624513	0.066689254580	-0.708753831	2.804217030
1.1	2.867798882	0.642371129623	0.064808246100	-0.555291103	2.607089893
1.2	2.932675718	0.655078121805	0.062191727950	-0.392895226	2.443896432
1.3	2.998796007	0.667232266470	0.059333740670	-0.223575558	2.306766159
1.4	3.066102958	0.678811020050	0.056462950490	-0.049459102	2.190073541
1.5	3.134539328	0.689823756370	0.053684926629	0.127268196	2.089692885
1.6	3.204049630	0.700294292527	0.051045494890	0.304406543	2.002531019
1.7	3.274581101	0.710252299142	0.048560770338	0.479772306	1.926224177
1.8	3.346084048	0.719729015989	0.046232052603	0.651212625	1.858935582
1.9	3.418511886	0.728755134446	0.044053448271	0.816605578	1.799216782
2	3.491821028	0.737359797903	0.042015844153	0.973846260	1.745910514
2.1	3.565970706	0.745570188359	0.040108987831	1.120819072	1.698081289
2.2	3.640922763	0.753411420485	0.038322562756	1.255355597	1.654964892
2.3	3.716641456	0.760906584540	0.036646723518	1.375176942	1.615931068
2.4	3.793093253	0.768076871300	0.035072335019	1.477816345	1.580455522
2.5	3.870246651	0.774941723927	0.033591054602	1.560517113	1.548098660
2.6	3.948072013	0.781518995436	0.032195331041	1.620096883	1.518489236
2.7	4.026541413	0.787825104923	0.030878360679	1.652763454	1.491311634
2.8	4.105628501	0.793875180607	0.029634025777	1.653860148	1.466295893
2.9	4.185308381	0.799683189925	0.028456826738	1.617503982	1.443209787
3	4.265557502	0.805262056025	0.027341815414	1.536057225	1.421852501
3.1	4.346353555	0.810623763435	0.026284531926	1.399330470	1.402049534
3.2	4.427675388	0.815779447991	0.025280948242	1.193339730	1.383648559
3.3	4.509502923	0.820739479098	0.024327417199	0.8982898003	1.366516037
3.4	4.591817085	0.825513530422	0.023420627934	0.4851499608	1.350534437
3.5	4.674599732	0.830110644776	0.022557566194	-0.090481029	1.335599923
3.6	4.757833599	0.834539288067	0.021735480771	-0.900114628	1.321620444
3.7	4.841502239	0.838807400537	0.020951853267	-2.248379408	1.308514119
3.8	4.925589977	0.842922438822	0.020204372789	-4.039045893	1.296207889
3.9	5.010081859	0.846891417137	0.019490912965	-6.654966769	1.284636374
4	5.094963612	0.850720941141	0.018809512700	-11.82475033	1.273740903
4.1	5.180221607	0.854417238273	0.018158359401	-23.81190533	1.263468685
4.2	5.265842816	0.857986188748	0.017535773404	-79.07025482	1.253772099

Продолжение таблицы – 3.2 на следующей странице

4.3	5.351814785	0.861433348099	0.016940195689	117.8227344	1.244608090
4.4	5.438125601	0.864763970841	0.016370176209	41.31187519	1.235937637
4.5	5.524763861	0.867983032082	0.015824363757	27.63118709	1.227725302
4.6	5.611718646	0.871095245929	0.015301497145	21.97330926	1.219938836
4.7	5.698979498	0.874105081853	0.014800397589	18.91404611	1.212548829
4.8	5.786536391	0.877016782522	0.014319961229	17.01816682	1.205528415
4.9	5.874379717	0.879834375104	0.013859153734	15.74206427	1.198853003
5	5.962500257	0.882561687695	0.013417003915	14.83450189	1.192500051

(Результаты таблиц были получены автором)

Таблица № – 3.3

Параметры магнитной трубки были выбраны следующие:

$$V_{Ai} = 1, \rho_{oe} = 1, \text{ радиус трубки } a = 1, \frac{V_{Ae}}{V_{Ai}} = 9,$$

ka	ω	V_g	α	σ	V_{phase}
0.2692040840	2.420144716	0.908532593680	-134.84127478	-1.374822069	8.99
0.3	2.438569489	0.529958371831	-0.8833057263	-1.420392753	8.128564963
0.4	2.488528337	0.493482035993	0.04609326646	-1.374491058	6.221320842
0.5	2.538648176	0.510836299903	0.10767898781	-1.308991691	5.077296352
0.6	2.590842481	0.533194454811	0.11253458173	-1.226801027	4.318070802
0.7	2.645271522	0.555187126800	0.10667152451	-1.126553758	3.778959317
0.8	2.701830928	0.575735157492	0.09872701476	-1.007481491	3.377288660
0.9	2.760365183	0.594688802012	0.09090113511	-0.869732420	3.067072426
1	2.820718658	0.612143052999	0.08377321240	-0.714332287	2.820718658
1.1	2.882748933	0.628251399576	0.07744073602	-0.543047178	2.620680848
1.2	2.946329265	0.643169034686	0.07185247837	-0.358213576	2.455274388
1.3	3.011347737	0.657035948109	0.06691757879	-0.162566711	2.316421336
1.4	3.077705492	0.669973376335	0.06254267995	0.040915030	2.198361066
1.5	3.145314894	0.682084732291	0.05864388508	0.249140142	2.096876596
1.6	3.214097846	0.693457867944	0.05514955234	0.459004297	2.008811154
1.7	3.283984363	0.704167503603	0.05199981785	0.667460554	1.931755508
1.8	3.354911367	0.714277443020	0.04914508941	0.871560557	1.863839648
1.9	3.426821695	0.723842458101	0.04654437075	1.068469786	1.803590366
2	3.499663278	0.732909850065	0.04416372370	1.255459014	1.749831639
2.1	3.573388454	0.741520729030	0.04197495611	1.429874029	1.701613550
2.2	3.647953410	0.749711047693	0.03995454264	1.589084788	1.658160641
2.3	3.723317704	0.757512447007	0.03808274843	1.730412996	1.618833784
2.4	3.799443872	0.764952939862	0.03634292544	1.851035543	1.583101613
2.5	3.876297096	0.772057469024	0.03472094815	1.947857392	1.550518838
2.6	3.953844914	0.778848367913	0.03320475977	2.017343889	1.520709582
2.7	4.032056987	0.785345732491	0.03178400979	2.055295163	1.493354440
2.8	4.110904884	0.791567735715	0.03044975982	2.056533642	1.468180316
2.9	4.190361907	0.797530883527	0.02919424744	2.014460115	1.444952382
3	4.270402935	0.803250230313	0.02801069386	1.920399374	1.423467645
3.1	4.351004287	0.808739560015	0.02689314717	1.762602042	1.403549770
3.2	4.432143603	0.814011538144	0.02583635436	1.524662054	1.385044876
3.3	4.513799740	0.819077840159	0.02483565612	1.182894860	1.367818103
3.4	4.595952676	0.823949262381	0.02388689969	0.7017699208	1.351750787
3.5	4.678583431	0.828635814109	0.02298636739	0.0254615589	1.336738123
3.6	4.761673988	0.833146800395	0.02213071610	-0.938984478	1.322687219
3.7	4.845207228	0.837490890993	0.02131692748	-2.358516485	1.309515467
3.8	4.929166873	0.841676179494	0.02054226618	-4.565696087	1.297149177
3.9	5.013537424	0.845710239341	0.01980424366	-8.331183065	1.285522416
4	5.098304117	0.849600167702	0.01910058877	-15.93800205	1.274576029

Продолжение таблицы – 3.3 на следующей странице

4.1	5.183452876	0.853352626882	0.01842922196	-38.45893774	1.264256799
4.2	5.268970269	0.856973881487	0.01778823335	-1220.233814	1.254516731
4.3	5.354843475	0.860469828208	0.01717586445	57.93471498	1.245312436
4.4	5.441060244	0.863846026478	0.01659049162	32.57885514	1.236604601
4.5	5.527608864	0.867107724131	0.01603061203	24.42463490	1.228357525
4.6	5.614478137	0.870259877999	0.01549483224	20.44022277	1.220538725
4.7	5.701657345	0.873307177020	0.01498185694	18.10159000	1.213118584
4.8	5.789136226	0.876254060273	0.01449048002	16.57857187	1.206070047
4.9	5.876904950	0.879104733872	0.01401957638	15.51816343	1.199368357
5	5.964954099	0.881863185474	0.01356809508	14.74482528	1.192990820

(Результаты таблиц были получены автором)

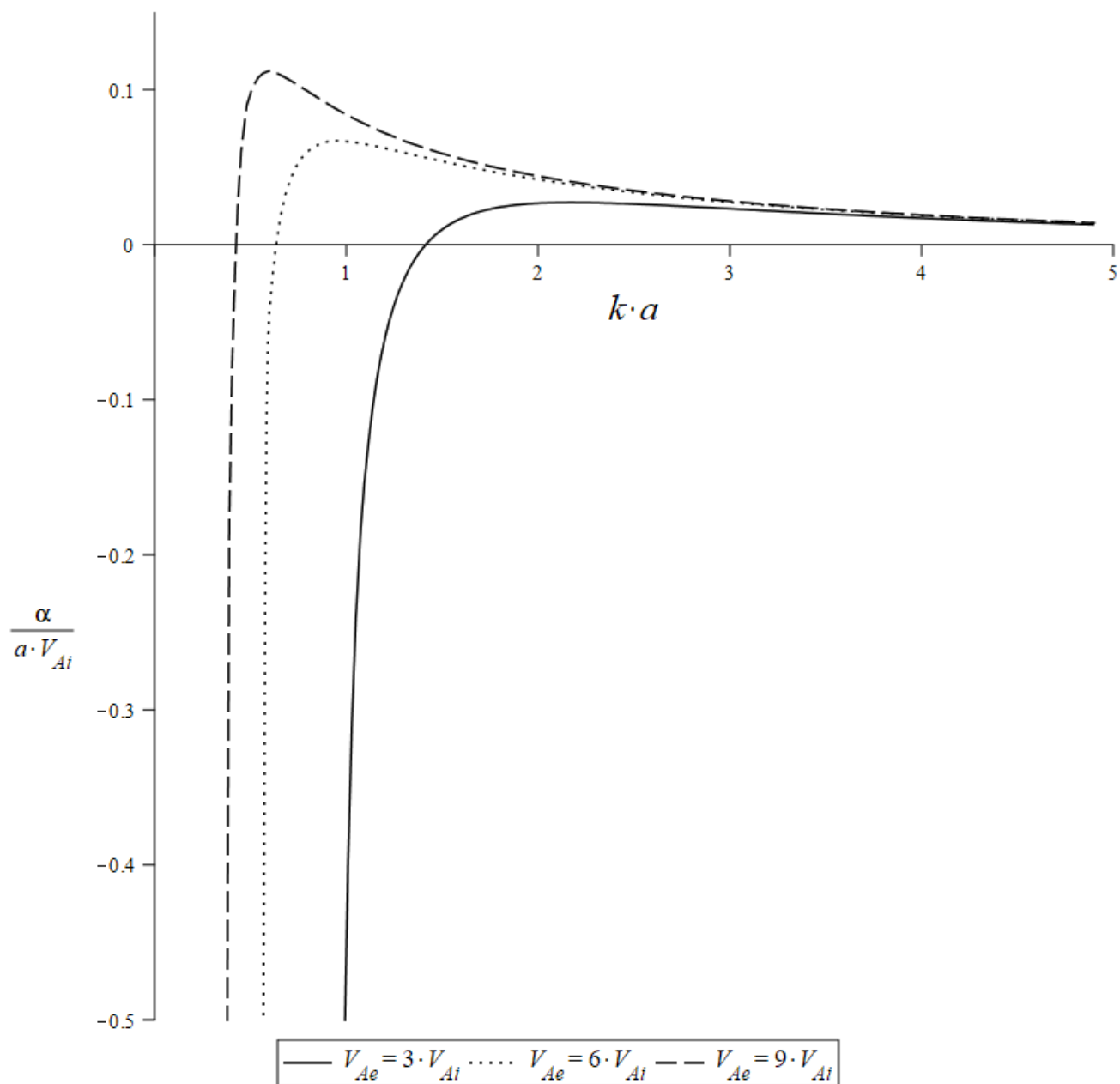


Рис 3.1. Зависимость безразмерного нелинейного коэффициента $\frac{\alpha}{aV_{Ai}}$ от безразмерного волнового числа ka . (Результат был получен автором совместно с Михалевым Б.Б.)

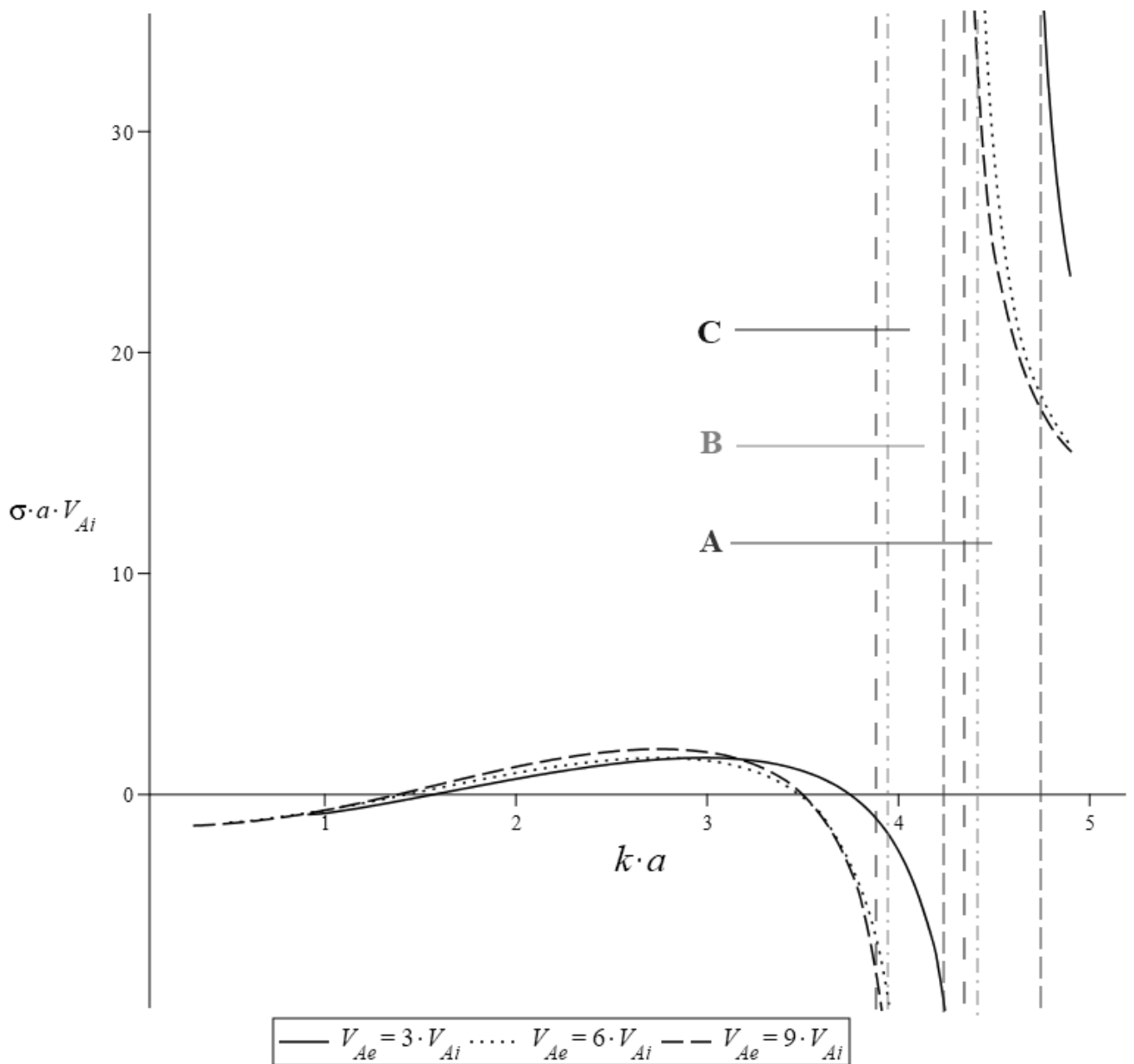


Рис 3.2. Зависимость безразмерного нелинейного коэффициента $\sigma a V_{Ai}$ от безразмерного волнового числа ka . Супернелинейные зоны обозначены для трёх случаев литинскими буквами А, В и С. (Результат был получен автором)

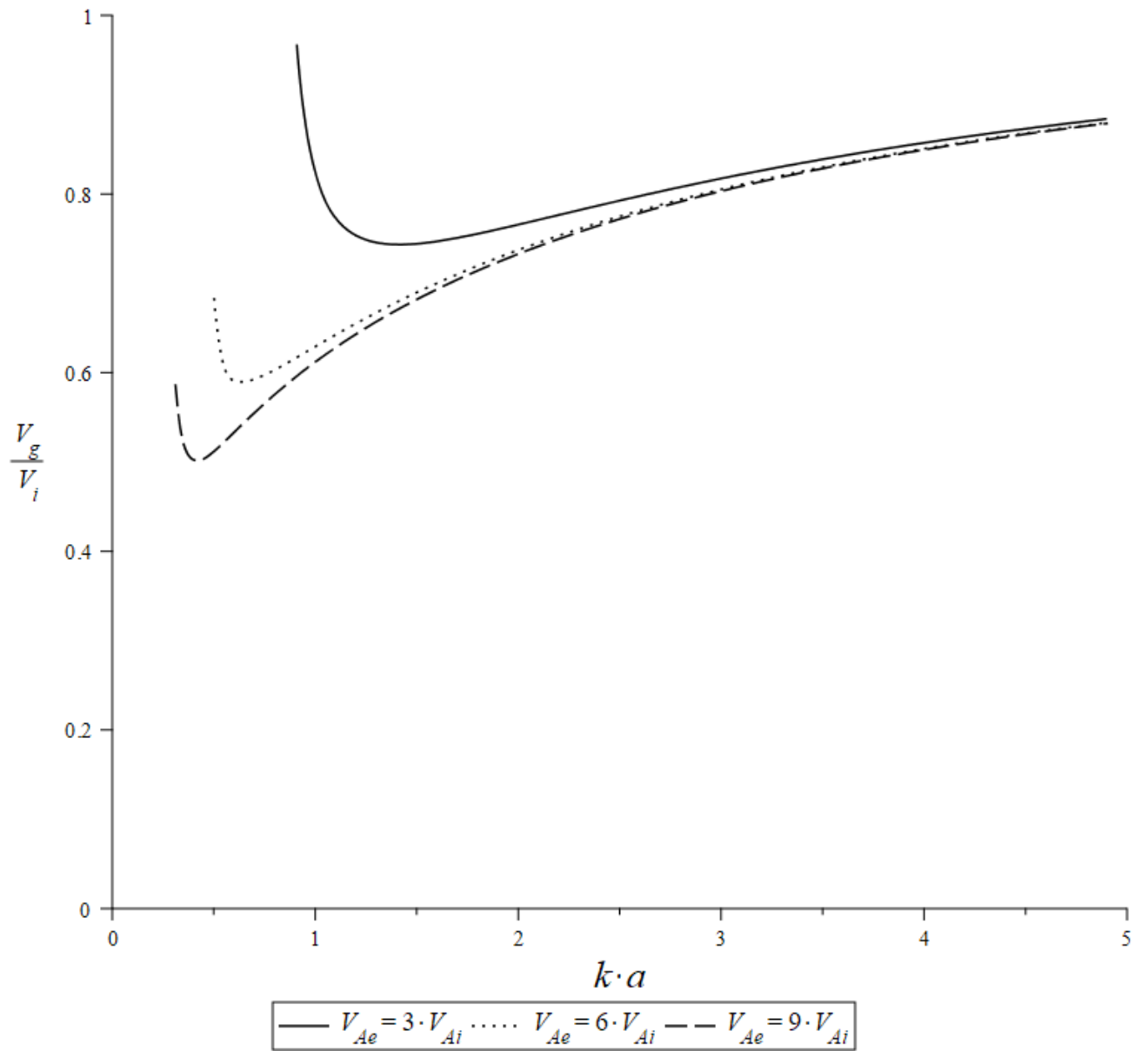


Рис 3.3. Зависимость безразмерной групповой скорости $\frac{V_g}{V_i}$ от безразмерного волнового числа ka .

(Результат был получен автором совместно с Михалевым Б.Б.)

3.3 Заключение к Главе 3

В этой главе мы исследовали поведение коэффициентов α , σ . Из данных, приведённых в таблицах, видно, что коэффициент α возрастает от $-\infty$, так как волновое число возрастает от критического значения k_c и, достигая максимума, асимптотически стремится к нулю. Следовательно, для больших значений волнового числа k влияние α минимально.

Нелинейный коэффициент σ приобретает отрицательные значения тогда, когда k стремится к k_c . С помощью вычислений была обнаружена область, где σ аномально возрастает, в результате чего можно ожидать проявлений нелинейных эффектов даже для относительно малых значений амплитуды. Мы назвали это явление супернелинейностью. Нами предложена функция, с помощью которой можно определить область появления супернелинейности.

Глава 4

Модуляционная неустойчивость, квазипериодические пульсации и появление солитонов и солитоноподобных образований

4.1 Введение

Нелинейное уравнение Шредингера является одним из немногих универсальных нелинейных уравнений, которое описывает широкий спектр нелинейных явлений, таких как самофокусировка, фазовая самомодуляция, волновой коллапс, образование солитонов, волновая турбулентность и т.д.

Уединенные волны или солитоны, интересны как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения. Они являются точными решениями нелинейных уравнений, таких как уравнение Кортвейга-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона и т.д.

В настоящей главе мы сначала исследуем модуляционную неустойчивость, а затем моделируем квазипериодические осцилляции, которые смогут вызвать квазипериодические пульсации во время вспышек. Позже обсудим классические солитоны и так называемый солитон Перегринна, смоделируем формирование этих солитонов.

Для численного решения разложим НУШ на систему одновременных нелинейных дифференциальных уравнений в терминах действительных функций. Это делается следующим образом.

Нелинейное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_g \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \sigma |\psi|^2 \psi = 0.$$

Далее, записав $\psi = u(z, t) + i \cdot v(z, t)$, можно преобразовать приведенное выше комплексное нелинейное дифференциальное уравнение как систему следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_g \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \sigma(u^2 + v^2)v = 0, \quad (4.1.1)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - V_g \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma(u^2 + v^2)u = 0. \quad (4.1.2)$$

В данных уравнениях использовали u, v вместо $u(z, t), v(z, t)$ для простоты.

Затем указанная выше система решается численно с использованием команды `pdsolve` в Maple 2019.2 для различных параметров, граничных условий и амплитуд. Мы проверили правильность алгоритма `pdsolve`, используя аналитическое солитонное решение для НУШ.

4.2 Модуляционная неустойчивость и квазипериодические осцилляции радиальной моды в короне

Существует множество известных аналитических решений для НУШ, и одно из интересных решений — это решение в виде плоской волны перенормированной по частоте. Такое решение дается следующим выражением [132]:

$$\psi(z, t) = A e^{i(Bz + (\sigma A^2 - \alpha B^2 - BV_g)t)}, \quad (4.2.1)$$

здесь A и B — произвольные постоянные и A является произвольной амплитудой. Учитывая, что огибающая волна радиальной моды должна перемещаться с групповой скоростью, можно показать, что вышеупомянутое решение сводится к следующей простой форме:

$$\psi(z, t) = A e^{\pm iA \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}(z - V_g t)}. \quad (4.2.2)$$

Следовательно, волновое число и частота зависят от амплитуды. Хотя решение (4.2.2) является точным решением уравнения НУШ, оно неустойчиво к возмущениям. Такая неустойчивость была впервые обнаружена и смоделирована Т. Б. Бенджамином и Дж. Э. Фейром и поэтому называется неустойчивостью Бенджамина-Фейра (*The Benjamin–Feir instability*), или модуляционной неустойчивостью [9, 10, 135], и при такой неустойчивости из-за нелинейности модулируются возмущения, а неустойчивость экспоненциально увеличивается, разбивая когерентное состояние на малые импульсы. Необходимым условием такой неустойчивости является критерий $\alpha\sigma > 0$, называемый критерием Лайтхилла.

Этот критерий можно понять интуитивно, так как если $\alpha\sigma < 0$, то решения вида (4.2.2) не существует.

Дисперсионное соотношение для возмущений можно получить следующим образом: сначала представим НУШ в системе отсчета, движущейся со скоростью V_g , что можно сделать, подставив $Z = z - V_g t$ в исходный НУШ и в его решение.

Далее, решение для возмущений берётся в виде $\psi(Z, t) = (A + \varepsilon)e^{\pm iA\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}Z}$. Здесь ε – комплексная функция от Z и t . Подставляя такое решение для возмущений в НУШ, переписанное в системе отсчета, движущейся со скоростью V_g , можно получить необходимое комплексное линейное дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения ε следующим образом:

$$i\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) + \alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Z^2} + \sigma A^2(\varepsilon + \varepsilon^*) = 0. \quad (4.2.3a)$$

Теперь берём комплексное сопряжённое от выражения (4.2.3a) и получим следующее выражение:

$$-i\left(\frac{\partial\varepsilon^*}{\partial t}\right) + \alpha\frac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial Z^2} + \sigma A^2(\varepsilon + \varepsilon^*) = 0. \quad (4.2.3b)$$

Далее с помощью уравнений (4.2.3a) и (4.2.3b) можно получить следующее упрощённое уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon + \varepsilon^*) + \alpha^2\frac{\partial^4}{\partial Z^4}(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2\alpha\sigma A^2\frac{\partial^2}{\partial Z^2}(\varepsilon + \varepsilon^*) = 0. \quad (4.2.4)$$

Подставляя гармоническое решение в виде $(\varepsilon + \varepsilon^*) = C_1 \cos(kZ - \omega t)$, где C_1 – произвольное постоянное, сможем получить следующее дисперсионное соотношение для возмущений:

$$k^2 = \frac{\sigma A^2 \pm \sqrt{(\sigma^2 A^4 + \omega^2)}}{\alpha} \quad (4.2.5)$$

Так как $A^2 > 0$, из выражения (4.2.5) следует что для $\alpha\sigma > 0$ и $\omega \neq 0$, всегда существует случай, когда $k^2 < 0$, который приводит к экспоненциальному росту амплитуды возмущений (*модуляционная неустойчивость*).

На рисунках 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4 мы демонстрируем модуляционную неустойчивость для случаев большой и малой амплитуд с положительными и отрицательными значениями α и σ . При таком моделировании естественно выбиралась магнитная трубка с радиусом a , ограниченная с одной стороны и простирающаяся до бесконечности в другом направлении. Мы выбрали значения нелинейных параметров из таблицы 3.2 Главы 3 для отношений $V_e = 6V_i$, где обозначения $V_e = V_{Ae}$ и $V_i = V_{Ai}$ использовались для удобства.

На указанных рисунках, как и в Главе 3, единицей времени служит отношение $\frac{a}{V_i}$, где a и V_i являются радиусом и внутренней альвеновской скоростью трубки соответственно, а амплитуда A измеряется в единицах внутренней альвеновской скорости V_i . Все соответствующие нелинейные параметры, в том числе амплитуда A и групповая скорость V_g , обозначены в нижней части рисунка для каждого моделирования. Ось Y представляет собой модуль комплексной амплитуды радиальной скорости $|\Psi|$, нормированной по внутренней альвеновской скорости V_i , а ось Z проходит вдоль главной оси магнитной трубки.

Как видно, на этих рисунках, вначале вся магнитная трубка находится в состоянии когерентной радиальной скорости, но из-за модуляционной неустойчивости небольшие возмущения, которые в противном случае являлись бы гармоническими вокруг когерентного состояния, экспоненциально возрастают и разбивают когерентное состояние на множество волновых пакетов.

На рисунках 4.4 и 4.2 видно, что в случаях больших амплитуд модуляционная неустойчивость может привести к появлению солитоноподобных образований, которые, будучи относительно стабильными, могут перемещаться на большие расстояния от своего начального положения.

Продемонстрировав модуляционную неустойчивость, мы сможем показать, как такое явление вызывает квазипериодические осцилляции радиальной моды в короне. Мы демонстрируем это на рисунках 4.5a, 4.5b, 4.6a, 4.6b, 4.7a и 4.7b для трех значений амплитуд, то есть $A = 0.3$, $A = 0.6$ и $A = 0.9$. Нелинейные параметры и

групповая скорость такие же, как на рисунке 4.1. Расстояние по оси Z измеряется в единицах радиуса магнитной трубки a . Эти рисунки показывают, как радиальная скорость в данной точке магнитной трубки изменяется со временем. Здесь, как и ранее, единицей времени является $\frac{a}{V_i}$, где V_i - внутренняя альвеновская скорость, а амплитуда A снова измеряется в единицах V_i .

Рисунки 4.5 показывают, что для $A = 0.3$ при $z = 10$ квазипериодические осцилляции устанавливаются через время $t = 10 \frac{a}{V_i}$, тогда как в случаях $A = 0.6$ и $A = 0.9$ заметная квазипериодичность наблюдается начиная с $z = 40$ и выше. Для малых амплитуд наблюдается большое количество отчетливых отдельных периодов, а амплитуда модулированной волны изменяется квазигармонически относительно среднего положения. Кроме того, как для малых, так и для больших амплитуд период и средняя амплитуда квазипериодических осцилляций увеличиваются со временем. Для больших амплитуд, то есть $A = 0.6$ и $A = 0.9$, квазипериодичность наблюдается на относительно больших расстояниях от границы, то есть от точки подножия хромосферы в случае корональной петли. В отличие от случая малой амплитуды, есть одна заметная квазипериодическая мода, наложенная на большое количество малых квазипериодичностей. В случае $A = 0.9$ на рис. 4.7b наблюдается солитон, который, сохраняя свою ширину, перемещается от $z = 40$ к $z = 50$ и далее. Амплитуда солитона временно уменьшается на $z = 50$ из-за его столкновения с возмущением слева.

Хотя решение НУШ в виде перенормированной плоской волны представляет интерес, такое когерентное состояние в корональных петлях спокойных областей должно быть редким, поскольку решение описывает состояние, в котором радиус вдоль петли увеличивается наружу с определенной амплитудой радиальной скорости. Такое состояние на самом деле является глобальным цилиндрическим радиальным режимом. Однако можно представить себе формирование глобальной когерентной моды в активных областях следующим образом: активные области, по существу, непотенциальны, и через корональные петли протекает ток, который вызывает сжатие радиуса петли магнитным полем. Если сила тока слишком велика,

то наблюдается так называемый пинч-эффект. Но, если по какой-то причине ток прерывается, избыточное давление, вызванное магнитным полем, толкает стенки петли наружу. Это состояние действительно может быть описано решением НУШ в виде перенормированной плоской волны. Поскольку это состояние модуляционно неустойчиво, должны наблюдаться квазипериодические осцилляции в радиальной моде в различных точках корональной петли. Так как скорость и смещение действуют в одном направлении, радиус петли колеблется вместе с радиальной скоростью, вызывая соответствующие возмущения плотности вдоль петли. Это указывает на наличие возможного механизма для образования квазипериодических пульсаций (КПП). Квазипериодические пульсации часто наблюдаются во время вспышечной активности, т.е. в активных областях. Возмущения плотности плазмы, вызванные квазипериодическими осцилляциями радиальной моды, могут модулировать электромагнитные волны всего спектра, что может приводить к возникновению некоторых наблюдаемых квазипериодических пульсаций.

4.3 Классический солитон и солитон Перегринна

Классический солитон

Наиболее общее классическое солитонное решение для уравнения НУШ дается следующим выражением [132]:

$$\Psi(z, t) = \pm A \frac{\exp\left(i\left[C_1 z + \left(\frac{\sigma}{2} A^2 - \alpha C_1^2 - C_1 V_g\right) t + C_2\right]\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}} \cdot Az - \left(\sqrt{2\alpha\sigma} \cdot AC_1 + \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}} \cdot V_g A\right) t + C_3\right)}, \quad (4.3.1)$$

здесь A – амплитуда солитона огибающей, C_1 , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, а α , σ – нелинейные коэффициенты.

Следует отметить, что фазовые константы C_2 и C_3 важны, когда мы пытаемся проанализировать более одного солитона одновременно. В данном случае константы могут быть приравнены к нулю, не теряя общности. Константа C_1 в решении (4.3.1) определяется с учётом того, что огибающая должна двигаться с групповой скоростью V_g , и, следовательно, имеем

$$-\frac{\partial|\Psi\Psi^*|}{\partial t} / \frac{\partial|\Psi\Psi^*|}{\partial z} = V_g, \quad (4.3.2)$$

здесь Ψ^* - комплексное сопряжение Ψ . Используя (4.3.1) и (4.3.2), получаем $C_1 = 0$.

Наконец, подставляя значение $C_1 = 0$ в выражение (4.3.1), можно получить окончательный вид локализованного солитонного решения для НУШ, которое задается следующим выражением:

$$\Psi(z, t) = \pm A \operatorname{sech}\left(A\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}(z - V_g t)\right) \exp\left(i\frac{\sigma}{2}A^2 t\right). \quad (4.3.3)$$

Стоит заметить, что ширина такого солитона значительна, когда $\sigma/2\alpha$ мала. Пространственные и временные профили для единичных параметров приведены на рисунках 4.8а и 4.8б соответственно.

Солитоны такого типа весьма интересны, потому что ведут себя как частицы во время столкновений, и они могут перемещаться на большие расстояния, не рассеиваясь, и, таким образом, действуют как носители энергии. Следовательно, солитоны не могут быть исключены из механизма нагрева короны. Как было показано в случае модуляционной неустойчивости, возмущенное состояние может перейти в устойчивое солитонное состояние, и тенденция к образованию солитонов возрастает с увеличением нелинейного коэффициента σ , поэтому даже для малых амплитуд можно ожидать появление солитонов если σ имеет большие значения. Так как в супернелинейной области σ растет почти экспоненциально, возможность образования солитонов в этом месте велика, и образовавшиеся солитоны могут перемещаться в корону и вносить свой вклад в процесс ее нагрева.

Солитон Перегринна

Солитон Перегринна является бризерным солитонным решением для НУШ. Следуя аналогичным математическим манипуляциям и анализу размерностей, как и в случае классического солитонного решения, получаем следующий вид из канонической формы решения [71]:

$$\Psi(z, t) = A \left(1 - \frac{4(1 + 2iA^2\sigma t)}{1 + 4A^4\sigma^2 t^2 + 4\frac{1}{A^2}\frac{2\alpha}{\sigma}(z - V_g t)^2} \right) \times \exp[i(A^2\sigma t)], \quad (4.3.4)$$

здесь A – треть максимальной амплитуды солитона. В отличие от других солитонных решений, солитон Перегринна сначала нарастает до максимальной амплитуды, а затем быстро затухает. Такие солитоны также наблюдаются в нелинейной оптике, когда нелинейность описывается НУШ. Эти солитоны представляют собой двойные пространственно-временные локализации. В точке максимального сжатия амплитуда в три раза превышает уровень фона и, следовательно, интенсивность в девять раз превышает уровень фона. Пространственные и временные профили для единичных нелинейных параметров приведены на рисунках 4.9а и 4.9б.

Солитоны Перегринна используются при моделировании волн-убийц в океанах из-за их большой амплитуды и не большое время существования. В случае солнечной короны они могут выступать в качестве потенциального кандидата для описания нановспышек.

4.4 Моделирование образований, подобных классическому солитону и солитону Перегринна

В исследовании и моделировании модуляционной неустойчивости использовалось аналитическое решение (4.2.2), описывающее плоскую волну, перенормированную по частоте. Хотя решение простое и генерирует солитоны из-за модуляционной неустойчивости, такое состояние, описываемое выражением (4.2.2), является наиболее актуальным для активных областей короны. С другой стороны, по всей короне имеется изобилие импульсных событий и для того, чтобы моделировать образование солитонов при таких событиях необходимо иметь модельную функцию, которая сводится к точному решению для НУШ в начале процесса. С целью получения такой функции преобразуем исходное решение для плоской волны (4.2.2) для того, чтобы получить следующую модельную функцию:

$$\Psi(z, t) = A(z, t) e^{i \left(A(z, t) \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}} (z - V_g t) \right)}, \quad (4.4.1a)$$

$$\text{где } A(z, t) = Ae^{-|A|(z+t)}. \quad (4.4.1b)$$

Такая модельная функция описывает состояние импульсного типа для большой начальной амплитуды A . Однако эта функция не является точным решением НУШ. Поэтому используем модельную функцию для получения соответствующих начальных условий, а затем задаём $\Psi(\infty, t) = 0$, т.е. эта функция должна сводиться к нулю на бесконечности, так как такое условие очевидно с физической точки зрения. Как и ранее, начальная граница находится в точке у подножия хромосферы. Теперь весь набор граничных условий в комплексных переменных для численного решения НУШ выглядят следующим образом:

$$\Psi(0, t) = A(0, t)e^{-i\left(A(0, t)\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}Vgt\right)}; \Psi(z, 0) = A(z, 0)e^{i\left(A(z, 0)\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}z\right)}, \quad (4.4.2a)$$

$$\text{Где } A(0, t) = Ae^{-|A|t}, A(z, 0) = Ae^{-|A|z} \text{ и } \Psi(\infty, t) = 0. \quad (4.4.2b)$$

Поскольку нелинейное уравнение Шредингера имеет производную по времени первого порядка и производную по пространству второго порядка, необходимо иметь два пространственных граничных условия и одно временное начальное условие. С этими граничными условиями используем метод, изложенный во Введении к настоящей главе, то есть НУШ преобразуется как система двух нелинейных дифференциальных уравнений в терминах действительных функций. Это также требует введения граничных условий в расщепленной форме. Таким образом, имеется шесть граничных условий в терминах действительных функций вместо трех граничных условий в терминах комплексных функций для случая одного нелинейного уравнения Шредингера. Решение было получено численно с помощью команды `pdsolve` в пакете математической программы Maple 2019.2 и графически проанализировано для различных нелинейных параметров, групповых скоростей и амплитуд. Такой анализ показал, что образование солитонов может наблюдаться для широкого диапазона нелинейных параметров при достаточно большой амплитуде. Мы представляем два таких случая на рисунках 4.10 и 4.11, демонстрирующих образование классических солитонов и солитонов Перегринна.

На рис. 4.10 заметно, что начальная экспоненциально убывающая радиальная скорость стремится к солитонному решению с течением времени, что является следствием нелинейности. В случае на рис. 4.11 видно формирование солитона Перегринна. Интересно отметить, что солитоны такого типа возникают в основном при относительно больших значениях σ и ближе к начальной границе, то есть ближе к точкам у подножия хромосферы. Поскольку они в основном появляются вблизи хромосферы, то должны играть важную роль в импульсном нагреве нижней короны.

4.5 Заключение к Главе 4

В этой главе изучена модуляционная неустойчивость в случае радиальной моды для различных нелинейных параметров и на основе этого качественно промоделированы квазипериодические пульсации (КПП). С помощью НУШ проведено моделирование таких явлений как классические солитоны, солитоноподобные образования и солитон Перегринна.

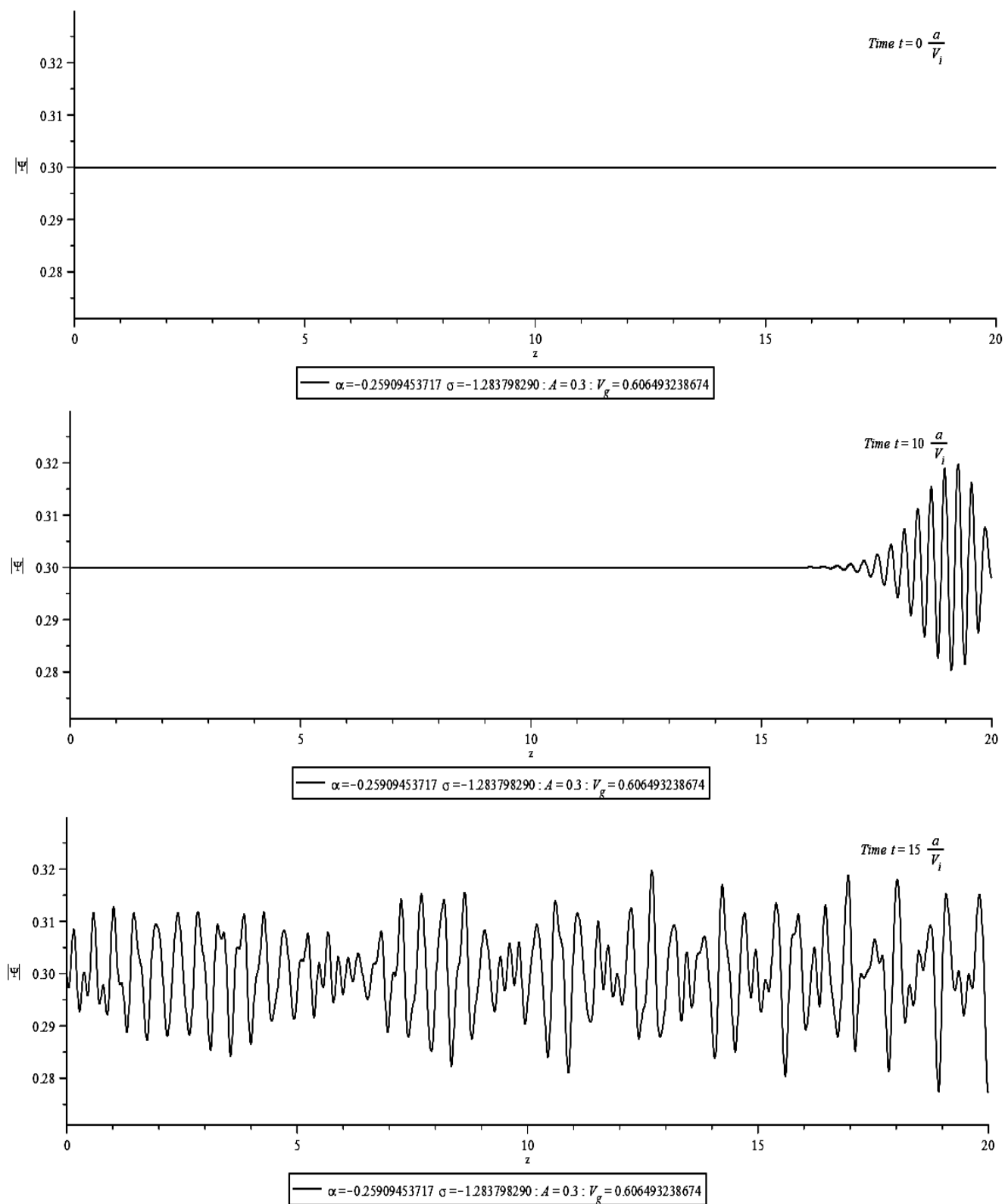


Рис 4.1. В данном случае $\alpha < 0$ и $\sigma < 0$ и как пример выбрали $\alpha = -0.25909453717$, $\sigma = -1.283798290$, $A = 0.3$ и $V_g = 0.606493238674$. Моделирование показывает, что при $t = 0$ решение в виде плоской волны перенормированной по частоте представляет собой когерентную радиальную моду с амплитудой радиальной скорости $A = 0.3$, но при $t = 10$ и $t = 15$ мы видим, что это состояние разлагается на множество мелких возмущений из-за модуляционной неустойчивости. (Результат был получен автором)

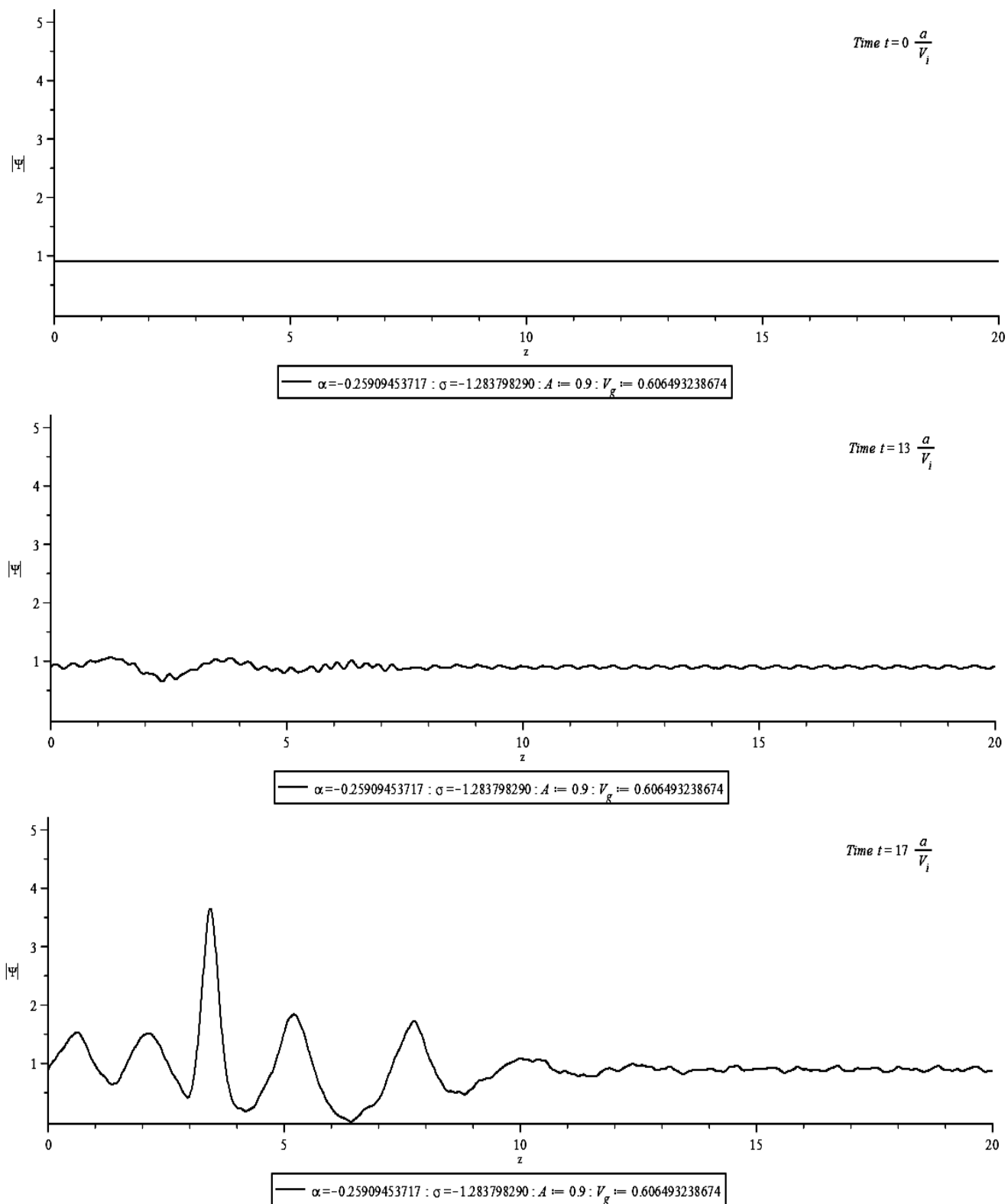


Рис 4.2. Здесь α , σ и V_g такие же как для случая на Рис 4.1, но $A = 0.9$. Моделирование показывает, что для относительно больших значений амплитуды радиальной скорости, солитоны или солитоноподобных образований могут не редко появляться из-за модуляционной неустойчивости. В данном случае, мы это видим при $t = 17$ и такие солитоны, будучи относительно стабильными, могут перемещаться на большие расстояния. (Результат был получен автором)

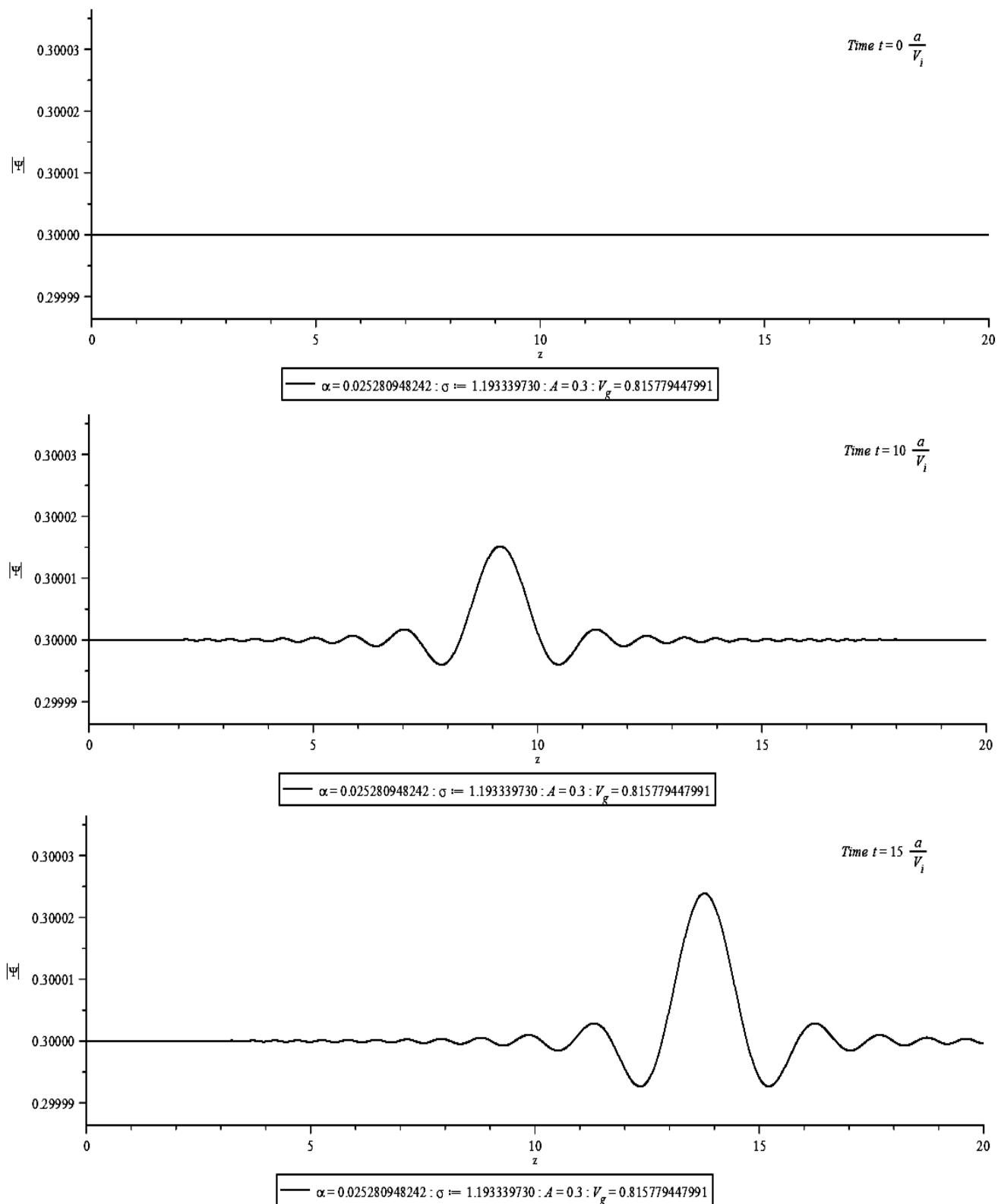


Рис 4.3. В данном случае $\alpha > 0$ и $\sigma > 0$ и для примера выбрали $\alpha = 0.025280948242$, $\sigma = 1.193339730$, $A = 0.3$ и $V_g = 0.815779447991$. Как и для случая на Рис 4.1 при $t = 0$ решение в виде плоской волны перенормированной по частоте представляет собой когерентную радиальную моду с амплитудой $A = 0.3$, но уже при $t = 10$ видно, что из-за модуляционной неустойчивости появляются возмущения в таком состоянии. (Результат был получен автором)

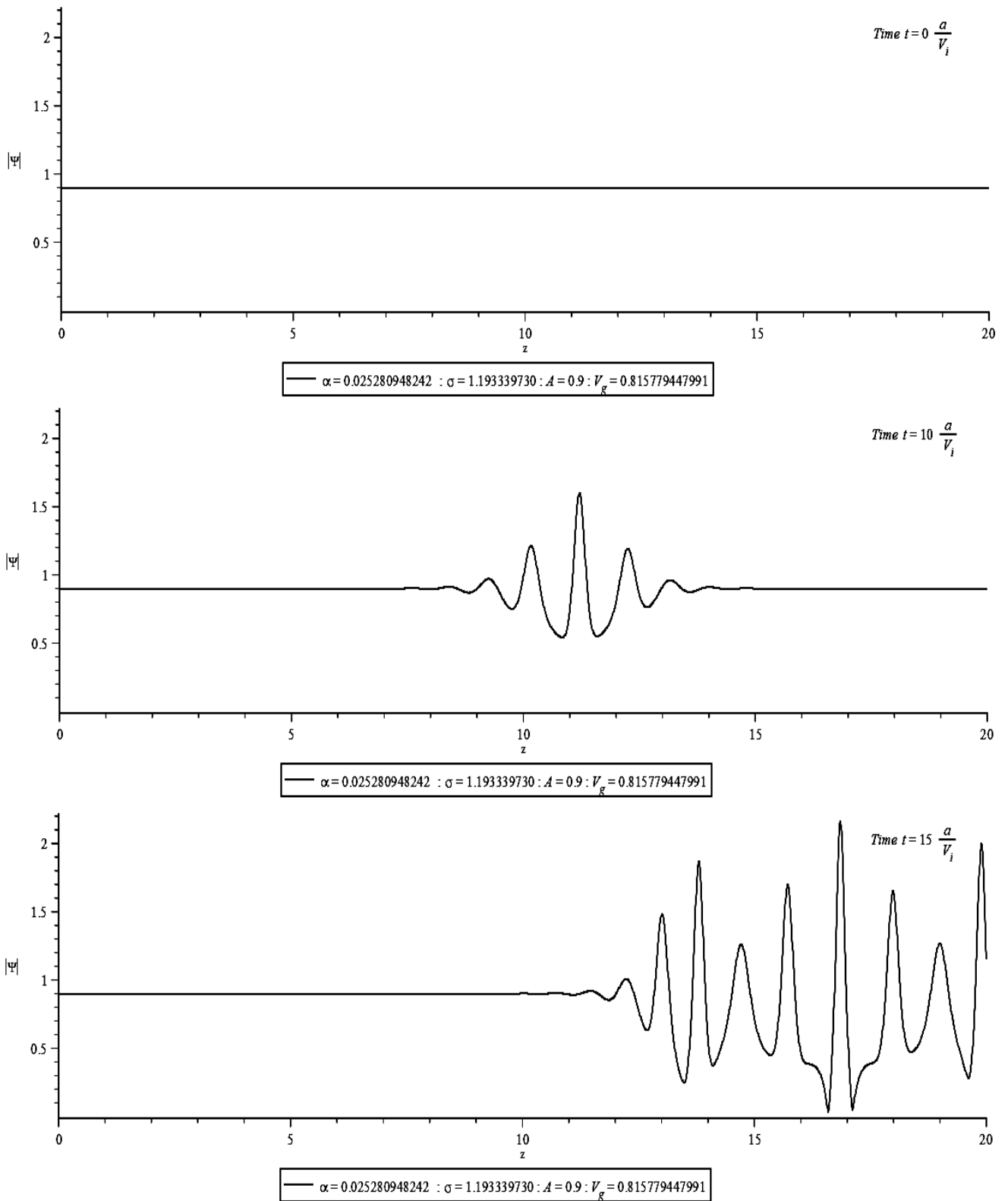


Рис 4.4. Здесь α , σ и V_g такие же как на Рис 4.3, но $A = 0.9$. Моделирование показывает, как и для случая на Рис 4.2, что тенденция к образованию солитонов становится всё более сильной при больших амплитудах. Такое поведение наблюдается для всех пар (α, σ) с большой начальной амплитудой, удовлетворяющих критерию Лайтхилла. (Результат был получен автором)

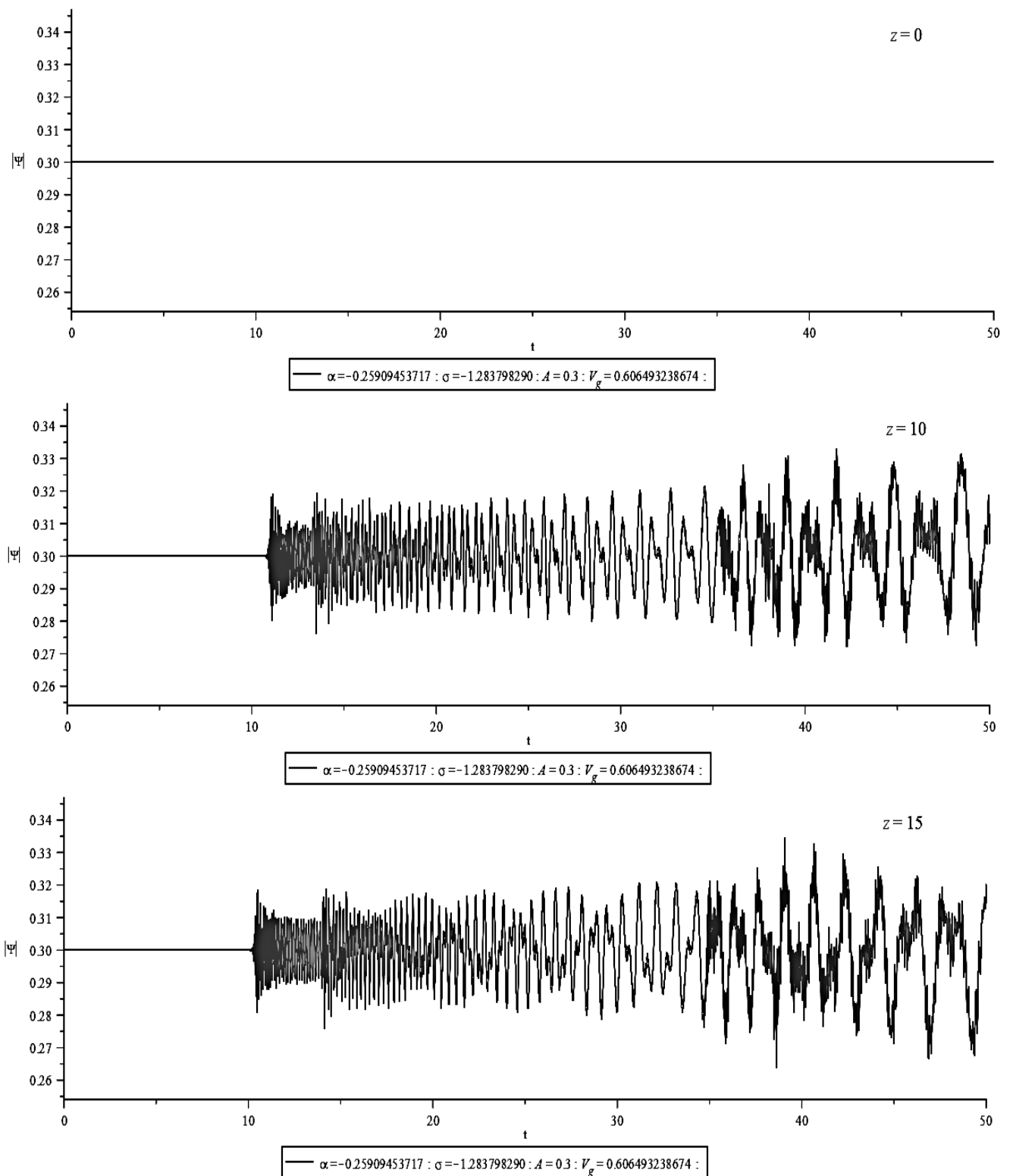


Рис 4.5а. Здесь показывается эволюция возмущения радиальной скорости по времени t в различных точках корональной петли в приближении однородной магнитной трубки для тех же нелинейных параметров и амплитуды как на Рис 4.1. Первое моделирование сверху показывает, что при $z = 0$ неустойчивости нет, но по мере того, как мы поднимаемся, то есть при $z = 10$ и $z = 15$, мы видим эволюцию неустойчивости со временем, порождающую четко видимые квазипериодические осцилляции. Можно отметить, что с течением времени главный период осцилляций увеличивается. (Результат был получен автором)

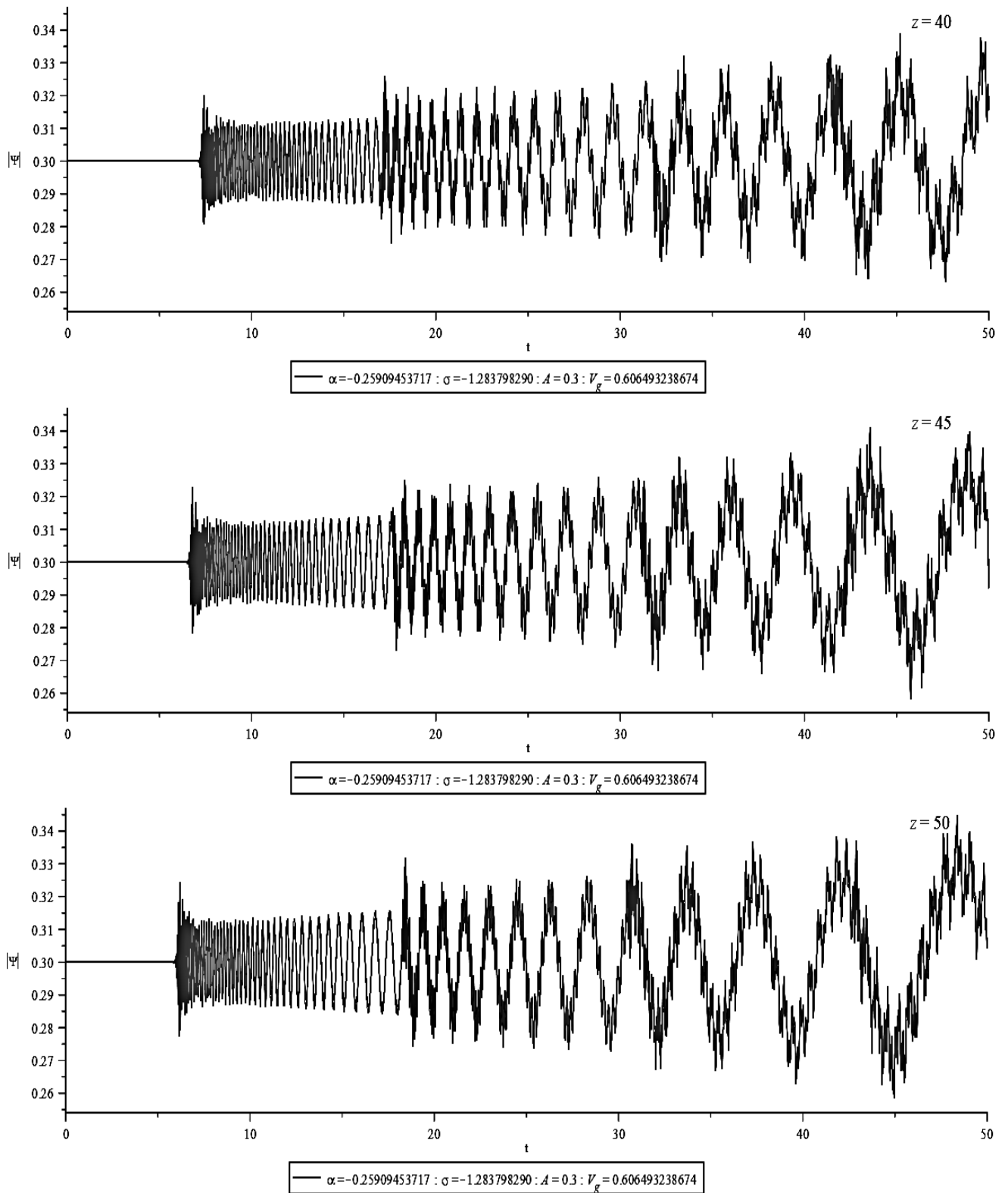


Рис 4.5b. Нелинейные параметры и амплитуда такие же, как на Рис. 4.5а. Здесь мы показываем, как период квазипериодических осцилляций возрастает по мере того, как перемещаемся на вверх по корональной петле (магнитная трубка). (Результат был получен автором)

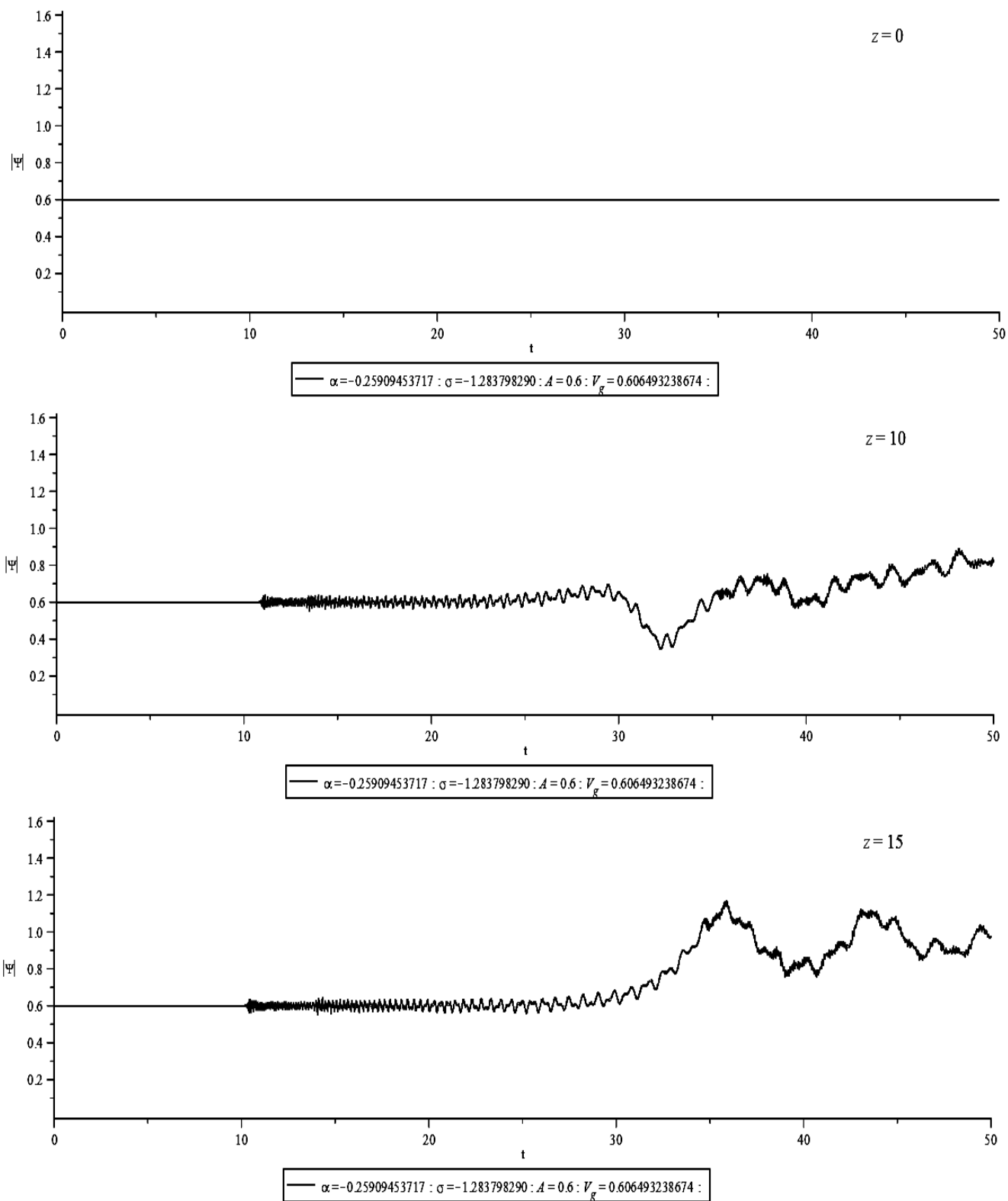


Рис 4.6а. Здесь нелинейные параметры были выбраны такими же, как на Рис 4.5а, но с амплитудой $A = 0.6$. Показана эволюция радиальной скорости по времени t в различных точках корональной петли (магнитная трубка) для амплитуды, вдвое превышающей амплитуду на Рис. 4.5а. Как в предыдущих случаях, при $z = 0$ неустойчивость отсутствует, но, в отличие от предыдущего случая при $z = 10$ и $z = 15$, мы видим, что, колебания становятся более аперiodичными с течением времени. (Результат был получен автором)

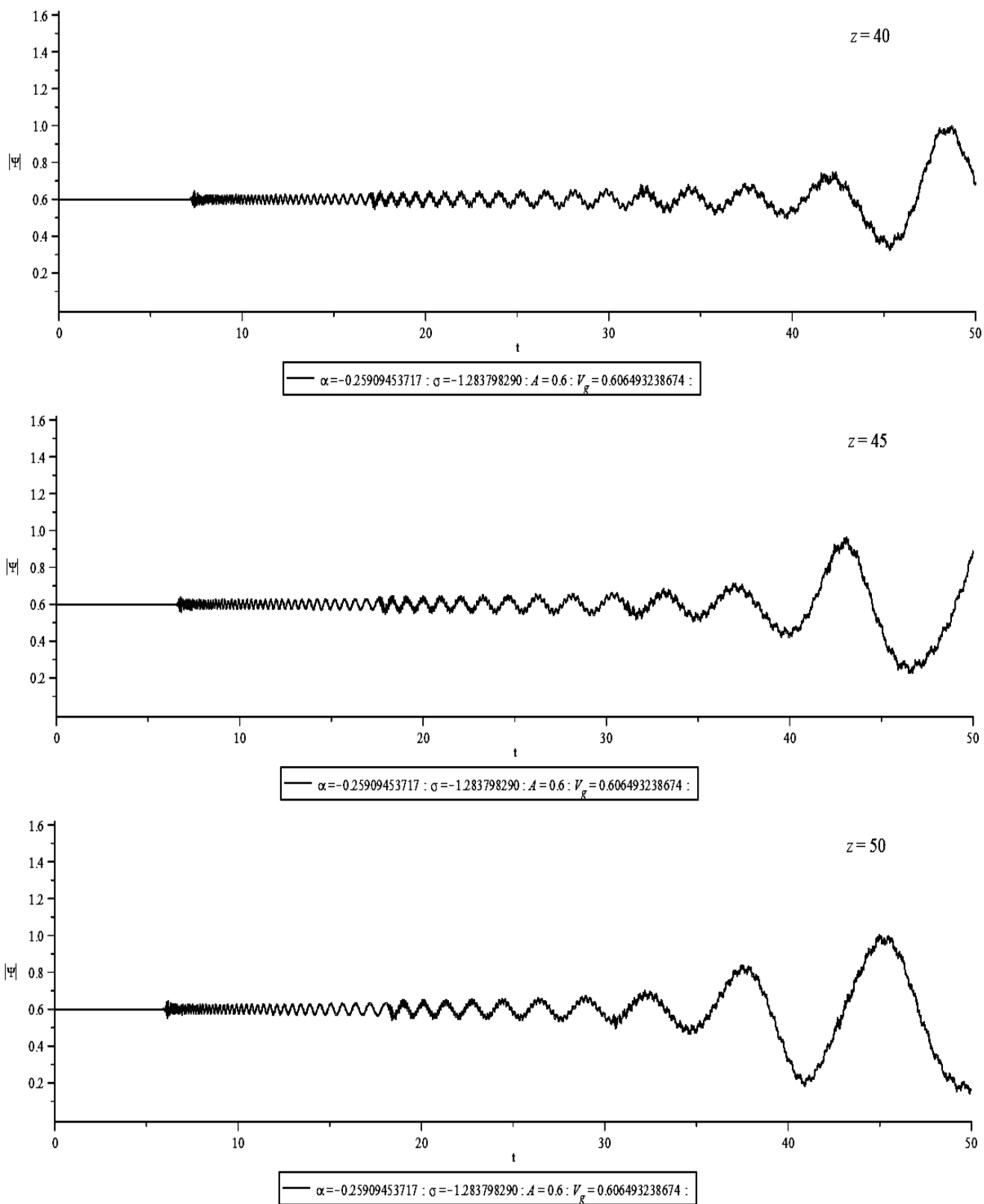


Рис 4.6б. Здесь мы далее показываем, как квазипериодичность меняется со временем на больших высотах для того же случая, показанного на Рис. 4.6а. В отличие от малых высот, квазипериодические осцилляции наблюдаются во всех больших высотах. Доминирующий период квазипериодических осцилляций увеличивается со временем. (Результат был получен автором)

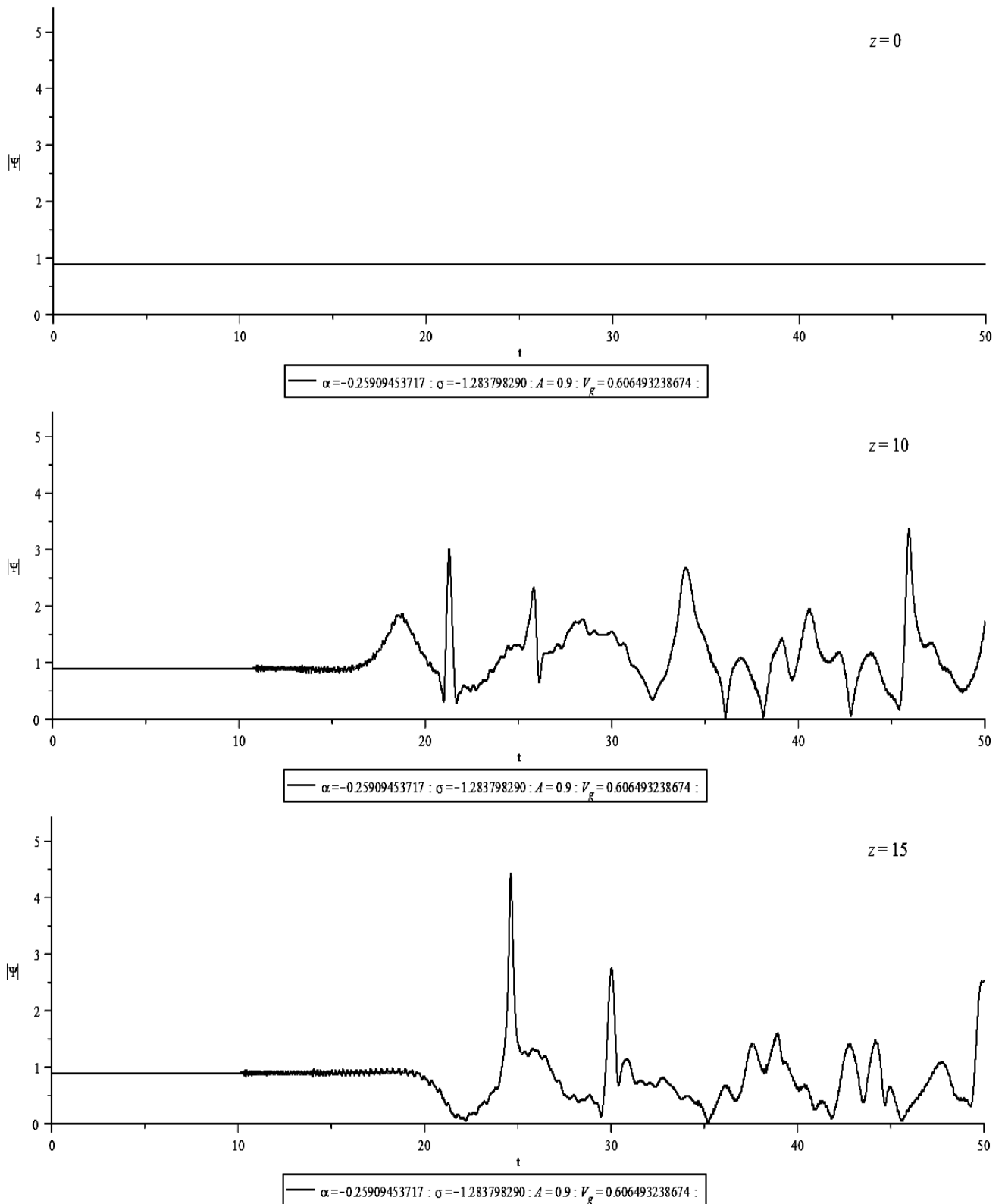


Рис 4.7а. Здесь нелинейные параметры были выбраны такими же, как на Рис 4.5а, но с амплитудой $A = 0.9$. Показана эволюция радиальной скорости по времени t в различных точках корональной петли в приближении однородной магнитной трубки для амплитуды, трое превышающей амплитуду в случае на Рис. 4.5а. Моделирование показывает, что, для больших амплитуд появление солитонов и солитоноподобных образований становится нередким явлением. (Результат был получен автором)

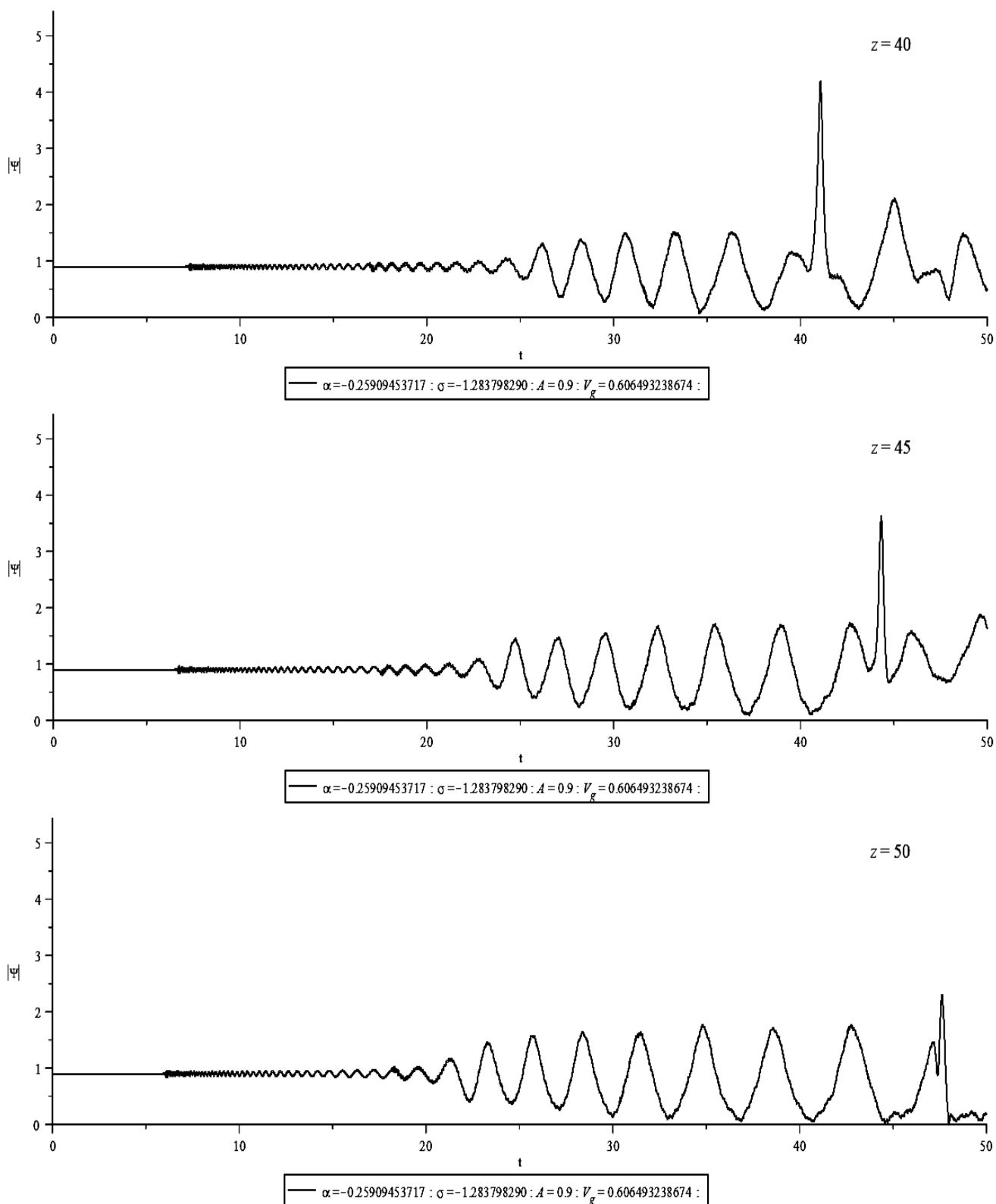


Рис 4.7б. Здесь мы далее показываем для случая на Рис 4.7а, как квазипериодические осцилляции развиваются со временем на больших высотах. Заметим, что ситуация почти аналогична ситуации для $A = 0.6$ на Рис. 4.6б. В случае $A = 0.9$ мы наблюдаем солитон, который, сохраняя свою ширину, перемещается от $z = 40$ к $z = 50$ и далее. При $z = 50$, солитон уменьшается по амплитуде из-за его столкновения с возмущением. (Результат был получен автором)

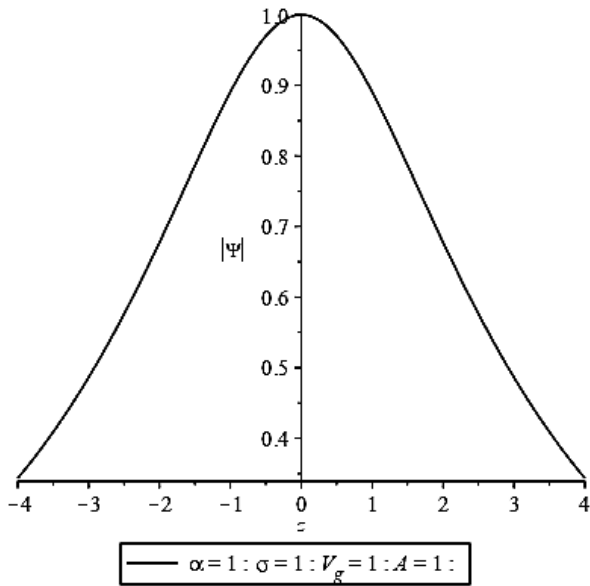


Рис 4.8а. Пространственный профиль классического солитона

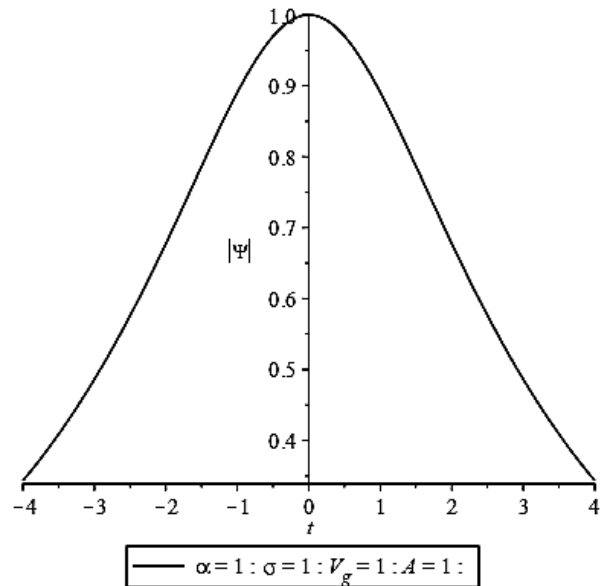


Рис 4.8б. Временной профиль классического солитона

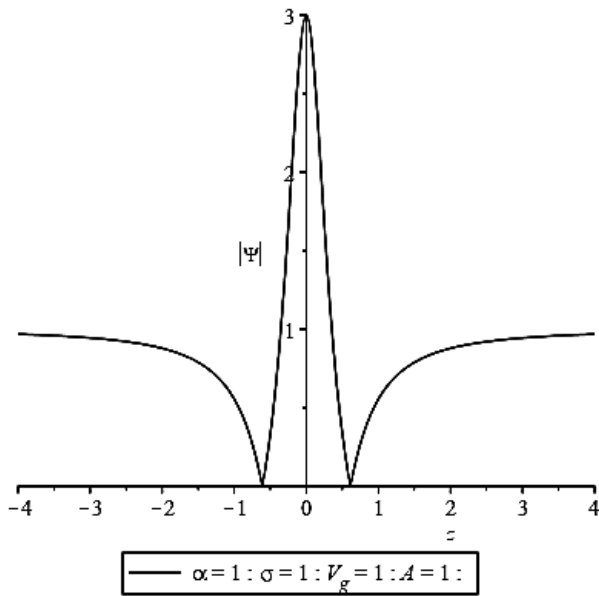


Рис 4.9а. Пространственный профиль солитона Перегринна

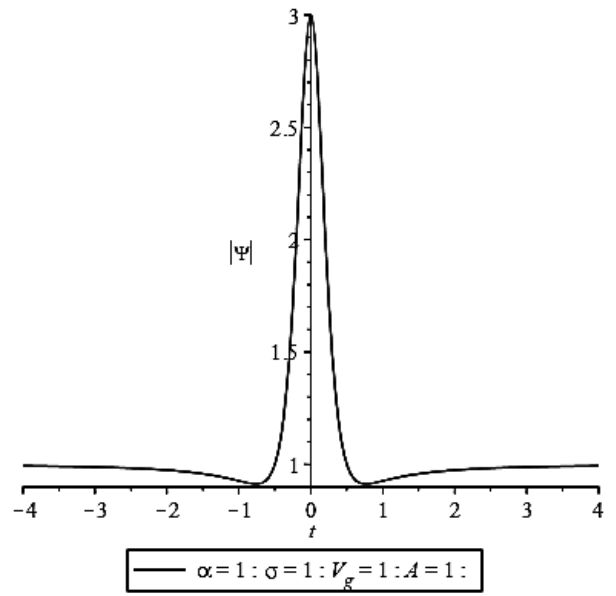


Рис 4.9б. Временной профиль солитона Перегринна

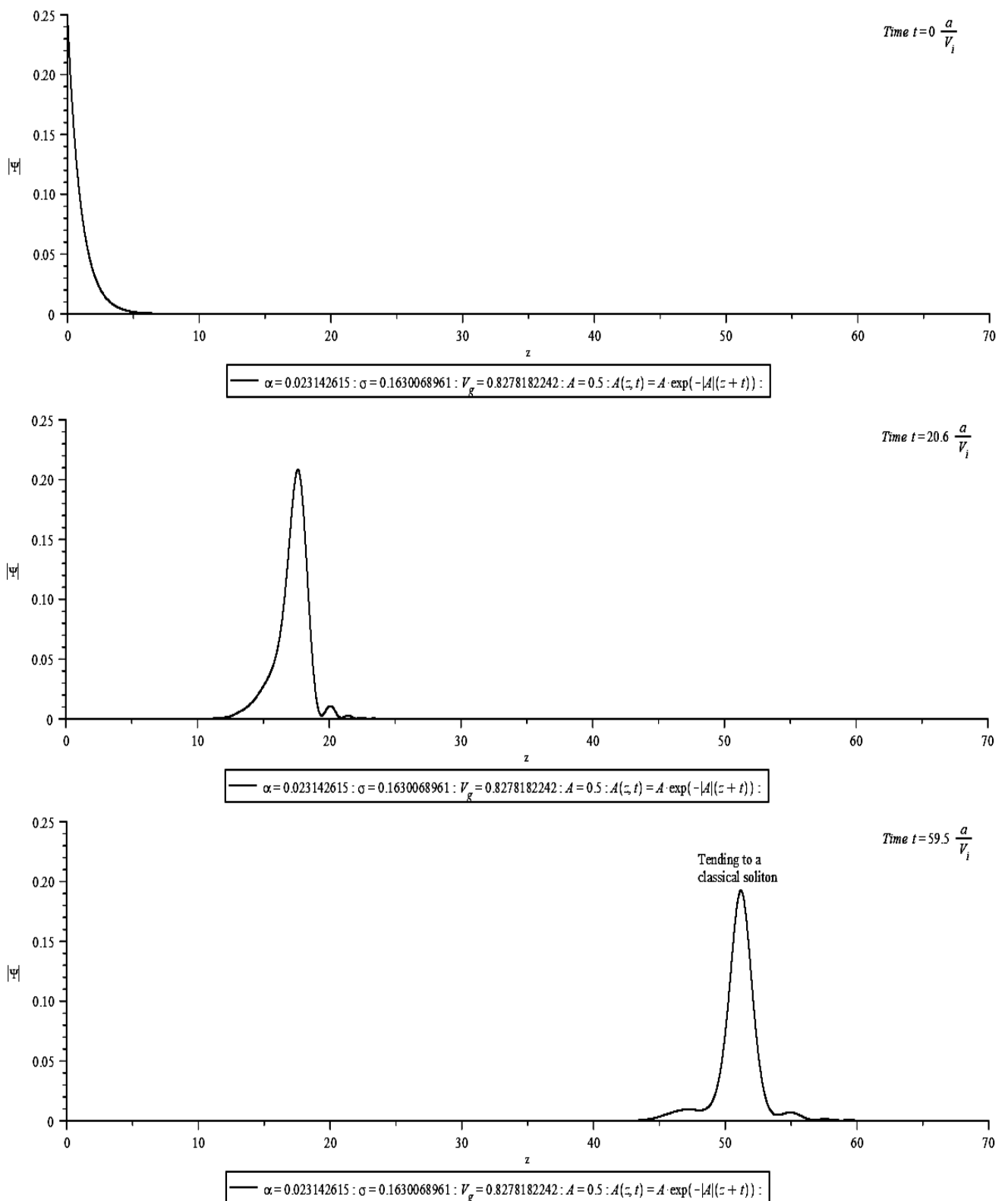


Рис 4.10. Представлены результаты моделирования, которые демонстрируют появление классического солитона. При данном моделировании выбрали $\alpha = 0.023142615$; $\sigma = 0.1630068961$; $V_g = 0.8278182242$ и $A = 0.5$. Моделирование показывает, как экспоненциально убывающая функция, генерирует солитон из-за нелинейности. (Результат был получен автором)

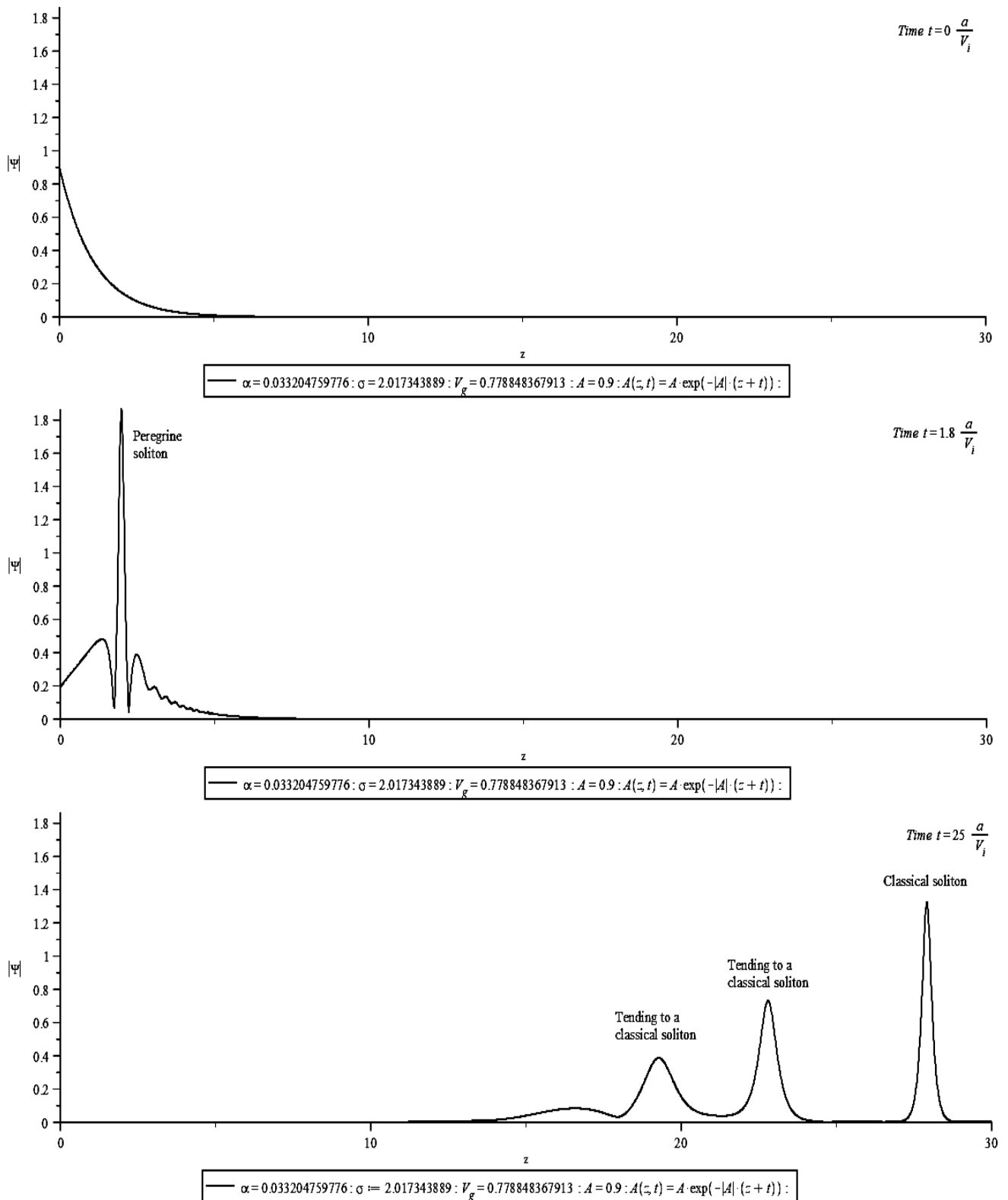


Рис 4.11. Результаты моделирования, демонстрирующие появления классического солитона и солитона Перегринна. При данном моделировании выбрали $\alpha = 0.033204759776$; $\sigma = 2.017343889$; $V_g = 0.778848367913$ и $A = 0.9$. Моделирование показывает, как экспоненциально убывающая функция при больших амплитудах, генерирует солитон Перегринна в начальной стадии эволюции и далее классический солитон из-за нелинейности. (Результат был получен автором)

Результаты

1. Получено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью для радиальной моды в однородной магнитной трубке для условий солнечной короны $\beta \approx 0$. Коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера были выражены в функциях Бесселя и модифицированных функциях Бесселя. Такое уравнение описывает множество нелинейных явлений, таких как модуляционная неустойчивость, образование солитонов, волновая турбулентность и т.д. Полученное НУШ дополняет работу Накарякова и др. [67].
2. Свойства коэффициентов НУШ были изучены и графически представлены и впервые была обнаружена супернелинейность в случае нелинейной радиальной моды корональных петель. Представлена вспомогательная функция Σ , с помощью которой можно определить область, где возникает данное явление.
3. Изучена модуляционная неустойчивость в случае радиальной моды и качественно промоделированы квазипериодические пульсации. Показано, что при больших амплитудах плоской волны перенормированной по частоте, появление солитонов и солитоноподобных образований становится нередким явлением из-за модуляционной неустойчивости.
4. С помощью НУШ и соответствующей модельной функции импульсного типа проведено моделирование таких явлений, как классические солитоны, солитоноподобные образования и солитон Перегринна.

Литература

- [1]. Abramowitz M., Stegun I. A., Romer R. H. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, 1988.
- [2]. Akhmediev N. N., Korneev V. I. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrödinger equation //Theoretical and Mathematical Physics. – 1986. – V. 69. – №. 2. – P. 1089-1093.
- [3]. Akhmediev N., Soto-Crespo J. M., Ankiewicz A. Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves //Physics Letters A. – 2009. – V. 373. – №. 25. – P. 2137-2145.
- [4]. Aschwanden M. J. New millennium solar physics. – New York: Springer International Publishing, 2019.
- [5]. Aschwanden M. Physics of the solar corona: an introduction with problems and solutions. – Springer Science & Business Media, 2006.
- [6]. Aschwanden M. Self-organized criticality in astrophysics: The statistics of nonlinear processes in the universe. – Springer Science & Business Media, 2011.
- [7]. Bahari K. Magnetohydrodynamic sausage waves in current-carrying coronal tubes //Astrophysics and Space Science. – 2017. – V. 362. – №. 9. – P. 1-9.
- [8]. Bahari K. On the nature of fast sausage waves in coronal loops //New Astronomy. – 2018. – V. 61. – P. 30-35.
- [9]. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1967. – V. 299. – №. 1456. – P. 59-76.
- [10]. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory //Journal of Fluid Mechanics. – 1967. – V. 27. – №. 3. – P. 417-430.
- [11]. Defouw R. J. Wave propagation along a magnetic tube //The Astrophysical Journal. – 1976. – V. 209. – P. 266-269.
- [12]. Dennis B. R. et al. Detection and interpretation of long-lived X-ray quasi-periodic pulsations in the X-class solar flare on 2013 May 14 //The Astrophysical Journal. – 2017. – V. 836. – №. 1. – P. 84.

- [13]. Dudley J. M. et al. Modulation instability, Akhmediev breathers and continuous wave supercontinuum generation //Optics express. – 2009. – V. 17. – №. 24. – P. 21497-21508.
- [14]. Dysthe K. B., Trulsen K. Note on breather type solutions of the NLS as models for freak-waves //Physica Scripta. – 1999. – V.1999. – №. T82. – P. 48.
- [15]. Edwin P. M., Roberts B. The Benjamin-Ono-Burgers equation: an application in solar physics //Wave motion. – 1986. – V. 8. – №. 2. – P. 151-158.
- [16]. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetic cylinder //Solar Physics. – 1983. – V. 88. – №. 1-2. – P. 179-191.
- [17]. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetically structured atmosphere //Solar Physics. – 1982. – V. 76. – №. 2. – P. 239-259.
- [18]. Erdélyi R., Al-Ghafri K. S., Morton R. J. Damping of longitudinal magneto-acoustic oscillations in slowly varying coronal plasma //Solar Physics. – 2011. – V. 272. – №. 1. – P. 73.
- [19]. Falkovich G. Fluid mechanics: A short course for physicists. – Cambridge University Press, 2011.
- [20]. Goddard C. R. et al. Observation of quasi-periodic solar radio bursts associated with propagating fast-mode waves //Astronomy & Astrophysics. – 2016. – V. 594. – A96.
- [21]. Goddard C. R., Nakariakov V. M., Pascoe D. J. Fast magnetoacoustic wave trains with time-dependent drivers //Astronomy & Astrophysics. – 2019. – V. 624. – L4.
- [22]. Goossens M. et al. On the nature of kink MHD waves in magnetic flux tubes //Astronomy & Astrophysics. – 2009. – V. 503. – №. 1. – P. 213-223.
- [23]. Grimshaw R. H. J. Envelope solitary waves // Solitary waves in fluids (ed. RHJ Grimshaw). – 2007. – P. 159-179.
- [24]. Guo M. Z. et al. Inferring flare loop parameters with measurements of standing sausage modes //Solar Physics. – 2016. – V. 291. – №. 3. – P. 877-896.
- [25]. Handy B. N. et al. The transition region and coronal explorer //Solar Physics. – 1999. – V. 187. – №. 2. – P. 229-260.

- [26]. Harvey J. Observations of small-scale photospheric magnetic fields //Highlights of Astronomy. – Springer, Dordrecht, 1977. – P. 223-239.
- [27]. Hasegawa A. Nonlinear Effects Associated with Plasma Instabilities //Plasma Instabilities and Nonlinear Effects. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. – P. 145-206.
- [28]. Hayes L. A. et al. Quasi-periodic pulsations during the impulsive and decay phases of an X-class flare //The Astrophysical Journal Letters. – 2016. – V. 827. – №. 2. – L30.
- [29]. Henderson K. L., Peregrine D. H., Dold J. W. Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation //Wave motion. – 1999. – V. 29. – №. 4. – P. 341-361.
- [30]. Huang J. et al. Quasi-periodic pulsations with varying period in multi-wavelength observations of an X-class flare //The Astrophysical Journal. – 2014. – V. 791. – №. 1. – P. 44.
- [31]. Inglis A. R. et al. A large-scale search for evidence of quasi-periodic pulsations in solar flares //The Astrophysical Journal. – 2016. – V. 833. – №. 2. – P. 284.
- [32]. Inglis A. R., Nakariakov V. M., Melnikov V. F. Multi-wavelength spatially resolved analysis of quasi-periodic pulsations in a solar flare //Astronomy & Astrophysics. – 2008. – V. 487. – №. 3. – P. 1147-1153.
- [33]. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics Academic Press //New York and London. – 1964.
- [34]. Jess D. B. et al. Multiwavelength studies of MHD waves in the solar chromosphere //Space Science Reviews. – 2015. – V. 190. – №. 1. – P. 103-161.
- [35]. Kaneda K. et al. Detection of propagating fast sausage waves through detailed analysis of a zebra-pattern fine structure in a solar radio burst // The Astrophysical Journal Letters. – 2018. – V. 855. – №. 2. – L 29.
- [36]. Kawahara T. Nonlinear self-modulation of capillary-gravity waves on liquid layer //Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – V. 38. – №. 1. – P. 265-270.
- [37]. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue waves in the ocean. – Springer Science & Business Media, 2008.

- [38]. Kopylova Y. G. et al. Oscillations of coronal loops and second pulsations of solar radio emission //Astronomy Letters. – 2007. – V. 33. – №. 10. – P. 706-713.
- [39]. Kopylova Y. G., Stepanov A. V., Tsap Y. T. Radial oscillations of coronal loops and microwave radiation from solar flares //Astronomy Letters. – 2002. – V. 28. – №. 11. – P. 783-791.
- [40]. Krall N. A., Trivelpiece A. W. Principles of plasma physics //American Journal of Physics. – 1973. – V. 41. – №. 12. – P. 1380-1381.
- [41]. Leibovich S. Weakly non-linear waves in rotating fluids //Journal of Fluid Mechanics. – 1970. – V. 42. – №. 4. – P. 803-822.
- [42]. Li B. et al. Magnetohydrodynamic Fast Sausage Waves in the Solar Corona //Space Science Reviews. – 2020. – V. 216. – №. 8. – P. 1-42.
- [43]. Mathioudakis M., Jess D. B., Erdélyi R. Alfvén waves in the solar atmosphere //Space Science Reviews. – 2013. – V. 175. – №. 1-4. – P. 1-27.
- [44]. McLaughlin J. A. et al. Modelling quasi-periodic pulsations in solar and stellar flares //Space Science Reviews. – 2018. – V. 214. – №. 1. – P. 1-54.
- [45]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1985. – V. 95. – №. 1. – P. 51-68.
- [46]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1986. – V. 105. – №. 2. – P. 265-289.
- [47]. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere //Solar physics. – 1986. – V. 103. – №. 2. – P. 259–276.
- [48]. Merzlyakov E. G. Nonlinear long wave modulation in symmetric waves of a plane magnetic layer //Fluid Dynamics. – 1985. – V. 20. – №. 2. – P. 305-309.
- [49]. Mikhalyaev B. B., Mankaeva G. A., **Naga Varun Y.** Modulational Instability of Radial Oscillations of Coronal Loops //Geomagnetism and Aeronomy. – 2019. – V. 59. – №. 8. – P. 1108-1113.

- [50]. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Fast sausage solitons in the coronal loops // Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017» –2017. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С. 231.
- [51]. Mikhalyaev B. B., **Naga Varun Y.** Nonlinear Schrödinger equation for the sausage mode in homogenous magnetic flux tubes // Сборник трудов XXI Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2017» –2017. – С. 235.
- [52]. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S. Nonlinear fast sausage waves in homogeneous magnetic flux tubes // *Journal of Plasma Physics*. – 2015. – V. 81. – №. 6.
- [53]. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S., **Naga Varun Y.** Nonlinear radial oscillations of coronal loops // *Geomagnetism and Aeronomy*. – 2016. – V. 56. – №. 8. – P. 1040-1044.
- [54]. Molotovshchikov A. L. Modeling the interaction of solitary waves in magnetic tubes // *Fluid Dynamics*. – 1989. – V. 24. – №. 2. – P. 321-325.
- [55]. Molotovshchikov A. L., Ruderman M. S. Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere // *Solar physics*. – 1987. – V. 109. – №. 2. – P. 247-263.
- [56]. Morton R. J., Erdélyi R. Application of the theory of damping of kink oscillations by radiative cooling of coronal loop plasma // *Astronomy & Astrophysics*. – 2010. – V. 519. – P. A43.
- [57]. Morton R. J., Erdélyi R. Transverse oscillations of a cooling coronal loop // *The Astrophysical Journal*. – 2009. – V. 707. – №. 1. – P. 750.
- [58]. Morton R. J., Hood A. W., Erdélyi R. Propagating magneto-hydrodynamic waves in a cooling homogenous coronal plasma // *Astronomy & Astrophysics*. – 2010. – V. 512. – P. A23.
- [59]. **Naga Varun Y.**, Mankaeva G. A., Mikhalyaev B. B. Fast Sausage Solitons and Super Nonlinearity in Coronal Loops // *Geomagnetism and Aeronomy*. – 2018. – V. 58. – №. 7. – P. 947-952.

- [60]. **Naga Varun Y.**, Solovev A. A., Mikhalyaev B. B. Observational evidence of a soliton like feature in the active region NOAA 8214 and its modeling using the nonlinear Schrödinger equation // Сборник трудов XXIV Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2020» –2020. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.235-238.
- [61]. Nakariakov V. M. et al. Magnetohydrodynamic oscillations in the solar corona and Earth’s magnetosphere: towards consolidated understanding //Space Science Reviews. – 2016. – V. 200. – №. 1-4. – P. 75-203.
- [62]. Nakariakov V. M., Melnikov V. F. Quasi-periodic pulsations in solar flares //Space Science Reviews. – 2009. – V. 149. – №. 1-4. – P. 119-151.
- [63]. Nakariakov V. M., Melnikov V. F., Reznikova V. E. Global sausage modes of coronal loops //Astronomy & Astrophysics. – 2003. – V. 412. – №. 1. – P. L7-L10.
- [64]. Nakariakov V. M., Oraevsky V. N. Resonant interactions of modes in coronal magnetic flux tubes //Solar Physics. – 1995. – V. 160. – №. 2. – P. 289-302.
- [65]. Nakariakov V. M., Pascoe D. J., Arber T. D. Short quasi-periodic MHD waves in coronal structures //Space science reviews. – 2005. – V. 121. – №. 1. – P. 115-125.
- [66]. Nakariakov V. M., Roberts B. On fast magnetosonic coronal pulsations //Solar Physics. – 1995. – V. 159. – №. 2. – P. 399-402.
- [67]. Nakariakov V. M., Roberts B., Petrukhin N. S. Nonlinear dynamics of fast magnetosonic waves ducted by a smooth plasma inhomogeneity //Journal of plasma physics. – 1997. – V. 58. – №. 2. – P. 315-327.
- [68]. Nisticò G., Pascoe D. J., Nakariakov V. M. Observation of a high-quality quasi-periodic rapidly propagating wave train using SDO/AIA //Astronomy & Astrophysics. – 2014. – V. 569. – A12.
- [69]. Ofman L., Liu W. Quasi-periodic counter-propagating fast magnetosonic wave trains from neighboring flares: SDO/AIA observations and 3D MHD modeling //The Astrophysical Journal. – 2018. – V. 860. – №. 1. – P. 54.

- [70]. Oliver R., Ruderman M. S., Terradas J. Propagation and dispersion of sausage wave trains in magnetic flux tubes //The Astrophysical Journal. – 2015. – V. 806. – №. 1. – P. 56.
- [71]. Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions //The ANZIAM Journal. – 1983. – V. 25. – №. 1. – P. 16-43.
- [72]. Priest E. R. Solar flare magnetohydrodynamics // The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics – New York: Gordon and Breach – 1981.
- [73]. Priest E. R. Solar Magnetohydrodynamics – Geophysics and Astrophysics Monographs Volume 21 (D. Reidel Publishing Company), 1982.
- [74]. Priest E. R. The structure of coronal loops //Solar Physics. – 1978. – V. 58. – №. 1. – P. 57-87.
- [75]. Prudnikov A. P., Brychkov Y. A., Marichev O. I. Integrals and Series, Vol. 2: More Special Functions, edited by Gordon and Breach Science Publishers //Second Printing. – 1998.
- [76]. Pugh C. E. et al. Properties of quasi-periodic pulsations in solar flares from a single active region //Astronomy & Astrophysics. – 2017. – V. 608. – A101.
- [77]. Pugh C. E., Broomhall A. M., Nakariakov V. M. Scaling laws of quasi-periodic pulsations in solar flares //Astronomy & Astrophysics. – 2019. – V. 624. – A65.
- [78]. Roberts B. MHD waves in the solar atmosphere. – Cambridge University Press, 2019.
- [79]. Roberts B. Overstability and cooling in sunspots //The Astrophysical Journal. – 1976. – V. 204. – P. 268-280.
- [80]. Roberts B. Solitary waves in a magnetic flux tube //The Physics of fluids. – 1985. – V. 28. – №. 11. – P. 3280-3286.
- [81]. Roberts B. Wave propagation in a magnetically structured atmosphere //Solar Physics. – 1981. – V. 69. – №. 1. – P. 39-56.
- [82]. Roberts B. Waves and oscillations in the corona– (Invited review) //Solar Physics. – 2000. – V. 193. – №. 1-2. – P. 139-152.

- [83]. Roberts B. Waves in the solar atmosphere //Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. – 1991. – V. 62. – №. 1-4. – P. 83-100.
- [84]. Roberts B., Edwin P. M., Benz A. O. On coronal oscillations //The Astrophysical Journal. – 1984. – T. 279. – P. 857-865.
- [85]. Roberts B., Mangeney A. Solitons in solar magnetic flux tubes //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1982. – V. 198. – №. 1. – P. 7P-11P.
- [86]. Rosenberg H. Evidence for MHD pulsations in the solar corona //A&A. – 1970. – V. 9. – P. 159.
- [87]. Rudenko O., Soluyan S. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics (Consultants Bureau, New York, 1977) //Studies in Soviet Science. Translation from Russian by Robert T. Beyer. – 1977.
- [88]. Ruderman M. S. Nonlinear waves in the magnetically structured solar atmosphere //Turbulence, Waves and Instabilities in the Solar Plasma. – Springer, Dordrecht, 2003. – P. 239-274.
- [89]. Ruderman M. S. Nonlinear waves in the solar atmosphere //Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2006. – V. 364. – №. 1839. – P. 485-504.
- [90]. Ruderman M. S., Erdélyi R. Transverse oscillations of coronal loops //Space science reviews. – 2009. – V. 149. – №. 1-4. – P. 199-228.
- [91]. Shabat A., Zakharov V. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media //Soviet physics JETP. – 1972. – V. 34. – №. 1. – P. 62.
- [92]. Sharma A. et al. Wave amplitude modulation in fan loops as observed by AIA/SDO //Astronomy & Astrophysics. – 2020. – V. 638. – A6.
- [93]. Shestov S., Nakariakov V. M., Kuzin S. Fast magnetoacoustic wave trains of sausage symmetry in cylindrical waveguides of the solar corona // The Astrophysical Journal. – 2015. – V. 814. – №. 2. – P. 135.
- [94]. Shivamoggi B. Perturbation methods for differential equations. – Springer Science & Business Media, 2002.

- [95]. Shrira V. I., Geogjaev V. V. What makes the peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? //Journal of Engineering Mathematics. – 2010. – V. 67. – №. 1-2. – P. 11-22.
- [96]. Shvets V. F., Kosmatov N. E., LeMesurier B. J. On collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation in supercritical case //Singularities in Fluids, Plasmas and Optics. – Springer, Dordrecht, 1993. – P. 317-321.
- [97]. Solli D. R. et al. Optical rogue waves //Nature. – 2007. – V. 450. – №. 7172. – P. 1054-1057.
- [98]. Spangler S. R. Kinetic effects on Alfvén wave nonlinearity. II. The modified nonlinear wave equation //Physics of Fluids B: Plasma Physics. – 1990. – V. 2. – №. 2. – P. 407-418.
- [99]. Spiegel E. A. Fluid dynamical form of the linear and nonlinear Schrödinger equations //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1980. – V. 1. – №. 2. – P. 236-240.
- [100]. Spruit H. C. Propagation speeds and acoustic damping of waves in magnetic flux tubes //Solar Physics. – 1982. – V. 75. – №. 1-2. – P. 3-17.
- [101]. Stasiewicz K. Heating of the solar corona by dissipative Alfvén solitons //Physical review letters. – 2006. – V. 96. – №. 17. – P. 175003.
- [102]. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. – Princeton university press, 1970.
- [103]. Strauss W. A. Nonlinear scattering theory //Scattering theory in mathematical physics. – Springer, Dordrecht, 1974. – P. 53-78.
- [104]. Su J. T. et al. Imaging observations of quasi-periodic pulsations in solar flare loops with SDO/AIA //The Astrophysical Journal. – 2012. – V. 755. – №. 2. – P. 113.
- [105]. Sulem C., Sulem P. L. Focusing nonlinear Schrödinger equation and wave-packet collapse //Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1997. – V. 30. – №. 2. – P. 833-844.
- [106]. Sulem C., Sulem P. L. The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse. – Springer Science & Business Media, 2007.

- [107]. Sulem P. L., Sulem C., Patera A. Numerical simulation of singular solutions to the two-dimensional cubic Schrödinger equation //Communications on pure and applied mathematics. – 1984. – V. 37. – №. 6. – P. 755-778.
- [108]. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers //Physical review letters. – 1986. – V. 56. – №. 2. – P. 135.
- [109]. Thackray H., Jain R. Fast magnetohydrodynamic waves in a solar coronal arcade //Astronomy & Astrophysics. – 2017. – V. 608. – A108.
- [110]. Tsutsumi Y. Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations //Annales de l'IHP Physique théorique. – 1985. – V. 43. – №. 3. – P. 321-347.
- [111]. Ulmschneider P., Priest E. R., Rosner R. (ed.). Mechanisms of Chromospheric and Coronal Heating: Proceedings of the International Conference, Heidelberg, 5–8 June 1990. – Springer Science & Business Media, 2013.
- [112]. Vaiana G. S., Rosner R. Recent advances in coronal physics //Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1978. – V. 16. – №. 1. – P. 393-428.
- [113]. Van Doorselaere T. et al. Seismological demonstration of perpendicular density structuring in the solar corona //Astronomy & Astrophysics. – 2008. – V. 491. – №. 2. – P. L9-L12.
- [114]. Van Doorselaere T., Kupriyanova E. G., Yuan D. Quasi-periodic pulsations in solar and stellar flares: an overview of recent results (invited review) //Solar Physics. – 2016. – V. 291. – №. 11. – P. 3143-3164.
- [115]. Velo G. et al. Mathematical aspects of the nonlinear Schrödinger equation //Proceedings of the Euro-conference on nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger systems: theory and applications, Singapore: World Scientific, Vázquez, Luis et al.(ed.). – 1996. – P. 39-67.
- [116]. Vlasov S. N., Piskunova L. V., Talanov V. I. Three-dimensional wave collapse in the nonlinear Schrödinger equation model //Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1989. – V. 95. – P. 1945.
- [117]. Vlasov S. N., Talanov V. I. Wave self-focusing //Publications of the Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russian Academy of Sciences. – 1997.

- [118]. Wang T. Standing slow-mode waves in hot coronal loops: observations, modeling, and coronal seismology //Space science reviews. – 2011. – V. 158. – №. 2-4. – P. 397-419.
- [119]. Weinstein M. I. Solitary waves of nonlinear dispersive evolution equations with critical power nonlinearities //Journal of differential equations. – 1987. – V. 69. – №. 2. – P. 192-203.
- [120]. Weinstein M. I. The nonlinear Schrodinger equation – Singularity formation, Stability and dispersion, The Connection between Infinite and Finite Dimensional Dynamical Systems //Contemp. Math. – 1989. – V. 99. – P. 213-232.
- [121]. Weisshaar E. Solitary waves in slender magnetic flux tubes as solutions of the Leibovich–Pritchard–Roberts equation //Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1989. – V. 1. – №. 8. – P. 1406-1414.
- [122]. Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves (Wiley-Interscience, New York. – 1974.
- [123]. Williamson A., Erdélyi R. Linear MHD Wave Propagation in Time-Dependent Flux Tube //Solar physics. – 2014. – V. 289. – №. 4. – P. 1193-1202.
- [124]. Wilson P. R. Hydromagnetic wave modes in magnetic flux tubes //Astronomy and Astrophysics. – 1979. – V. 71. – P. 9-13.
- [125]. Wood D. The Self-Focusing Singularity in the Nonlinear Schrödinger Equation //Studies in Applied Mathematics. – 1984. – V. 71. – №. 2. – P. 103-115.
- [126]. Yuen H. C., Ferguson Jr W. E. Relationship between Benjamin–Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation //The Physics of Fluids. – 1978. – V. 21. – №. 8. – P. 1275-1278.
- [127]. Yuen H. C., Lake B. M. Nonlinear deep water waves: Theory and experiment //The Physics of Fluids. – 1975. – V. 18. – №. 8. – P. 956-960.
- [128]. Zabolotskaya E. A., Khokhlov R. V. Quasi-standing waves in nonlinear acoustics of restricted beams //Akust. Zh. [Soviet Phys. Acoust.]. – 1969. – V. 15. – №. 1. – P. 40-47.

- [129]. Zabolotskaya E. A., Shvartsburg A. B. Nonlinear acoustic wave-guide //Soviet physics acoustics-USSR. – 1987. – V. 33. – №. 2. – P. 221-222.
- [130]. Zabolotskaya E. A., Shvartsburg A. B. Propagation of finite-amplitude waves in a wave-guide //Soviet physics acoustics-USSR. – 1988. – V. 34. – №. 5. – P. 493-495.
- [131]. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states //Physical review letters. – 1965. – V. 15. – №. 6. – P. 240.
- [132]. Zaitsev V. F., Polyinin A. D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – 2003.
- [133]. Zajtsev V. V., Stepanov A. V. On the origin of pulsations of type IV solar radio emission. Plasma cylinder oscillations (I) //IGAFS. – 1975. – V. 37. – P. 3-10.
- [134]. Zakharov V. E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid //Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1968. – V. 9. – №. 2. – P. 190-194.
- [135]. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: the beginning //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238. – №. 5. – P. 540-548.
- [136]. Zakharov V. E., Shabat A. B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I //Functional analysis and its applications. – 1974. – V. 8. – №. 3. – P. 226-235.
- [137]. Zaqarashvili T. V., Kukhianidze V., Khodachenko M. L. Propagation of a sausage soliton in the solar lower atmosphere observed by Hinode/SOT //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. – 2010. – V. 404. – №. 1. – P. L74-L78.
- [138]. Zhelyazkov I. et al. Modulations of slow sausage surface waves travelling along a magnetized slab //Journal of plasma physics. – 1994. – V. 51. – №. 2. – P. 291-308.
- [139]. Zhugzhda Y. D., Nakariakov V. M. Non-linear body sausage waves in thin magnetic flux tubes //Physics Letters A. – 1997. – V. 233. – №. 4-6. – P. 413-417.

- [140]. Zwaan C. On the appearance of magnetic flux in the solar photosphere //Solar Physics. – 1978. – V. 60. – №. 2. – P. 213-240.
- [141]. Михалев Б. Б., **Нага Варун Е.**, Манкаева Г. А. Модуляционная неустойчивость радиальных колебаний корональных петель // Сборник трудов XXII Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2018» – 2018. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С. 291-294.
- [142]. Михалев Б.Б., Рудерман М.С., **Нага Варун Е.** Нелинейная радиальная мода корональных петель// Сборник трудов XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015». – 2015. – ГАО РАН, Санкт-Петербург. – С.281-284.
- [143]. **Нага Варун Е.** Модуляционная неустойчивость магнитозвуковых волн в однородной магнитной трубке в корональных условиях Солнца// Материалы конференции 22 Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных «ВНКСФ-22». – 2016, Ростов на Дону. – С.312-313.